

УДК 681.513

МОДЕЛЬ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА: ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ*

К.М. БОБОБЕКОВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматизи. E-mail: kurbon_111@mail.ru

В данной статье рассматривается вопрос разработки модели объектов типа перевернутый маятник. Приведены нелинейные и линеаризованные модели перевернутого маятника, опирающегося на цилиндр, соответствующие различным случаям, а именно при нулевой массе цилиндра с учетом и без учета момента инерции маятника. Для получения модели исследуемого объекта были составлены уравнения баланса сил по горизонтали и по вертикали для маятника и цилиндра (колеса, на которое опирается маятник). Кроме того, для маятника составляем уравнение моментов. В итоге система описывается пятью уравнениями, из которых четыре дифференциальные. Эти уравнения легко преобразуются в два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка, каждое из которых содержит по две старшие производные. Проанализированы структурные схемы модели, одна из которых включает так называемое «алгебраическое кольцо». В частном случае, когда масса цилиндра и момент инерции равны нулю, при линеаризации возникали сложности, вызванные тем, что дифференциальные уравнения вырождались в алгебраические и, следовательно, не отражали динамические свойства системы. Рассмотрены различные виды существующих линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих объект исследования с целью дальнейшего изучения системы уже как объект управления. Поэтому в данном частном случае (когда момент инерции и масса цилиндра равны нулю) учитываем нелинейные члены разложения. В результате были получены два нелинейных дифференциальных уравнения, которые при помощи моделирования в MATLAB следует исследовать.

Ключевые слова: перевернутый маятник, модель объекта, момент инерции, линеаризация, нелинейные члены, моделирование, стабилизация, положение маятника, MATLAB

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-3-21-42

* Статья получена 13 мая 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы управления производственными процессами на основе компьютерных технологий получили распространение на большинстве промышленных предприятий. Период с 80-х годов XX века до настоящего времени характеризуется широким использованием в различных областях науки и техники интеллектуальных систем управления.

Перевернутый маятник представляет собой маятник, который имеет центр массы выше своей точки опоры. Часто точка опоры, которая может перемещаться по горизонтали, закрепляется на цилиндре (колесо). В качестве одного из распространенных примеров анализа и синтеза систем управления берут перевернутый маятник на цилиндре, на тележке и т. д. В данной статье мы рассмотрим перевернутый маятник на цилиндре малого радиуса. Во-первых, дифференциальные уравнения, содержащие вторые производные положения и угла наклона маятника; во вторых, в каждом уравнении остается по одной «старшей производной», и, как следствие, эти уравнения удобны в расчетах и моделировании. Особый интерес представляет случай, когда масса цилиндра и/или момент инерции перевернутого маятника принимаем равными нулю. Радиус цилиндра предполагается достаточно малым. Эти вопросы рассмотрены в данной статье.

1. МОДЕЛЬ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим перевернутый маятник на цилиндре (рис. 1): M – масса цилиндра; m – масса маятника; s – координата центра тяжести цилиндра (по горизонтальной оси – расстояние от центра тяжести; $s + l \sin \varphi$ – координата центра тяжести маятника (по горизонтальной оси); φ – отклонение маятника от вертикали; u – сила, приложенная к цилиндру; N , P – силы, вызванные воздействием маятника на цилиндр (рис. 1, б) и воздействием цилиндра на маятник (рис. 1, в); R – реакция опоры на цилиндр; mg – вес маятника; I – момент инерции маятника относительно центра тяжести.

Составляем уравнения действующих сил.

Цилиндр: действующие силы по горизонтали

$$M\ddot{s} = u - N \quad (1)$$

и действующие силы по вертикали

$$P + Mg - R = 0. \quad (2)$$

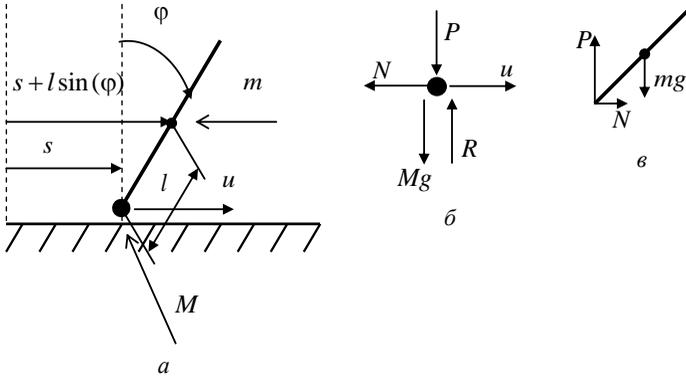


Рис. 1. Маятник на цилиндре (а), цилиндр – баланс сил (б), маятник – баланс сил (в)

