СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2015. – № 2(80).** – 56–67

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УСТРОЙСТВ

УДК 536.21:519.632.4:519.642.2

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДВУМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН*

С.А. СИВАК

630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры прикладной математики НГТУ. E-mail: siwakserg@mail.ru

В данной статье рассмотрен вопрос моделирования распределения тепла в пластинах. С целью экономии вычислительных ресурсов вместо моделирования теплового поля в трехмерном объекте предлагается проводить вычисления в его двумерном аналоге при условии малых размеров конструкции вдоль некоторого направления. Предполагается, что толщина пластины достаточно мала, чтобы считать температуру пластины не зависящей от параметра толщины. В качестве метода моделирования в статье рассматривается метод конечных элементов. Для оценки погрешности такого приближения теории используется полученная эмпирическим путем оценка, краткое обоснование которой присутствует в данной статье. Серией тестов проверяется возможность использования данной оценки в качестве достаточного условия применимости теории тонких пластин. Тесты заключаются в сравнении результатов двумерного и трехмерного МКЭ моделирований прямоугольной пластины, при этом учитывается влияние сеточной погрешности. Подробно аналитические расчеты для тонких пластин были рассмотрены в работе Карслоу и Еггера, однако оценка погрешности такого приближения не приводилась.
Знание распределения тепла в тонкой пластине позволяет не только экономить вычислительное время и используемую программой память, но также позволяет получить исходные данные для расчета тепловых деформаций пластинчатых тонкостенных конструкций, моделируемых в задачах механики. Задача изгиба пластин рассматривается, например, Зенкевичем и Тэйлором. Данные о распределении температуры можно использовать для выяснения деформаций пластин независимо от используемой гипотезы (как то гипотеза Кирхгофа или гипотеза толстых оболочек).
В частности, теорию тонких пластин можно применить для расчета плоских нагревательных элементов, проводить расчеты для лопаток турбин и других тонкостенных конструкций, для которых оценка погрешности теории тонких пластин достаточно мала.

* Статья получена 20 марта 2015 г.

Ключевые слова: тонкие пластины, оценка погрешности, уравнение теплопроводности, усреднение температуры, метод конечных элементов, численные эксперименты, теплопроводность, мощность объемного источника, краевые условия, дифференциальное уравнение

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-2-56-67

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие пластины в контексте тепловых задач рассматривались в трудах [1, 10]. В [1] основной гипотезой для рассмотрения тонких пластин является допущение о неизменности температуры по толщине пластины. Последнее предполагало малую толщину пластины, однако оценки погрешности такого допущения в трудах [1, 10] не приводится. В данной статье такая оценка представлена.

Актуальность данной статьи в использовании ее результатов для учета погрешности в теории термоупругости [8] применительно к тонким пластинам. Поскольку деформации растут с ростом температуры нагрева, необходимо знать, в каких пределах меняется температура для определения погрешности изгибов пластин.

Задачи с тонкими пластинами, рассматриваемыми в теории упругости и устойчивости, активно решаются методом конечных элементов (МКЭ); в работах [2–7, 9] изложены различные подходы к решению таких задач. Данные методы можно успешно сочетать с изложенным методом решения тепловых пластинчатых задач при учете термоупругости.

Так же, как будет видно из изложенного, оценка погрешности такого приближения позволяет определить целесообразность дробления сетки по толщине пластинчатой конструкции, в том числе и для трехмерной МКЭ-реализации тепловых задач.

1. УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Получим уравнения для пластинчатой задачи сведением к ней трехмерной задачи. Пусть наше тело V является пластиной, лежащей в плоскости OXY и обладающей некоторой толщиной вдоль направления OZ. Общее уравнение теплового баланса имеет вид

$$-\mathrm{div}(\lambda \cdot \mathrm{grad} U) = P, \tag{1}$$

где U – температура пластины, λ – коэффициент теплопроводности, P – объемная плотность источников тепла пластины, от z не зависит.

