

УДК: 681.511.26

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ: ПЕРЕВЕРНУТЫЙ МАЯТНИК*

А.А. ВОЕВОДА¹, В.Ю. ФИЛЮШОВ²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Применение линейных законов управления к нелинейным системам значительно упрощает задачу синтеза. Но целесообразность их применения имеет смысл только в окрестности некоторой точки, в которой линеаризованная модель ведет себя аналогично исходной. Для расширения этой области регулирования применяется линеаризация обратной связью, при которой исходная нелинейная модель преобразуется не в приближенную, а в эквивалентную линейную. Вначале находится такое управление u , при котором нелинейная модель объекта преобразуется в эквивалентную ему линейную с новым управлением u_r . Далее, используя линейные законы управления, находится новое управление u_r , позволяющее применять линейные методы синтеза для полученной модели объекта. Данный метод требует известности всего вектора состояния, поэтому в нашей работе мы будем его оценивать при помощи наблюдателя состояния полного порядка.

Ключевые слова: нелинейное управление, линеаризация обратной связью, регулятор, наблюдатель состояния, синтез

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-49-60

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы будем рассматривать модель объекта «перевернутый маятник на тележке». Данная модель имеет очень интересную нелинейную структуру, которая включает в себя тригонометрические функции, умножение, возведение в квадрат и деление. Объект, содержащий в себе столько различных типов нелинейностей, очень интересен с точки зрения линеаризации

* Статья получена 08 июля 2016 г.

обратной связью (ЛОС) [1], которая заключается в нахождении такого управления по обратной связи, что поведение исходной модели будет эквивалентно какой-либо линейной структуре (в нашем случае модели, полученной линеаризацией исходной модели с использованием разложения в ряд Тэйлора) [2]. Проводить линеаризацию обратной связью можно различными путями. Можно использовать алгебру Ли для нахождения новых переменных, в которых динамическая система (ДС) будет линейна. Также можно использовать структурные преобразования для нелинейных систем. Для применения ЛОС необходима доступность всего вектора состояния объекта. В этой работе мы будем производить оценку вектора состояния путем введения наблюдателя состояния полного порядка.

Линеаризация обратной связью путем структурных преобразований была рассмотрена в статье [3]. В работе [4] приведен синтез системы на основе ЛОС с применением алгебры Ли. В работе [5] приводится синтез регулятора эвристическим методом для обработки возмущения и входных воздействий. В работе [6] приводится синтез регулятора эвристически с использованием модального метода синтеза. В работе [7] произведен анализ влияния дифференцирующего фильтра на эвристически рассчитанный регулятор. В работе [8] произведен синтез регулятора для отклонения угла объекта «перевернутый маятник на тележке». В работе [9] приведен анализ применения дифференцирующего звена для управления перевернутым маятником. В работе [10] представлен полиномиальный метод синтеза нелинейного регулятора.

Исходный объект описывается двумя нелинейными дифференциальными уравнениями [11]:

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \theta\right) \ddot{\theta} - \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{ml}{M_t L} \cos \theta \sin \theta (\dot{\theta})^2 = \frac{1}{M_t L} \cos \theta u, \quad (1)$$

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \theta\right) \ddot{s} - \frac{ml}{M_t} \sin \theta (\dot{\theta})^2 + \frac{m \lg}{M_t L} \cos \theta \sin \theta = \frac{u}{M_t},$$

где m – масса маятника; mg – вес маятника; M – масса тележки, $M_t = m + M$, – отклонение маятника от вертикали; l – длина звена маятника, $L = (I + ml^2)/ml$, I – момент инерции; s – перемещение тележки.

Под u понимается задание на положение маятника по углу θ . Рассматривается частный случай, когда $M \neq 0$, $I = 0$, тогда (1) будет иметь вид

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin(\theta) - ml \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + u \cos(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \quad (2)$$

$$\ddot{s} = \frac{mg \cos(\theta) \sin(\theta) - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + u}{M + m \sin^2(\theta)}.$$

Также имеет место другая общепринятая модель перевернутого маятника:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - ml\dot{s} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0,$$

$$(M + m)\ddot{s} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u.$$

В отличие от выражения (1), в таком представлении модели мы имеем одно управление, но в каждом уравнении мы имеем обе старшие производные.

