СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2015. – № 2(80).** – 30–44

УДК 681.511.2

ДОПУСКАЕМАЯ АЛГЕБРА ЛИ ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ*

А.Н. КОРЮКИН

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, докторант. E-mail: koryukin@sibmail.ru

Групповой анализ является признанным и надежным, а порой даже единственным инструментом исследования дифференциальных уравнений как в механике, так и в других науках. Но этот инструмент довольно сложен и, видимо, по этой причине до сих пор, к сожалению, слишком мало используется в теории автоматического управления. Данная работа хоть в какой-то степени восполняет этот пробел и в целях обучения помогает сделать первый шаг в групповом анализе. Для функции $y = y(x)$ рассматривается исходное дифференциальное уравнение $\ddot{y} = 0$; его решения – это прямые на плоскости (x, y) (невертикальные). Элементы допускаемой группы решения этого уравнения переводят в такие же решения, т. е. (невертикальные) прямые плоскости (x, y) переводят в такие же прямые. Если x понимать как время, то плоскость (x, y) можно рассматривать как расширенное фазовое пространство (пространство событий). Элементы допускаемой группы одномерное прямолинейное движение переводят в такое же движение. А это уже тесно связано с таким понятием, как «инерциальные системы отсчета». Итак, поиск допускаемой группы исходного дифференциального уравнения можно понимать как синтез инерциальных систем отсчета (в том числе и криволинейных), и в данной работе эта задача решена для одномерного движения. С целью обучения групповому анализу ищется второе продолжение оператора X однопараметрической группы преобразований плоскости (x, y); для исходного дифференциального уравнения выписываются определяющие уравнения; их решают и получают дифференциальные уравнения в частных производных (на коэффициенты оператора X как на функции от x, y). Получено восьмимерное пространство операторов однопараметрических групп преобразований плоскости (x, y), допускаемых исходным дифференциальным уравнением; выписан базис этого пространства (8 операторов); для каждого из этих восьми операторов вычислена соответствующая однопараметрическая группа допускаемых преобразований плоскости (x, y).

---

* Статья получена 09 февраля 2015 г.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения**,** групповой анализ, допускаемый оператор, алгебра Ли, группа Ли, группы Ли в дифференциальных уравнениях, допускаемая алгебра Ли, допускаемая группа Ли, теория автоматического управления, синтез регуляторов

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-2-30-44

ВВЕДЕНИЕ

Усилиями всего лишь одного математика – Софуса Ли [1] – в науке созданы целые новые направления: непрерывные группы преобразований и их действие на дифференциальные уравнения. С работами Ли легче всего познакомиться по книге Яковенко Г.Н. [2].

Далее непрерывные группы преобразований «оторвались» от дифференциальных уравнений. Их стали изучать независимо от дифференциальных уравнений на основе понятия «многообразие» (это основное направление их развития). При этом подходе непрерывные группы преобразований впоследствии названы группами Ли. Для ознакомления с ними «в чистом виде» (независимо от дифференциальных уравнений) можно воспользоваться книгой [14]. Получить некоторое представление об обширной теории действия групп Ли на дифференциальные уравнения можно по монографии [15].

Непрерывные группы преобразований и их действие на дифференциальные уравнения изучали также Овсянников Л.В. [3–5] и его ученик Ибрагимов Н.Х. [6–10]. В их изложении эта тематика называется «групповой анализ дифференциальных уравнений. Групповой анализ успешно применяется как в механике, так и в теории управления [11–13].

Данная работа возникла из желания освоить групповой анализ дифференциальных уравнений. Работа помогает сделать первый шаг в групповом анализе (всем желающим изучать его). Но ориентирована в первую очередь на специалистов по теории автоматического управления (предполагается продолжение с использованием наиболее простых и распространенных регуляторов). В процессе чтения необходимые понятия группового анализа следует смотреть в [8]. Для восполнения пробелов в дифференциальных уравнениях автор пользовался книгой [16].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВТОРОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА *X*

Задача 2.2 [8, с. 24]. Вычислите допускаемую алгебру для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{y} = 0\,, \tag{1}$$

где $\ddot{y}=0$. Пусть уравнение (1) допускает однопараметрическую группу преобразований

$$x'=f(x,\ y,\ a),\quad y'=\varphi(x,\ y,\ a)$$

(то есть при переходе от переменных $(x,\ y)$ к новым переменным $(x',\ y')$ вид уравнения (1) не меняется). Рассмотрим оператор

$$X=\xi(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

этой группы, где $\xi(x,\ y)=\frac{df}{da}|_{a=0}$, $\eta(x,\ y)=\frac{d\varphi}{da}|_{a=0}$.