Кроме того, заданы краевые условия третьего рода:

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=a} = -H_1\left(U|_{z=a} - u_0\right), \quad -\lambda \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=-a} = -H_2\left(U|_{z=-a} - u_0\right), \tag{2}$$

где H_1 и H_2 – коэффициенты теплоотдачи, которые могут зависеть от x и y; u_0 – температура окружающей среды; $2a$ – толщина пластины. Для остальных участков границы предполагается задание первых или вторых краевых условий.

Функция U в нашей задаче зависит от трех координат: x, y, z. Сведем задачу к поиску функции, которая от переменной z не зависит. Определим функцию усреднения следующим образом:

$$\langle U \rangle := \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} U(x, y, z)\,dz. \tag{3}$$

Проинтегрировав уравнение (1) по z и подставив (2), получим следующее выражение:

$$\int_{-a}^{a} \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U)\,dz = \int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right\}dz =$$

$$= 2a\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x}\right) + 2a\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}\right) - H_1 U|_{z=a} - H_2 U|_{z=-a} +$$

$$+ (H_1 + H_2)u_0 = -2a\,\langle P \rangle = -2aP. \tag{4}$$

В нашей гипотезе тонких пластин будем предполагать, что температура по OZ существенно не меняется, а именно:

$$\langle U \rangle \approx U|_{z=-a} = U|_{z=a} = u\,. \tag{5}$$

Получим уравнение относительно u [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{H_1 + H_2}{2a}\left(u - u_0\right) = P\,. \tag{6}$$

Если вместо краевых условий (2) задать краевые условия второго рода в виде

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=a} = F_1, \quad -\lambda \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=a} = F_2\,, \tag{7}$$

где F_1 и F_2 – это плотности теплового потока на поверхности пластины (от z, очевидно, не зависят), то в этом случае, аналогично (6), получим уравнение теплового баланса и для этих краевых условий:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right)=P+\frac{F_1+F_2}{2a}\,. \tag{8}$$

Краевая задача для уравнения (8) отличается от краевой задачи (6) тем, что решение u задачи (8) равно $\langle U\rangle$ точно, поскольку операторы линейны и на боковых поверхностях нет краевых условий третьего рода.

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В МОДЕЛИ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ СИММЕТРИЧНЫХ ВТОРЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В данной части статьи предполагается, что краевые условия заданы симметрично, т. е. $F_1=F_2=F$. Предполагается, что F на поверхности пластины не меняет знак. Пусть $F>0$.

Оценим разность функции температуры трехмерного тела U и решения u задачи (8). Введем обозначение:

$$\sigma:=U-\langle U\rangle\,. \tag{9}$$

Предполагая для функции U выполнение краевых условий (7), подстановкой в краевые $F_1=F_2=F$ вычислим от этой разности дифференциальный оператор задачи (1):

$$-\operatorname{div}(\lambda\cdot\operatorname{grad}\sigma)=-\operatorname{div}(\lambda\cdot\operatorname{grad}U)+\operatorname{div}(\lambda\cdot\operatorname{grad}\langle U\rangle)=$$

$$=P+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}\langle U\rangle\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial y}\langle U\rangle\right)=$$

$$=P+\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}U\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial y}U\right)\right\}dz=$$

$$=P-P-\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}U\right)dz=-\frac{F}{a}\,. \tag{10}$$

Пусть теперь Ω – это область плоской поверхности пластины; $\partial\Omega$ – граница области пластины, представляющая собой кривую, возможно с изломами;

n – нормаль к $\partial\Omega$, перпендикулярная боковой поверхности пластины. Аналогично, пусть Γ_z – это боковая поверхность пластины, т. е. кривая $\partial\Omega$ лежит на поверхности Γ_z.

Заметим, что функция σ обладает следующим свойством:

$$\langle\sigma\rangle = \big\langle U - \langle U\rangle \big\rangle = \langle U\rangle - \langle U\rangle = 0\,. \tag{11}$$

Кроме того, несложно видеть, что чем больше F, тем больше значение σ по модулю ввиду линейности оператора задачи (1). Будем далее полагать, что F – положительная константа. Если это не так, то в качестве F можно взять максимальное значение потока на внешней границе для получения оценки сверху.

