СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2019. – № 1 (94).** – 114–122

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.958 DOI: 10.17212/2307-6879-2019-1-114-122

О СТАТИСТИКЕ ГАУССА–КУЗЬМИНА ДЛЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ*

И.Т. БЕКТЕМИРОВ[1], В.А. СЕЛЕЗНЕВ[2]

[1] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры инженерной математики. E-mail: ilkhom.bektemirov@inbox.ru*
[2] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: seleznev@corp.nstu.ru*

Теория математического моделирования процесса роста кристаллических структур в настоящий момент далека от своего завершения. Причиной этого является отсутствие соответствующего геометрического аппарата. Информация о геометрическом строении кристаллических структур носит описательный характер [1, 2], и основным инструментом представления строения кристаллов является аффинная геометрия [3, 4]. В работе [5] приведена геометрическая модель, целью которой является построение плоских решетчатых структур, моделирующих двумерные кристаллические структуры. Геометрический аппарат преобразования решетчатых структур, приведенный в [5], основан на представлении конечных цепных дробей унимодулярными матрицами и претендует на построение модели роста плоских кристаллов. В представлении унимодулярных матриц, композиция которых имитирует рост плоских кристаллов, используются параметры Вейса плоских кристаллов. Этот факт позволяет объяснить, почему параметрами Вейса, как правило, являются натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, реже 7, 8, и практически эти натуральные числа исчерпывают встречающиеся наборы параметров Вейса. Объяснение состоит в том, что натуральные числа, формирующие цепные дроби, подчиняются определенной статистике Гаусса–Кузьмина, и численная проверка этой статистики позволит установить математические закономерности роста кристаллических структур. Данная работа представляет обоснование и постановку численного эксперимента по реализации статистики Гаусса–Кузьмина.

Ключевые слова: статистика Гаусса–Кузьмина, представление цепных дробей, цепные дроби

---

* Статья получена 26 ноября 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется алгоритм получения частотного распределения натуральных чисел в представлении действительных чисел цепными дробями. Согласно известной теореме Гаусса–Кузьмина, [6, с. 110], вероятность $R(m)$ появления натурального числа в разложении для почти всех действительных чисел равна

$$R(m) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{1}{m(m+2)}\right). \tag{1}$$

Чтобы получить статистику такого распределения, надо взять репрезентативную выборку чисел $r_1, r_2, ..., r_k, ..., r_N \subset [a,b]$, разложить эти числа в цепные дроби по правилу

$$r_k = a_0^k + \cfrac{1}{a_1^k + \cfrac{1}{a_2^k + ... + \cfrac{1}{a_n^k}}} = \left\{a_0^k, a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k\right\},\ k = 1, 2, ..., N, \tag{2}$$

и рассмотреть матрицу данных, состоящую из выборок (2)

$$\begin{array}{l} a_1^1\, a_2^1 \ldots a_n^1 \\ \ldots \\ a_1^k\, a_2^k \ldots a_n^k \\ \ldots \\ a_1^N\, a_2^N \ldots a_k^N \end{array} \tag{3}$$

Для каждой строки матрицы обозначим через $P_n^k(m)$ относительную частоту появления натурального числа m – отношение числа повторений натурального m в этой строке к длине n этой строки. При таком построчном вычислении согласно теореме Гаусса–Кузьмина мы должны получить

$$\lim_{n\to\infty} P_n^k(m) = R(m), \tag{4}$$

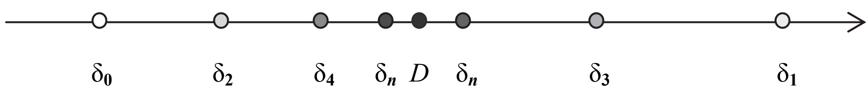
где предел не зависит от выбора строки K в матрице представлений (3).

Главные два препятствия на пути вычисления предела (4) состоят в следующем. Во-первых, требуется построить и обосновать репрезентативность выборки (3), ведь теорема Гаусса–Кузьмина на множестве рациональных чисел не выполняется в силу конечности подходящих цепных дробей таких чисел. Во-вторых, для обработки данных надо построить конечные выборки рациональных чисел, аппроксимирующих числа из предположительно репрезентативной выборки действительных чисел. Такие выборки содержат конечное небольшое число элементов подходящей цепной дроби, поэтому смоделировать численно предел (4) можно только при неоправданно больших вычислительных затратах. В данной работе проверяются относительные частоты не на каждой отдельно взятой строке рационального числа из выборки (3), а по столбцам на всей матрице (3), когда эта матрица представляет репрезентативную выборку. Другими совами, будем исследовать частоты натуральных чисел на первом, втором и так далее столбцах в разложении (3) всей выборки $r_1, r_2,..., r_N$ при $N \to \infty$.