Введем обозначение для коэффициента ζ_1 продолжения $\underset{1}{X}$ оператора X на первую производную [8, с. 17, формула (2.19)]:

$$\underset{1}{X}=X+\zeta_1\frac{\partial}{\partial\dot{y}}$$

($\dot{y}=y_x$ – символ производной функции y по переменной x). По формуле (2.20) [8, с. 17]

$$\zeta_1=D(\eta)-\dot{y}D(\xi)$$

вычислим коэффициент ζ_1 (D – символ полного дифференцирования по x). Согласно (2) функции η, ξ зависят только от символов x, y и не зависят от символов производных $\dot{y}$, $\ddot{y}$,… . Поэтому

$$D(\eta)=\eta_x+\dot{y}\eta_y,\quad D(\xi)=\xi_x+\dot{y}\xi_y,$$

$$\zeta_1=D(\eta)-\dot{y}D(\xi)=D(\eta_x+\dot{y}\eta_y)-D(\xi_x+\dot{y}\xi_y),$$

или
$$\zeta_1=\eta_x+\dot{y}(\eta_y-\xi_x)-\dot{y}^2\xi_y\ . \tag{3}$$

Введем обозначение для коэффициента продолжения $\underset{2}{X}$ оператора $\underset{1}{X}$ на вторую производную [8, с. 17, формула (2.21)]:

$$\underset{2}{X}=\underset{1}{X}+\zeta_{11}\frac{\partial}{\partial\ddot{y}} \tag{4}$$

($\ddot{y} = y_{xx}$ – символ второй производной функции y по переменной x). По формуле (2.22) [8, с. 17]

$$\zeta_{11} = D(\zeta_1) - \ddot{y}D(\xi) \tag{5}$$

вычислим коэффициент ζ_1. Согласно (3) функция ζ_1 зависит только от x, y, $\dot{y}$ и не зависит от символов старших производных $\ddot{y}$, $\dddot{y}$,…, а функция ξ зависит только от x, y и не зависит от символов $\dot{y}$, $\ddot{y}$,… . Поэтому

$$D(\zeta_1) = D\left(\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2\xi_y\right) = D(\eta_x) + D(\dot{y}(\eta_y - \xi_x)) - D\left(\dot{y}^2\xi_y\right),$$

или

$$D(\zeta_1) = D(\eta_x) + D(\dot{y})(\eta_y - \xi_x) + \dot{y}D(\eta_y - \xi_x) - \left(D(\dot{y}^2)\xi_y + \dot{y}^2 D(\xi_y)\right). \tag{6}$$

При этом $D(\eta_x) = \eta_{xx} + \dot{y}\eta_{xy}$ (согласно (2) функция η зависит только от символов x, y и не зависит от символов производных $\dot{y}$, $\ddot{y}$,…);

$D(\dot{y}) = \ddot{y}$, $D(\dot{y}^2) = 2\ddot{y}\dot{y}$, $D(\xi_y) = \xi_{yx} + \dot{y}\xi_{yy}$ (по определению оператора D); $D(\eta_y - \xi_x) = (\eta_y - \xi_x)_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x)_y = \eta_{yx} - \xi_{xx} + \dot{y}(\eta_{yy} - \xi_{xy})$. Поэтому из формулы (6) получим

$$D(\zeta_1) = (\eta_{xx} + \dot{y}\eta_{xy}) + \ddot{y}(\eta_y - \xi_x) + \dot{y}(\eta_{yx} - \xi_{xx} + \dot{y}(\eta_{yy} - \xi_{xy})) -$$
$$-\left(2\ddot{y}\dot{y}\xi_y + \dot{y}^2(\xi_{yx} + \dot{y}\xi_{yy})\right).$$