Для управления перевернутым маятником зачастую используют его линейное представление в нулевой окрестности угла отклонения $\theta = 0$. В этом случае $\dot{\theta}^2 = 0$, $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$. Мы будем рассматривать задачу стабилизации только угла отклонения маятника, тогда исходное нелинейное уравнение будет иметь вид

$$(M + m \sin^2(\theta))l\ddot{\theta} + ml \cos(\theta) \sin(x_1)\dot{\theta}^2 - (M + m)g \sin(\theta) = u \cos(\theta), \quad (3)$$

а в окрестности нуля будет иметь вид

$$Ml\ddot{\theta} - (M + m)g\theta = u. \quad (4)$$

1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Далее приведем исходное уравнение объекта (2) к линеаризованному виду (4) путем обратных связей. Для этого будем использовать линеаризующее звено вида

$$\frac{a_1\ddot{\theta} + a_2\dot{\theta} + a_3\theta + u_r}{\cos(\theta)} = u. \quad (5)$$

Приравнивая левые части уравнений (3) и (5), получим

$$\begin{aligned} & ((M + m \sin^2(\theta))l - a_1)\ddot{\theta} + (ml \cos(\theta) \sin(x_1)\dot{\theta} - a_2)\dot{\theta} - \\ & - \left(\frac{(M + m)g \sin(\theta)}{\theta} + a_3 \right) \theta = u_r. \end{aligned} \quad (6)$$

Поиск коэффициентов будем производить путем приравнивания коэффициентов уравнения (4) и линеаризованного (6), тогда

$$\begin{aligned}(M + m \sin^2(\theta))l - a_1 &= Ml \Rightarrow a_1 = ml \sin^2(\theta), \\ ml \cos(\theta) \sin(x_1) \dot{\theta} - a_2 &= 0 \Rightarrow a_2 = ml \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}, \\ -\left(\frac{(M + m)g \sin(\theta)}{\theta} + a_3\right) &= -(M + m)g \Rightarrow a_3 = \frac{(M + m)g(\theta - \sin(\theta))}{\theta}.\end{aligned}\quad (7)$$

Таким образом линеаризующее звено (5) с коэффициентами (7) преобразует исходное нелинейное уравнение (2) к линейному виду (4), что позволяет использовать линейные методы синтеза. Далее построим наблюдатель полного порядка и регулятор для (4).

2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА

Наблюдатель полного порядка описывается уравнением

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}).$$

Матрица коэффициентов L подбирается из условий необходимого быстрогодействия наблюдателя. Ошибка оценивания $\tilde{x} = x - \hat{x}$ вектора состояния x описывается уравнением $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$. Как известно, для корректной работы наблюдателя переходные процессы в нем должны проходить в 5-10 раз быстрее процессов в системе объект–регулятор. Входом наблюдателя является управление и выход объекта. Управление – это сила, приложенная к каретке, а выход – это угол отклонения маятника от вертикальной оси.

Управление сформируем в виде

$$u = -K\tilde{x} + u_r.$$

Матрицу K будем подбирать исходя из времени переходных процессов объекта.

Вычисление матрицы L удобнее проводить, представляя объект в наблюдаемой канонической форме, а матрицу K – в управляемой.

Расчет матрицы обратной связи [12] будем производить для линеаризованного обратной связью перевёрнутого маятника.

Подставим в уравнение (4) численные значения:

$$M = 30, m = 70, l = 1, g = 10,$$

тогда

$$\ddot{\theta} = 33.3\theta + 0.033u,$$

или в переменных состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 33.3x_1 + 0.033u, \\ y &= \theta = x_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) в матричном представлении $\dot{x} = Ax + Bu$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 33.3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.033 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Для выбора коэффициентов регулятора смоделируем переходные процессы объекта (рис. 1).

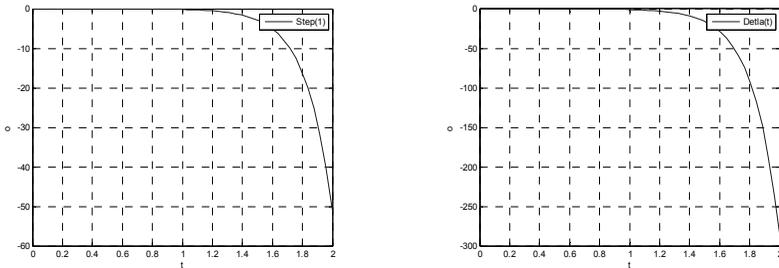


Рис. 1. Переходные процессы объекта при различных входных воздействиях

Как видно из графиков, сильное отклонение угла от вертикали «падение маятника» происходит примерно после 1.2...1.6 с. Исходя из этого зададим собственные свойства системы объект–регулятор желаемыми полюсами:

$$s_{1,2} = -4, \quad (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Выбор таких полюсов в теории должен дать время переходного процесса системы объект–регулятор.

Таким образом, желаемая матрица объекта с регулятором будет выглядеть так:

$$A_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Добиваться желаемых полюсов будем введением в обратную связь матрицы $K = (k_1 \quad k_2)$:

$$A_d = A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$K = (1493 \quad 240).$$

Использование модального метода синтеза подразумевает доступность всего вектора состояния объекта. В данной работе мы будем вычислять компоненты вектора x при помощи наблюдателя состояния полного порядка.