Пусть вторые краевые условия на Γ_z для исходной задачи (1) имеют вид

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_z} = \theta\,. \tag{12}$$

Согласно предположениям относительно геометрии тела V нормаль n не зависит от z в выражении (12). Будем также полагать, что и функция правой части θ от z не зависит, тогда, интегрируя равенство по z, получаем

$$\lambda \frac{\partial\langle U\rangle}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \langle\theta\rangle = \theta\,. \tag{13}$$

Следовательно, краевое условие для σ однородно:

$$\lambda \frac{\partial\sigma}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_z} = \theta - \langle\theta\rangle = 0\,. \tag{14}$$

Рассмотрение вторых краевых условий на всей боковой границе Γ_z не случайно. Не сложно показать, что оценка σ, полученная при наличии первых однородных краевых условий на подмножестве Γ_z, не превзойдет по модулю оценки, полученной лишь для вторых однородных краевых условий.

Краевое условие на Ω для σ наследуется от краевых условий (7) для U:

$$\pm\lambda \frac{\partial\sigma}{\partial z}\bigg|_{z=\pm a} = \pm\lambda \frac{\partial(U - \langle U\rangle)}{\partial z}\bigg|_{z=\pm a} = F_1 = F_2 = F. \tag{15}$$

Краевое условие (15) и неоднородное уравнение (10) определяют краевую задачу относительно σ.

Предположим, что F положительная константа, тогда решение σ определяется просто, поскольку зависит оно только от z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)=\frac{F}{a}, \tag{16}$$

$$\sigma=\frac{F}{2a\lambda}z^2+C, \tag{17}$$

где C – произвольная постоянная. Определим постоянную C из свойства (11):

$$2a\langle\sigma\rangle=\int_{-a}^{a}\frac{F}{2a\lambda}z^2dz+2aC=0,\quad C=-\frac{Fa}{6\lambda}. \tag{18}$$

Таким образом, формула для отклонения имеет вид

$$\sigma=\frac{aF}{2\lambda}\left(\frac{z^2}{a^2}-\frac{1}{3}\right). \tag{19}$$

Из последней формулы следует, что максимальное значение по модулю погрешность принимает на поверхности пластины при $z=\pm a$.

3. ПРОВЕРКА ФОРМУЛЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ТЕПЛОВЫХ ПЛАСТИН

Проверим соблюдение нашей оценки для реальных задач. Здесь надо сразу заметить, что оценка (19) была выведена для точных решений, а не полученных численным методом, учтем этот факт:

$$|U_h-u_h|=|U_h-U+U-u+u-u_h|\le|U_h-U|+|U-u|+|u-u_h|<$$

$$<2\Delta_h+|\sigma|. \tag{20}$$

где Δ_h – оценка погрешности на вложенных сетках; h – максимальный размер шага, одинаковый для двумерной и трехмерной задачи.

При вычислении реальных оценок следует отметить, что задача решается в трехмерной и в двумерной области. Соответственно, вместо одного шага h имеем три: h_x, h_y и h_z. Но при учете оценки по Рунге сетки двумерного и трехмерного объектов разбиваются с делением шага пополам вдоль всех направлений.

Численные результаты были получены при помощи двумерной и трехмерной реализации МКЭ [2].

Перейдем к тестовым примерам.

Тест № 1. Прямоугольная пластина с заданным потоком на поверхности, равным 1 Вт/см^2, и температурой на боковой поверхности пластины, равной 1 °С. Длина, ширина и толщина пластины: 4 × 4 × 1 см. Теплопроводность λ равна 1 Вт/см и плотность объемных источников тепла P равна нулю.