Функция в правой части последнего равенства при фиксированных x, y является полиномом от символов производных $\dot{y}$, $\ddot{y}$. Запишем эту функцию как линейную комбинацию мономов от $\dot{y}$, $\ddot{y}$:

$$D(\zeta_1) = \eta_{xx} + \dot{y}(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + \dot{y}^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - \dot{y}^3\xi_{yy} + \ddot{y}(\eta_y - \xi_x) - 2\ddot{y}\dot{y}\xi_y.$$

Из последнего равенства, из $D(\xi) = \xi_x + \dot{y}\xi_y$ и из формулы (5) получим

$$\zeta_{11} = \eta_{xx} + \dot{y}(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + \dot{y}^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - \dot{y}^3\xi_{yy} + \ddot{y}(\eta_y - 2\xi_x) - 3\ddot{y}\dot{y}\xi_y \,. \tag{7}$$

Этим закончен вывод второго продолжения $\underset{2}{X}$ оператора X. В [8] (с. 29) приведена явная формула этого продолжения (формула (3.3")).

2. ДОПУСКАЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1)

По теореме 2.1 [8, с. 18] допускаемыми будут операторы X, для которых

$$\underset{2}{X}\, \ddot{y}\,|_{\ddot{y}=0} = 0\,. \tag{8}$$

Это условие называется определяющим уравнением.

Вычислим $\underset{2}{X}\, \ddot{y}$. Из формулы (4) видим, что $\underset{2}{X}\, \ddot{y} = \zeta_{11}$. Поэтому $\zeta_{11} = 0$ на поверхности $\ddot{y} = 0$, т. е. в правой части равенства (7) коэффициенты при мономах 1, $\dot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}^3$ равны нулю:

$$\eta_{xx} = 0\,,\ \ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0\,,\ \ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0\,,\ \ -\xi_{yy} = 0 \tag{9}$$

(правая часть равенства (7) является суммой шести мономов с коэффициентами от символов производных. Но последние два слагаемых выписывать не нужно, ведь на поверхности $\ddot{y} = 0$ они обращаются в ноль). Итак, определяющее уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений (9).

Нужно разрешить эти уравнения. Средние из них запишем в виде

$$(2\eta_y - \xi_x)_x = 0\,,\ (\eta_y - 2\xi_x)_y = 0\,,$$

или

$$2\eta_y - \xi_x = 3F(y)\,,\ \eta_y - 2\xi_x = 3G(x)$$

для некоторых функций $F(y)$, $G(x)$. Последние два равенства относительно η_y, ξ_x образуют систему двух линейных уравнений. Разрешим ее:

$$\eta_y = 2F(y) - G(x)\,,\ \ \xi_x = F(y) - 2G(x)\,. \tag{10}$$

Из первого из уравнений (9) получим $\eta_{yxx} = 0$. Отсюда и из первого из уравнений (10) получим $-G''(x) = 0$. Значит,

$$G(x) = g_0 + g_1 x \tag{11}$$

для некоторых вещественных чисел g_0, g_1. Из последнего из уравнений (9) получим $\xi_{xyy} = 0.$ Отсюда и из второго из уравнений (10) получим $F''(y) = 0.$

Значит,

$$F(x) = f_0 + f_1 y \tag{12}$$

для некоторых вещественных чисел f_0, f_1. С помощью равенств (11), (12) распишем в правых частях уравнений (10) функции $F(y)$, $G(x)$ через их коэффициенты

$$\eta_y = 2(f_0 + f_1 y) - (g_0 + g_1 x), \quad \xi_x = f_0 + f_1 y - 2(g_0 + g_1 x).$$

Проинтегрируем получившиеся равенства. Получим

$$\eta = (2 f_0 + f_1 y - (g_0 + g_1 x))y + \alpha(x), \quad \xi = (f_0 + f_1 y - (2g_0 + g_1 x))x + \beta(y) \tag{13}$$

для некоторых функций $\alpha(x)$, $\beta(y)$.