Замечание. В связи с исследованием частоты параметров Вейса на основе решетчатой модели роста плоских кристаллов [5] мы ограничимся нахождением частот натуральных чисел $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

1. ОБОСНОВАНИЕ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ ВЫБОРКИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЧИСЛОВОЙ РЕШЕТКИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теорема Гаусса–Кузьмина задает распределение частот на подмножестве множества иррациональных чисел, имеющем полную меру Лебега на любом отрезке [6, 7]. Поскольку при построении выборки (3) мы пользуемся рациональными приближениями действительных чисел, то построение репрезентативной выборки мы основываем на следующем [6] известном геометрическом свойстве цепных дробей. Пусть дана цепная дробь $[a_0;\ a_1, a_2, ..., a_n]$. По построению ей можно сопоставить конечную подходящую цепную дробь $\delta_n = [a_0;\ a_1, a_2, ..., a_n]$. Тогда все дроби вида $D = [a_0;\ a_1, a_2, ..., a_n, r_n]$ для всевозможных «хвостов» r_n, где «хвост» – цепная дробь, лежат внутри отрезка $[\delta_{n-1};\ \delta_n]$, или $[\delta_n;\ \delta_{n-1}]$ в зависимости от четности n (см. рисунок). Этот факт следует из того, что четные подходящие дроби образуют возрастающую последовательность, а нечетные – убывающую последовательность [6, 7].



Здесь «хвост» r_n есть цепная дробь, представляющая любое число множества всех чисел луча $[1;\infty)$. Таким образом, если взять отрезок любой длины, как угодно малой, то на нем множество действительных чисел, для которых выполняется теорема Гаусса–Кузьмина, образует множество полной меры. Мы получаем следующий результат.

Свойство 1. Пусть $a=[a_0;\, a_1, a_2, ..., a_n, r_n]$, тогда множество действительных чисел, которые в своем разложении имеют ту же конечную часть $[a_0;\, a_1, a_2, ..., a_n]$, имеет положительную меру, и все такие числа лежат внутри отрезка $[\delta_{n-1};\, \delta_n]$ или $[\delta_n;\, \delta_{n-1}]$ для любого числа r_n из интервала $[1;\infty)$.

Пусть дана выборка рациональных чисел в виде цепных дробей (3). В этой выборке оставим только те числа, в разложении которых присутствует число натуральных чисел не ниже некоторого зафиксированного натурального n. Объединение всех таких выборок по $n = 1, 2, 3, ...,$ при $N \to \infty$ назовем рациональной решеткой. На основании свойства 1 приходим к следующему выводу.

Свойство 2. Статистика Гаусса–Кузьмина выполняется на рациональной решетке (3) построчно.

Вычислим относительную частоту натуральных чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$ в каждой строке и продолжим этот процесс при увеличении n. При увеличении числа N выборок (3) заданной длины n будут расти медленно и наблюдать статистику Гаусса–Кузьмина будет затруднительно. Поэтому логично сформулировать следующую задачу. Необходимо проверить, выполняется ли закон Гаусса–Кузьмина (4) на расширяющейся рациональной решетке (3), если относительные частоты натуральных чисел на этой решетке вычислять не по строкам, а по столбцам.

Вопрос численной экспериментальной проверки закона (4) Гаусса–Кузьмина ставился В.И. Арнольдом в работе [7]. Однако вопрос о репрезентативности выборки рациональной решетки, аппроксимирующей репрезентативную выборку действительных чисел, на которой выполняется закон Гаусса–Кузьмина, в работе [7] не обсуждался.