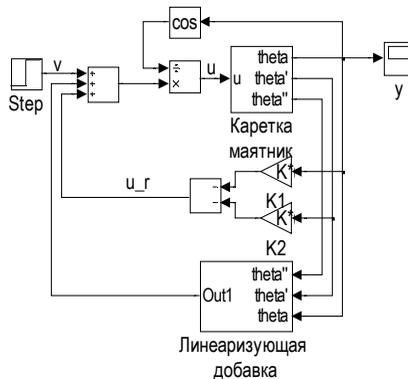


Рис. 2. Структурная схема объекта с регулятором и линеаризующей добавкой

Ниже приведены графики моделирования переходных процессов при полностью известном векторе состояния и его производной для системы с рассчитанным регулятором и линеаризующей добавкой и без нее.

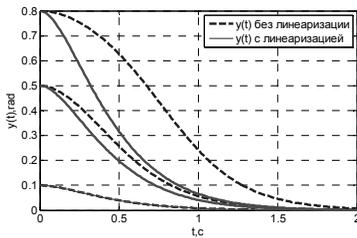


Рис. 3. Графики переходных процессов при различных начальных условиях

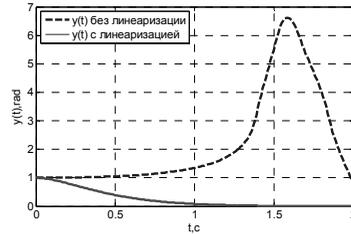


Рис. 4. Графики переходных процессов при больших углах отклонения

Как видно из рис. 3, при малых углах отклонения маятника переходные процессы системы с линеаризацией и без нее совпадают (обе системы ведут себя как линейные). При увеличении угла отклонения переходные процессы начинают отличаться друг от друга, причем различные начальные условия не влияют на время переходного процесса системы с линеаризацией (линейное поведение). А время переходного процесса системы без линеаризации при увеличении начальных условий увеличивается, и после угла в 1 радиан (представлен на рис. 4) начинается неустойчивый переходной процесс.

Выше были представлены результаты моделирования при полностью известном векторе состояния и его производной, но на практике нам необходимо использовать различные средства для вычисления неизвестных компонент вектора. В данной работе мы будем использовать наблюдатель состояния полного порядка.

Расчет наблюдателя полного порядка [13] будем производить для объекта, представленного в наблюдаемой форме. Для того чтобы исходное уравнение (4) представить в наблюдаемой форме, возьмем за выход объекта переменную x_2 , тогда

$$\dot{x}_1 = 33.3x_2 + 0,033u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$y = \theta = x_2.$$

Запишем в матричном виде:

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 33.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_o = \begin{pmatrix} 0.033 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_o = (0 \quad 1).$$

Исходя из условий быстродействия наблюдателя выберем собственные числа $s_{1,2} = -20 \pm 20j = s^2 + 40s + 400$. Таким образом, желаемая матрица будет выглядеть так:

$$A_{od} = \begin{pmatrix} 0 & -400 \\ 1 & -40 \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель с выбранными полюсами будет в пять раз быстрее системы объект–регулятор. Добиваться этого будем введением в обратную связь $L_o = (l_1 \quad l_2)^T$. Динамические свойства наблюдателя описываются уравнением $\dot{\hat{x}} = (A - LC)x$:

$$A_{od} = A_o - L_o C_o = \begin{pmatrix} 0 & -400 \\ 1 & -40 \end{pmatrix},$$

$$L_o = (433.3 \quad 40)^T.$$

Ниже приведена структурная схема системы с наблюдателем и графики переходных процессов при различных начальных условиях для системы с наблюдателем и линеаризацией и для системы с наблюдателем и без линеаризации. Причем старшую производную мы брали из объекта.

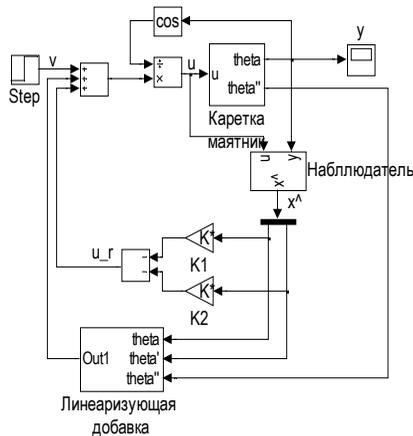


Рис. 5. Структурная схема объекта с регулятором, линеаризующей добавкой и наблюдателем