Подставим η из первого из равенств (13) в первое из уравнений (9). С учетом равенства (11) получим $\alpha''(x) = 0$. Значит,

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \text{ для некоторых вещественных чисел } \alpha_0,\ \alpha_1. \tag{14}$$

Подставим ξ из второго из равенств (13) в последнее из уравнений (9). С учетом равенства (12) получим $-\beta''(y) = 0$. Значит,

$$\beta(y) = \beta_0 + \beta_1 y \tag{15}$$

для некоторых вещественных чисел β_0, β_1. Из формул (13), (14), (15) получим окончательное выражение для η, ξ:

$$\begin{aligned} \eta &= (2 f_0 + f_1 y - (g_0 + g_1 x))y + \alpha_0 + \alpha_1 x, \\ \xi &= (f_0 + f_1 y - (2g_0 + g_1 x))x + \beta_0 + \beta_1 y. \end{aligned} \tag{16}$$

Подстановкой η, ξ из двух последних формул в каждое из уравнений (9) нетрудно убедиться, что эти уравнения выполнены. Значит, будет выполнено и определяющее уравнение (8).

Равенства (2), (16) дают возможность выписать произвольный допускаемый оператор X:

$$X = ((f_0 + f_1 y - (2g_0 + g_1 x))x + \beta_0 + \beta_1 y)\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ ((2 f_0 + f_1 y - (g_0 + g_1 x))y + \alpha_0 + \alpha_1 x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{17}$$

Эти операторы линейно зависят от восьми произвольных коэффициентов f_i, g_i, α_i, β_i ($i = 0,\ 1$). Значит, допускаемые операторы X образуют восьмимерное пространство. Последовательно приравняем один из этих коэффициентов единице, а остальные нулю, получим базис этого восьмимерного пространства.

Базис восьмимерного пространства операторов

Параметры	ξ	η	Y	X
$f_0 = 1$	$\xi = x$	$\eta = 2y$	$Y_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$	$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$
$f_1 = 1$	$\xi = yx$	$\eta = y^2$		$X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$g_0 = 1$	$\xi = -2x$	$\eta = -y$	$Y_3 = -2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$	$X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}$
$g_1 = 1$	$\xi = -x^2$	$\eta = -yx$	$Y_4 = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$	$X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$
$\alpha_0 = 1$	$\xi = 0$	$\eta = 1$		$X_5 = \partial / \partial y$
$\alpha_1 = 1$	$\xi = 0$	$\eta = x$		$X_6 = x\partial / \partial y$
$\beta_0 = 1$	$\xi = 1$	$\eta = 0$		$X_7 = \partial / \partial x$
$\beta_1 = 1$	$\xi = y$	$\eta = 0$		$X_8 = y\partial / \partial x$

В первом столбце таблицы указан коэффициент, приравненный единице. В четвертом столбце выписаны получившиеся операторы. Если в четвёртом столбце какая-то клетка не заполнена, то это оператор из пятого столбца.

Операторы Y_1, Y_3 из четвертого столбца таблицы линейными комбинациями можно привести к более простому виду. Они выписаны в пятом столбце таблицы. Их связи: $2Y_1 + Y_3 = 3X_3$, $Y_1 + 2Y_3 = -3X_1$. У оператора Y_4 просто поменяли знак. В качестве базиса восьмимерного пространства операторов выберем операторы X_i ($i = 1,\ldots, 8$).

3. ДОПУСКАЕМЫЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Для каждого из восьми операторов X по теореме Ли [8, теорема 1, с. 5] найдем его однопараметрическую группу преобразований.