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПО СТОЛБЦАМ РАЦИОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Для вычислений относительных частот натуральных чисел $1,2,3,4,5,6,7$ по столбцам рациональных решеток (3) вначале убедимся в «хорошей» равномерности выборки рациональных чисел вида $\frac{p}{q} \le 1$ при $q \le N = 100$ и $N = 500$ в интервалах $[0;0,1]$, $(0,1;0,2]\ldots$, $(0,9;1]$ отрезка $[0,1]$. Указанная равномерность выборки рациональных чисел при $N = 100$ и $N = 500$ отражена в табл. 1, где $\frac{N(J_k)}{N}$ обозначает относительную частоту рациональных чисел, попадающих в интервалы j_k, $k = 0,1,2,3,...,9$.

Таблица 1

Равномерности выборки рациональных чисел

J	$\frac{N(J_k)}{N}$ $N=100$	$\left(0,1-\frac{N(J_k)}{N}\right)\%$ $N=100$	$\frac{N(J_k)}{N}$ $N=500$	$\left(0,1-\frac{N(J_k)}{N}\right)\%$ $N=500$
J_0	0,0999343	0,006575	0,0999921	0,00079
J_1	0,1005917	–0,059172	0,0999527	0,00473
J_2	0,0999343	0,006575	0,1000315	–0,00315
J_3	0,0999343	0,006575	0,1000184	–0,00184
J_4	0,0999343	0,006575	0,1000053	–0,00053
J_5	0,0999343	0,006575	0,1000053	–0,00053
J_6	0,0999343	0,006575	0,1000184	–0,00184
J_7	0,0999343	0,006575	0,1000315	–0,00315
J_8	0,1005917	–0,059172	0,0999527	0,00473
J_9	0,0999343	0,006575	0,0999921	0,00079

Для рациональных решеток (3), соответствующих двум случаям: $N = 100$ и $N = 500$ в интервалах $[0;0,1]$, $(0,1;0,2]\ldots$, $(0,9;1]$ отрезка $[0,1]$ выборки рациональных чисел, которые приведены в табл. 1, вычислены относительные частоты натуральных чисел m по столбцам. Относительные частоты для чисел $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и их относительные погрешности к статистике Гаусса–Кузьмина приведены в табл. 2.

Таблица 2

Относительных частот и их погрешности статистики Гаусса–Кузьмина

$N = 100$

m	Вероятность Гаусса–Кузьмина	Относительные частоты	Относительные погрешности в %
1	0,42503745	0,52677558	26,90843
2	0,16992500	0,19465649	14,55436
3	0,09310940	0,10687023	14,77920
4	0,05889369	0,06488550	10,17394
5	0,04064199	0,04580153	12,69511
6	0,02974734	0,03435115	15,47635
7	0,02272008	0,02671756	17,59448

$N = 500$

m	Вероятность Гаусса–Кузьмина	Относительные частоты	Относительные погрешности в %
1	0,42503745	0,53832005	29,70396
2	0,16992500	0,19880442	16,99539
3	0,09310940	0,10269773	10,29792
4	0,05889369	0,06345800	7,77501
5	0,04064199	0,04261189	4,84698
6	0,02974734	0,03065604	3,05471
7	0,02272008	0,02345187	3,22091

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты относительной погрешности, приведенные в табл. 2, показывают, что закон Гаусса–Кузьмина (4) на столбцах рациональной решетки (3) начинает проявляться для натуральных $m = 4, 5, 6, 7$ начиная с рациональных чисел вида $\frac{p}{q} \le 1$ при $q \le N = 500$ на интервалах $[0; 0,1], (0,1; 0,2] \ldots, (0,9; 1]$

отрезка $[0,1]$. Для натуральных $m = 1, 2, 3$ реализация закона Гаусса–Кузьмина требует привлечения рациональных решеток (3), представляющих числа вида $\frac{p}{q} \le 1$ при $q \le N$ с более большими значениями натуральных N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чупрунов Е.В., Хохлов А.Ф., Фаддеев М.А.* Основы кристаллографии. – М.: Физматлит, 2006. – 500 с.

2. *Загальская Ю.Г., Литвинская Г.П.* Геометрическая кристаллография. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 164 с.

3. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. – М.: Физматлит, 2004. – 584 с.

4. *Яглом И.М., Ашкинузе В.Г.* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. – М.: Учпедгиз, 1962. – 245 с.

5. *Селезнев В.А.* О новом алгоритме вычисления цепных дробей и его применении // Интеллектуальный анализ сигналов, данных и знаний: методы и средства: сборник статей Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – С. 214–217.

6. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 111 с.

7. *Арнольд В.И.* Цепные дроби. – 2-е изд., стер. – М.: Изд-во МЦМНО, 2009. – 40 с.

Селезнев Вадим Александрович, доктор физико-математических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – геометрические структуры в фазовых пространствах процессов переноса. Имеет более 114 публикаций. E-mail: seleznev@corp.nstu.ru

Бектемиров Илхом Тлеубергенович, специалист по математическому анализу, 2004–2010 гг. – кафедра «Математический анализ» физико-математического факультета Каракалпакского государственного университета (КГУ) им. Бердаха. С 2010 по 2014 г. ассистент Каракалпакского государственного университета. С 2015 г. аспирант кафедры инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области геометрических методов в задачах математической физики. Имеет 7 публикаций. E-mail:_ilkhom.bektemirov@inbox.ru

DOI: 10.17212/2307-6879-2019-1-114-122

About statistics of Gauss–Kuzmin for chain cracks*

I.T. Bektemirov[1], V.A. Seleznev[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department engineering mathematics. E-mail: ilkhom.bektemirov@inbox.ru*

[2] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: seleznev@corp.nstu.ru*

The theory of mathematical modeling of the growth of crystal structures is currently far from complete. The reason for this is the lack of an appropriate geometric apparatus. Information about the geometric structure of crystalline structures is descriptive [1], [2] and affine geometry [3], [4] is the main tool for representing the structure of crystals. In [5], a geometric model is presented, the purpose of which is to construct flat lattice structures simulating two-dimensional crystal structures. The geometric apparatus for the transformation of lattice structures given in [5] is based on the representation of finite continued fractions by unimodular matrices and claims to build a model for the growth of flat crystals. In the representation of unimodular matrices whose composition imitates the growth of flat crystals, the Weiss parameters of flat crystals are used. This fact allows us to explain why the parameters of Weiss, as a rule, are natural numbers $1, 2, 3, 4, 5, 6,$ less often $7, 8,$ and practically these natural numbers use the found sets of Weiss parameters. The explanation is that natural numbers forming continued fractions are subject to certain Gauss–Kuzmin statistics, and numerical verification of these statistics will make it possible to establish mathematical regularities in the growth of crystal structures. This paper presents the rationale and formulation of a numerical experiment on the implementation of Gauss–Kuzmin statistics.

Keywords: Gauss–Kuzmin statistics, representation of continued fractions, continued fractions

REFERENCES

1. Chuprunov E.V., Khokhlov A.F., Faddeev M.A. *Osnovy kristallografii* [Basics of crystallography]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 500 p.

2. Zagal'skaya Yu.G., Litvinskaya G.P. *Geometricheskaya kristallografiya* [Geometric crystallography]. Moscow, MSU Publ., 1973. 164 p.

3. Efimov N.V. *Vysshaya geometriya* [Higher geometry[.Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 584 p.

4. Yaglom I.M., Ashkinuze V.G. *Idei i metody affinnoi i proektivnoi geometrii* [Ideas and methods of affine and projective geometry]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1962. 245 p.

5. Seleznev V.A. [On the new algorithm for calculating continued fractions and its application]. *Intellektual'nyi analiz signalov, dannykh i znanii: metody i sredst-*

* *Received 26 November 2018.*

va: sbornik statei Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem [Intelligent analysis of signals, data and knowledge: methods and means. Collection of articles of the All-Russian scientific-practical conference with international participation]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2017, pp. 214–217. (In Russian).

6. Khinchin A.Ya. *Tsepnye drobi* [Chain fractions]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 111 p.

7. Arnol'd V.I. *Tsepnye drobi* [Chain fractions]. 2nd ed. Moscow, MCCME Publ., 2009. 40 p.

Для цитирования:

Бектемиров И.Т., Селезнев В.А. О статистике Гаусса–Кузьмина для цепных дробей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2019. – № 1 (94). – С. 114–122. – DOI: 10.17212/2307-6879-2019-1-114-122.

For citation:

Bektemirov I.T., Seleznev V.A. O statistike Gaussa–Kuzmina dlya tsepnykh drobei [About statistics of Gauss–Kuzmyn for chain cracks]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2019, no. 1 (94), pp. 114–122. DOI: 10.17212/2307-6879-2019-1-114-122.