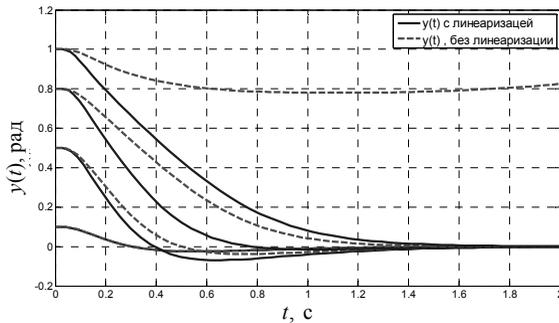


Рис. 6. Графики переходных процессов при различных начальных условиях

На рис. 6 представлены графики переходных процессов системы «объект – линеаризующая добавка – наблюдатель – регулятор» при различных начальных условиях объекта и нулевых начальных условиях наблюдателя состояния. Перерегулирование у переходных процессов объясняется появившимися нулями в передаточной функции линеаризованной системы. Время переходного процесса по сравнению с системами без наблюдателя существенно не изменилось, это объясняется правильным выбором скорости убывания ошибки оценивания. Но в системах с наблюдателем возрастает сигнал управления, поэтому в системах с сильно ограниченным управляющим сигналом применение наблюдателя состояния ограничивает возможности регулирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показан метод нахождения управления, основанный на линеаризации обратной связи, на примере объекта с различными нелинейными элементами (тригонометрические функции, умножение и возведение в квадрат). Показано, что введение линеаризующей добавки позволяет получить систему, эквивалентную линейной. И сложная нелинейная система имеет поведение, эквивалентное линейной. Это позволяет применять линейные законы управления, которые будут работать в большей области вокруг точки линеаризации, нежели их применение к исходному объекту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

2. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
3. *Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.
4. *Воевода А.А., Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 68–76.
5. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.
6. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9.
7. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Использование дифференцирующего фильтра при синтезе нелинейного регулятора // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 13–21.
8. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 22.10.2013. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
9. *Филюшов В.Ю.* Применение дифференцирующего звена для управления перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 69–78.
10. *Вороной В.В.* Полиномиальная методика расчета нелинейных регуляторов для нелинейных систем // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3 (52). – С. 185–188.
11. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* О модели перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 3–14.
12. *Зайцев Г.Ф.* Теория автоматического управления и регулирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Выща школа, 1998. – 430 с.
13. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: теория автоматического управления, сети Петри. Имеет более 200 публикаций. E-mail: voevoda@ucit.ru

Филюшов Владислав Юрьевич, аспирант кафедры автоматизации НГТУ. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления. Имеет 3 публикации. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Feedback linearization: inverted pendulum***A.A. Voevoda¹, V.Yu. Filiushov²**

¹ Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

The use of linear control laws for nonlinear systems greatly simplifies the task of synthesis. But the feasibility of their application makes sense only in the vicinity of a point at which the linearized model behaves like the original. To extend this regulatory feedback linearization is used, in which the original nonlinear model is transformed not approximate, and an equivalent linear. In the beginning, there is a control u , in which the non-linear model of the object is converted into an equivalent linear him with a new control u_r . Next, using a linear control laws, is u_r new control allows to apply linear synthesis method to retrieve the object model. This method requires the recognition of all of the state vector, so in our study we will evaluate it with the help of an observer state of complete order.

Keywords: nonlinear control, feedback linearization, control, state observer, synthesis

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-49-60

REFERENCES

1. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2 [Automatic control theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
2. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [Automatic control theory. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2003. 288 p.
3. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.
4. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu [Feedback linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 68–76.
5. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Sintez nelineinogo regulatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.

* Received 08 July 2016.

6. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob"ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.

7. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Ispol'zovanie differentsiruyushchego fil'tra pri sinteze nelineinogo regul'yatora [Using differential filter for nonlinear control system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 13–21.

8. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [Design of multi channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

9. Filyushov V.Yu. Primenenie differentsiruyushchego zvena dlya upravleniya perevernutym mayatnikom [Applying of derivative element for control of inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 69–78.

10. Voronoy V.V. Polinomial'naya metodika rascheta nelineinykh regul'yatorov dlya nelineinykh sistem [The polynomial calculation procedure of nonlinear regulators for nonlinear system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 3 (52), pp. 185–188.

11. Voevoda A.A., Shoba E.V. O modeli perevernutogo mayatnika [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 3–14.

12. Zaitsev G.F. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya i regulirovaniya* [Automatic control and regulation theory]. 2nd ed. Kiev, Vyshcha shkola Publ., 1998. 430 p.

13. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control systems theory]. 4th ed. St. Petersburg, Professiya Publ., 2004. 752 p.