Для оператора X введем обозначение для соответствующей ему локальной однопараметрической группы преобразований плоскости (x, y):

$$x' = f(x, y, a), \quad y' = \varphi(x, y, a).$$

Эти обозначения близки к [8, с. 16, формулы (2.13), (2.14)]. Так же как и в [8], считаем, что эта группа изоморфна локальной группе вещественных чисел по сложению. В частности, выполнено групповое свойство

$$f(f(x, y, a), b) = f(x, y, a+b), \quad \varphi(\varphi(x, y, a), b) = \varphi(x, y, a+b),$$

а также существует нейтральный элемент, и он равен нулю:

$$f(x, y, 0) = x, \quad \varphi(x, y, 0) = y. \tag{18}$$

По теореме Ли [8, теорема 1, с. 5] группу ищут как решение уравнений

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad \frac{d\varphi}{da} = \eta(\varphi) \tag{19}$$

с граничными условиями (18).

Сделаем это сначала для $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$. Для этого оператора, согласно (2), $\xi = x,\ \ \eta = 0.$ Поэтому для оператора X_1 искомая группа удовлетворяет уравнениям $\dfrac{df}{da} = f$, $\dfrac{d}{da} = 0$. Из этих уравнений с учетом (18)

$$x' = f(x, y, a) = x \cdot \exp(a), \quad y' = \varphi(x, y, a) = y \ \text{для}\ X_1 = x\partial/\partial x. \tag{20}$$

Это растяжение переменной x.

Найдем группу для оператора $X_2 = xy\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$. Для него $\xi = xy,$ $\eta = y^2.$ По теореме Ли нужно решить уравнения (19). Они имеют вид

$$\frac{df}{da} = f\varphi, \quad \frac{d\varphi}{da} = \varphi^2. \tag{21}$$

Из второго из этих уравнений получим $d\varphi/\varphi^2 = da$, $-1/y = a + C$. Из последнего равенства при $a = 0$ и из граничных условий (18) получим $-1/y = \text{C}$. Поэтому $-1/\varphi = a - 1/y$, $1/\varphi = 1/y - a = \dfrac{1-ay}{y}$, $\varphi = \dfrac{y}{1-ay}$.

Теперь из первого из уравнений (21) получим $\dfrac{1}{f}\dfrac{df}{da} = \varphi$, или $d(\ln f) = \dfrac{y}{1-ay}$, $\ln f = \displaystyle\int \frac{y \cdot da}{1-ay}$, или $\ln f = -\ln(1-ay) + C$. Отсюда при $a = 0$ из первого из граничных условий (18) получим $\ln x = \text{C}$. Теперь $\ln f = -\ln(1-ay) + \ln x = \ln\dfrac{x}{1-ay}$, или $f = \dfrac{x}{1-ay}$. Итак,

$$x' = f(x,\ y,\ a) = \frac{x}{1-ay},\quad y' = \varphi(x,\ y,\ a) = \frac{y}{1-ay} \ \text{для}\ X_2\,. \qquad (22)$$

Найдем группу для оператора $X_3 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Для него, согласно (2), $\xi = 0$, $\eta = y$. Поэтому по теореме Ли для оператора X_3 искомая группа удовлетворяет уравнениям (19) $\dfrac{df}{da} = 0$, $\dfrac{d\varphi}{da} = \varphi$. Из этих уравнений с учетом (18) получим

$$x' = f(x,\ y,\ a) = x,\quad y' = \varphi(x,\ y,\ a) = y \cdot \exp(a) \ \text{для}\ X_3 = y\partial/\partial y\,. \qquad (23)$$

Это растяжения переменной y.

Найдем группу для оператора $X_4 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$. Согласно (2) $\xi = x^2$, $\eta = xy$. Поэтому по теореме Ли для оператора X_4 искомая группа удовлетворяет уравнениям (19)

$$\frac{df}{da} = f^2,\quad \frac{d\varphi}{da} = f\varphi\,. \qquad (24)$$

Из первого из этих уравнений получим $\dfrac{df}{da}\Big/ f^2 = 1$, $\dfrac{d}{da}\left(-\dfrac{1}{f}\right) = 1$, $-1/f = a + C$. Из последнего равенства при $a = 0$ с учетом (18) получим $-1/x = C$. Значит, $-1/f = a - 1/x$, $1/f = \dfrac{1}{x} - a = \dfrac{1-ax}{x}$, $f = \dfrac{x}{1-ax}$.