В таблицах далее $\sigma_{\max,\,h}$ – максимальное отклонение, посчитанное из известных численных решений для данного шага h; σ_h – оценка, полученная с использованием правила Рунге; σ_a – аналитическая оценка погрешности; N_x, N_y – общие параметры разбиения для трёхмерной и двумерной задачи, N_z – разбиение вдоль толщины пластины. Фактическое отклонение $\sigma_{\max,\,h}$, предполагаемый максимум отклонения σ_h и аналитическая оценка для теста № 1 представлены в табл. 1. Номера таблиц отклонений и тестов совпадают далее для каждого теста.

Таблица 1

Отклонение от трехмерного решения (для теста № 1)

Число отрезков вдоль осей пластины			$\sigma_{\max,\,h}$	σ_h	σ_a
N_x	N_y	N_z			
2	2	2	0.272727	1.195246	0.1666(6)
4	4	4	0.238266	0.363786	
8	8	8	0.214042	0.215406	
16	16	16	0.166033	0.177626	
32	32	32	0.166503	0.169386	

Тест № 2. На боковой поверхности пластины задана температура, равная единице. Задан тепловой поток следующей функцией:

$$F = (x - l_x)\,x(y - l_y)\,y\Big/\left(l_x^2 l_y^2\right),$$

где l_x и l_y – длины пластины вдоль ребер, направленных перпендикулярно толщине пластины. Ноль координатной системы совпадает с углом пластины. Геометрия пластины сохранена из предыдущего теста.

Таблица 2

Отклонение от трехмерного решения (для теста № 2)

Число отрезков вдоль осей пластины			$\sigma_{\max, h}$	σ_h	σ_a
N_x	N_y	N_z			
2	2	2	0.007575	0.36920	0.1666(6)
4	4	4	0.009610	0.17438	
8	8	8	0.010082	0.16854	
16	16	16	0.010204	0.16714	
32	32	32	0.010234	0.16678	

Тест № 3. На Γ_z задана температура, равная единице. Функция потока имеет вид

$$F = 1 - \sqrt{(x - l_x)\,x(y - l_y)\,y} \Big/ (l_x l_y).$$

Таблица 3

Отклонение от трехмерного решения (для теста № 3)

Число отрезков вдоль осей пластины			$\sigma_{\max, h}$	σ_h	σ_a
N_x	N_y	N_z			
2	2	2	0.242424	1.45326	0.1666(6)
4	4	4	0.210198	0.41040	
8	8	8	0.197950	0.22124	
16	16	16	0.155773	0.17984	
32	32	32	0.142044	0.16988	

Тест № 4. На Γ_z задана температура, равная единице, кроме двух взаимно перпендикулярных границ, где заданы вторые однородные краевые условия. Функция потока имеет вид

$$F = \left(\left(\frac{x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{l_y} \right)^2 \right) 0.5 .$$

Таблица 4

Отклонение от трехмерного решения (для теста № 4)

Число отрезков вдоль осей пластины			$\sigma_{\max,\,h}$	σ_h	σ_a
N_x	N_y	N_z			
2	2	2	0.107291	1.149606	0.1666(6)
4	4	4	0.151493	0.405606	
8	8	8	0.157691	0.225963	
16	16	16	0.157922	0.181466	
32	32	32	0.157605	0.170365	
64	64	64	0.157426	0.167580	

По проведенным тестам можно сделать следующие выводы: у функции потока, заданной на Ω с выраженным максимумом в центре, реальная погрешность оказывается намного меньше теоретической оценки сверху, как это видно из теста № 2. Но при этом в тесте № 4 показана функция с выраженным максимумом на пересечении границ, где заданы вторые краевые условия и реальная погрешность оказалась гораздо ближе к теоретической оценке. Для более точной оценки следует оценить близость функции потока к константе и/или расстояние от точки экстремума до границы со вторыми краевыми условиями, что является задачей не тривиальной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка погрешности оказалась достаточно грубой оценкой сверху для ряда функций благодаря слагаемому теоретической оценки в формуле (20). Оценить относительную погрешность вычислений для пластинчатых задач, очевидно, можно только после определенного ряда вычислений, пока значащие цифры не перестанут меняться в нужном знаке.