Теперь из второго уравнения (24) получим $\dfrac{1}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{da} = f$, $\dfrac{d}{da}(\ln\varphi) = f$, $\dfrac{d}{da}(\ln\varphi) = \dfrac{x}{1-ax}$, $\ln\,\varphi = \int\dfrac{x\cdot da}{1-ax}$, $\ln\,\varphi = -\ln(1-ax) + C$. Из последнего равенства при $a = 0$ с учетом (18) получим $\ln y = C$. Значит,

$$\ln\varphi = -\ln(1-ax) + \ln y = \ln\frac{y}{1-ax},\quad \varphi = \ln\frac{y}{1-ax},$$

$$x' = f(x,\, y,\, a) = \frac{x}{1-ax},\quad y' = \varphi(x,\, y,\, a) = \frac{y}{1-ax} \text{ для } X_4. \tag{25}$$

Заметим, что для оператора X_4 его группа вычислена в [8] (пример 1.5 на с. 6 и формулы (1.9) из [8] на с. 7).

Вычислим теперь группу оператора $X_5 = \partial/\partial y$. Для него $\xi = 0$, $\eta = 1$. Поэтому по теореме Ли для оператора X_5 искомая группа удовлетворяет уравнениям (19) $df/da = 0$, $d\varphi/da = 1$. Отсюда с учетом (18) получим $f = x$, $\varphi = a + y$. Итак,

$$x' = f(x,\, y,\, a) = x,\quad y' = \varphi(x,\, y,\, a) = y + a \text{ для } X_5 = \partial/\partial y. \tag{26}$$

Это сдвиг (смещение) базовой координаты y.

Вычислим группу оператора $X_6 = x\dfrac{\partial}{\partial y}$. Для него $\xi = 0$, $\eta = x$. По теореме Ли группа оператора удовлетворяет уравнениям (19) $\dfrac{df}{da} = 0$, $\dfrac{d\varphi}{da} = f$. Отсюда с учетом (18) получим $f = x$, $\varphi = ax + y$. Итак,

$$x' = f(x,\, y,\, a) = x,\quad y' = \varphi(x,\, y,\, a) = y + ax \text{ для } X_6 = x\partial/\partial y. \tag{27}$$

Это «сдвиг скорости» $\dot{y}$.

Вычислим группу оператора $X_7 = \partial / \partial x$. Для него $\xi = 1$, $\eta = 0$. Поэтому по теореме Ли группа оператора удовлетворяет уравнениям (19): $\frac{df}{da} = 1$, $\frac{d\varphi}{da} = 0$. Отсюда с учетом (18) получим $f = a + x$, $\varphi = y$.

$$x' = f(x, y, a) = x + a, \quad y' = \varphi(x, y, a) = y \text{ для } X_7 = \partial / \partial x. \tag{28}$$

Вычислим группу оператора $X_8 = y\partial / \partial x$. Для него $\xi = y$, $\eta = 0$. По теореме Ли группа оператора удовлетворяет уравнениям (19), которые сейчас имеют вид: $df / da = \varphi$, $d\varphi / da = 0$. С учетом (18) получим $\varphi = y$, $f = ay + x$. Итак,

$$x' = f(x, y, a) = x + ay, \quad y' = \varphi(x, y, a) = y \text{ для } X_8 = y\partial / \partial x. \tag{29}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения уравнения $\ddot{y} = 0$ – это прямые на плоскости (x, y) (невертикальные). Элементы допускаемой группы решения этого уравнения переводят в такие же решения, т. е. (невертикальные) прямые плоскости (x, y) переводят в такие же прямые.

Если x понимать как время, то плоскость (x, y) можно рассматривать как расширенное фазовое пространство (пространство событий). На этой плоскости невертикальные прямые являются в точности «мировыми линиями» для одномерного прямолинейного движения. И элементы допускаемой группы одномерное прямолинейное движение переводят в такое же движение. А это уже тесно связано с таким понятием, как «инерциальные системы отсчета».

Итак, поиск допускаемой группы (уравнение (1)) можно понимать как синтез инерциальных систем отсчёта (в том числе и криволинейных), и в данной работе эта задача решена для одномерного движения.

Далее в рамках рассматриваемой в статье задачи предполагается ответить на следующие вопросы.

1. Для каждой из восьми найденных однопараметрических групп преобразований проверить, действительно ли это локальная группа, изоморфная вещественным числам по сложению. Посмотреть, действительно ли она сохраняет исходное уравнение (1). Увидеть смысл (что значит, что эта однопараметрическая группа сохраняет исходное уравнение). Продолжается ли каждая из этих групп на все значения параметра a?

2. Восьмимерное пространство операторов устойчиво при замене x, y друг на друга. Что это значит?

3. Вычислить таблицу умножения для операторов X. Действительно ли коммутаторы операторов являются линейными комбинациями этих операторов? Как устроена эта восьмимерная алгебра Ли? Будет ли она полупростой? Простой? Нильпотентной? Разрешимой? Какой у нее радикал? Какой в ней смысл (для исходного уравнения)?

4. Найти восьмимерную группу Ли, соответствующую этой восьмимерной алгебре Ли. Как она устроена? Будет ли она полупростой? Простой? Нильпотентной? Разрешимой? Какой у нее радикал? Какой смысл в этой группе (то есть как понимать, что группа сохраняет исходное уравнение)? Каждый ли из элементов этой группы продолжается на все значения параметра a? Совпадает ли эта группа с локальной группой достаточно гладких преобразований плоскости, которые прямые переводят в прямые. Как непосредственно вычислить последнюю локальную группу (без группового анализа)?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lie S.* Vorlesungen über continuerliche Gruppen. – Leipzig: Teubner, 1893. – 805 с.

2. *Яковенко Г.Н.* Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие. – М.: Физматкнига, 2006. – 108 с.

3. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 304 с.

4. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 640 с.

5. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1962. – 239 с.

6. *Овсянников Л.В.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. – 131 с.

7. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

8. *Ибрагимов Н.Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. – 59 с.

9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

10. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 47 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Математика. Кибернетика; № 8).

11. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1991. – 48 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Математика. Кибернетика; № 7).

12. *Ибрагимов Н.Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности: пер. с англ. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Физматлит, 2012. – 332 с.

13. *Яковенко Г.Н.* Групповые свойства динамических систем. Конечномерный случай. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 137 с.

14. *Яковенко Г.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2002. – № 3. – С. 40–83. – URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j095.pdf (дата обращения: 20.06.2015).

15. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 264 с. – (Математика).

16. *Степанов В.В*. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 468 с.

Корюкин Анатолий Николаевич **–** старший научный сотрудник Института математики СО РАН, докторант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета, кандидат физико-математических наук. Основные направления исследований: теория ассоциативных некоммутативных колец, математические основы теории автоматического управления. Имеет более 50 научных работ. E-mail: koryukin@ngs.ru

The allowed Li's algebra for rectilinear uniform motion[1*]

A.N. Koryukin

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, Ph. D. (Phys & Math), senior research worker. E-mail: koryukin@sibmail.ru

The group analysis is recognized and reliable, and at times even the only instrument of research of the differential equations both in mechanics, and in other sciences. But this tool is quite difficult, and probably for this reason still unfortunately is too little used in the theory of automatic control. This work though to some extent meets this lack, and for training helps to take the first step in the group analysis. For the $y = y(x)$ function, the initial differential equation is considered; its decisions are straight lines on the plane (x, y) (not vertical). Elements of the allowed group of the solution of this equation transfer to the same decisions, that is (not the vertical) direct planes (x, y) transfer to the same straight lines. If x to understand as time, the plane (x, y) it is possible to consider as expanded phase space (space of events). On this

[*] *Received 09 February 2015.*

plane (not vertical) straight lines are in the accuracy «world lines» for the one-dimensional rectilinear movement. And elements of the allowed group transfer the one-dimensional rectilinear movement to the same movement. And it is already closely connected with such concept as «inertial reference systems». So, search of the allowed group of the initial differential equation can be understood as synthesis of inertial reference systems (that number and curvilinear), and in this work this task is solved for the one-dimensional movement. For the purpose of training in the group analysis, the second continuation of the operator X of one-parametrical group of transformations of the plane is looked for (x, y); for the initial differential equation the defining equations are written out; they are solved and receive the differential equations in private derivatives (on coefficients of the operator X as on function from x, y). The eight-measured space of operators of one-parametrical groups of transformations of the plane (x, y), allowed by the initial differential equation is received; the basis of this space (8 operators) is written out; for each of these eight operators the relevant one-parametrical group of the allowed transformations of the plane is calculated (x, y). Educational.