В целом выполнение ограничения (19) с учетом (20) является сильным достаточным условием выполнения пластинчатой теории. Оценка погрешности для уравнения (6) осталась за рамками данной работы; при наличии вторых краевых условий на поверхности пластины и условия, что F положительна, можно достаточно строго обосновать выбор оценки сверху, но для уравнения (6) нельзя гарантировать строгое соблюдение знака у потока на поверхности пластины.

Найденное ограничение для готовых МКЭ решателей позволяет не только определить использование пластинчатой теории, но и вообще определить целесообразность дробления сетки вдоль толщины пластины для классического МКЭ решателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

2. *Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.* Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.

3. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. – 2-е изд., доп. и перераб. – Л.: Стройиздат, 1975. – 256 с.

4. *Авдонин А.С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969. – 405 с.

5. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

6. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

7. *Доннел Л.Г.* Балки, пластины и оболочки: пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 568 с.

8. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. – Киев: Наукова Думка, 1965. – 204 с.

9. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. – 5th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 479 p.

10. *McAdams W.H.* Heat transmission. – 3rd ed. – New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1954. – 552 p.

Сивак Сергей Андреевич – аспирант кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – численное моделирование электромагнитных полей. E-mail: siwakserg@yandex.ru

Error estimation of the two-dimensional heat problem simulation for thin plates[*]

S.A. Sivak

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, post graduate student. E-mail: siwakserg@mail.ru

The problem of heat transmission in thin plates is analyzed in this paper. For the sake of computational resource economy it is proposed to make a two-dimensional simplification of the three-dimensional problem, if the size of a three-dimensional body is small enough along a certain vector. It is supposed that the plate thickness is sufficiently small, so one can treat the temperature function to be independent of thickness. This paper considers the Finite Element Method (FEM) as a method of heat problem simulation. To estimate an error of such an approach the estimation method, obtained in an empirical way, is used, and a short rationale of this estimation is also presented in this paper. A possibility of using this estimation as a sufficient condition for the thin plates theory is verified by a series of tests. In these tests the two-dimensional FEM implementation is compared numerically with the natural three-dimensional implementation for rectangular plates numerical errors in these tests being also taken into account. Exact solutions for some simplified two-dimensional cases are analyzed in detail in the book by Carslaw and Jaeger. However, no error estimation is presented in the book.

Finding a temperature distribution in thin plates can not only save computational resources but also provides initial data for solving thermoelasticity problems of thin plates. The problem of plates bending is observed for example in the book by Zienkiewicz and Taylor. The temperature distribution can be used as initial data independently for the chosen hypotheses of the plate bending problem (like Kirchhoff's hypothesis or the hypothesis of thick plates).

In particular, thin plate theory can be used to simulate thin heating elements or simulate heating of turbine blades etc., if the error estimation of thin plates is sufficiently small.

Keywords: thin plates, error estimation, thermal equation, temperature mean value, finite element method, numerical tests, thermal conductivity, power of volume source, border values, differential equation

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-2-56-67

REFERENCES

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of heat in solids*. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1959. 517 p. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel.* Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).

2. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [Finite element method for scalar and vector-valued problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 896 p.

3. Filin A.P. *Elementy teorii obolochek* [Elements of theory of shells]. 2nd ed., enl. and rev. Leningrad, Stroiizdat Publ., 1975. 256 p.

[*] *Received 20 March 2015.*

4. Avdonin A.S. *Prikladnye metody rascheta obolochek i tonkostennykh konstruktsii* [Applied methods of calculations of shells and thin-walled constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969. 405 p.

5. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolochechnykh konstruktsii* [Statics and dynamics of thin-walled shell constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 376 p.

6. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Lineinaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Politekhnika Publ., 1991. 656 p.

7. Donnell L.H. *Beams, plates and shells*. New York, McGRAW-Hill, 1976. 453 p. (Russ. ed.: Donnel L.G. *Balki, plastiny i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 568 p.).

8. Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1965. 204 p.

9. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Vol. 2. *Solid mechanics*. 5th ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000. 479 p.

10. McAdams W.H. *Heat transmission*. 3rd ed. New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1954. 552 p.