Keywords: differential equations, the group analysis, the allowed operator, Lie's algebra, Lie's group, Lie's groups in the differential equations, the allowed Lie's algebra, the allowed Lie's group, the theory of automatic control, synthesis of regulators

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-2-30-44

REFERENCES

1. Lie S. *Vorlesungen uber continuerliche Gruppen*. Leipzig, Teubner, 1893. 805 p.

2. Yakovenko G.N. *Differentsial'nye uravneniya s fundamental'nymi resheniyami: Sofus Li i drugie* [Differential equations with fundamental solutions: Sophus Lie et al.]. Moscow, Fizmatkniga Publ., 2006. 108 p.

3. Warner F.W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1983. ix, 271 p. (Russ. ed.: Uorner F. *Osnovy teorii gladkikh mnogoobraziii i grupp Li*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1987. 304 p.).

4. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations*. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1986. xxvi, 497 p. (Russ. ed.: Olver P. *Prilozhenie grupp Li k differentsial'nym uravneniyam*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1989. 640 p.).

5. Ovsyannikov L.V. *Gruppovye svoistva differentsial'nykh uravnenii* [Group properties of differential equations]. Novosibirsk, SB RAS Publ. House, 1962. 239 p.

6. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po teorii gruppovykh svoistv differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the theory of group properties of differential equations]. Novosibirsk, NSU Publ., 1966. 131 p.

7. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 399 p.

8. Ibragimov N.Kh. *Gruppovye svoistva nekotorykh differentsial'nykh uravnenii* [Group properties of some differential equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian Branch, 1967. 59 p.

9. Ibragimov N.Kh. *Gruppy preobrazovanii v matematicheskoi fizike* [Groups of transformations in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 280 p.

10. Ibragimov N.Kh. *Azbuka gruppovogo analiza* [Alphabet of the group analysis]. Moscow, Znanie Publ., 1989. 47 p.

11. Ibragimov N.Kh. *Opyt gruppovogo analiza obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [An attempt at group analysis of ordinary differential equations]. Moscow, Znanie Publ., 1991. 47 p.

12. Ibragimov N.Kh. *A practical course in differential equations and mathematical modelling. Classical and new methods. Nonlinear mathematical models. Symmetry and invariance principles*. Beijing, Singapore, Higher Education Press and World Scientific, 2010. xiv, 348 p. (Russ. ed.: Ibragimov N.Kh. *Prakticheskii kurs differentsial'nykh uravnenii i matematicheskogo modelirovaniya. Klassicheskie i novye metody. Nelineinye matematicheskie modeli. Simmetriya i printsipy invariantnosti*. Translated from English. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 332 p.).

13. Yakovenko G.N. *Gruppovye svoistva dinamicheskikh sistem. Konechnomernyi sluchai* [Group properties of dynamic systems. Finite-dimensional case]. Moscow, MFTI Publ., 1994. 137 p.

14. Yakovenko G.N. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya i sistemy s upravleniem – sravnitel'nyi gruppovoi analiz [Ordinary differential equations and control systems – comparative group analysis]. *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya – Differential Equations and Their Applications*, 2002, no. 3, pp. 40–83. Available at: http://www.neva.ru/journal (accessed 20.06.2015).

15. Yakovenko G.N. *Teoriya upravleniya regulyarnymi sistemami* [Control theory for regular systems]. Moscow, Binom. Laboratoriya znanii Publ., 2008. 264 p.

16. Stepanov V.V. *Kurs differentsial'nykh uravnenii* [Course of differential equations]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953. 468 p.