Маятник – действующие силы по горизонтали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = N .$$

В последнем уравнении выполним дифференцирование и получим

$$m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = N . \tag{3}$$

Маятник – действующие силы по вертикали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = P - mg .$$

Это уравнение тоже два раза продифференцируем и получим

$$m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = P - mg . \tag{4}$$

Кручение маятника

$$I \cdot \ddot{\varphi} = Pl \sin \varphi - Nl \cos \varphi . \tag{5}$$

Система «цилиндр – маятник» описывается уравнениями (1–5).
Исключим N из уравнения (3) и подставим в уравнение (1):

$$u = M\ddot{s} + N = M\ddot{s} + m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) .$$

Перегруппируем

$$u = \ddot{s}(M + m) + m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2). \quad (6)$$

Исключим N и P из выражения (5) – возьмем их из (3) и (4) и подставим в (5):

$$P = m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg,$$

и далее

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\varphi} &= [m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg] l \sin \varphi - \\ &\quad - m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) l \cos \varphi = \\ &= -ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - \\ &\quad - m\ddot{s}l \cos \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Сократив первый и предпоследний члены, а также сгруппировав второй и последний, получим

$$\begin{aligned} -ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= 0, \\ -ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} &= -ml^2 \ddot{\varphi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -ml^2 \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Зная, что $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$,

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi \quad I \cdot \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi,$$

получим

$$(I + ml^2) \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi. \quad (7)$$

Теперь система в общем случае описывается уравнениями (6) и (7) – в них входят три переменные: управляющая переменная u , положение цилиндра s и наклон маятника φ . Эти уравнения не очень удобны для исследования, например для моделирования, так как старшие производные второго порядка входят в оба уравнения. Поэтому из этих уравнений трудно определить производные второго порядка. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, преобразуем уравнения (6) и (7).

Эти уравнения можно написать в следующем виде:

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \varphi\right) \ddot{s} + \frac{ml}{M_t L} g \sin \varphi \cos \varphi - \frac{ml}{M_t} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{M_t} u, \quad (8)$$

т. е. уравнение (6) преобразовано в (8), а уравнение (7) преобразовано в (9):

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \varphi\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{L} \sin \varphi + \frac{ml}{M_t L} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{M_t L} \cos \varphi \cdot u. \quad (9)$$

При этом предполагалось, что $M \neq 0$ и $I \neq 0$. Система «перевернутый маятник на цилиндре» после преобразований описана уравнениями (8) и (9), где $L = (I + ml^2) / ml$, $M + m = M_t$. Эти уравнения удобны для моделирования, так как в каждое из них входит по одной старшей производной.

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Ниже рассматриваем случаи, когда $M = 0$ и/или $I = 0$, которые представляют особый интерес.

2.1. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M = 0$, $I \neq 0$

Составляем уравнения действующих сил.

Цилиндр: действующие силы по горизонтали

$$0 = u - N \quad (1a)$$

и действующие силы по вертикали

$$\begin{aligned} P - R &= 0 \\ P &= R. \end{aligned} \quad (2a)$$

Маятник – действующие силы по горизонтали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = N.$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = N. \quad (3a)$$

Маятник – действующие силы по вертикали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = P - mg .$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = P - mg . \quad (4a)$$

Кручение маятника

$$I \cdot \ddot{\varphi} = Pl \sin \varphi - Nl \cos \varphi . \quad (5a)$$

Берем $u = N$ из (1a) и подставляем в (3):

$$m\ddot{s} + m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) = u . \quad (6a)$$

Аналогично общему случаю исключим N и P из (5a) – возьмем их из (3a) и (4a) и подставим в (5a), получим уравнение

$$(I + ml^2) \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi , \quad (7a)$$

полностью совпадающее с (7). Итак, при $M = 0$ система описывается уравнениями (6a) и (7a). Преобразуем их аналогично преобразованиям (6) и (7): (7a) делим на ml :

$$\left(\frac{I + ml^2}{ml} \right) \ddot{\varphi} = \frac{ml}{ml} g \sin \varphi - \frac{ml}{ml} \ddot{s} \cos \varphi ; \quad \frac{I + ml^2}{ml} = L$$

и получим

$$L\ddot{\varphi} = g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi .$$

Значение $L\ddot{\varphi}$ подставим в (6a), которое перепишем в виде

$$m\ddot{s} + (ml \cos \varphi \cdot L^{-1}) L\ddot{\varphi} - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u .$$

Следовательно,

$$m\ddot{s} + (ml \cos \varphi \cdot L^{-1})(g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi) - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u ,$$

$$m\ddot{s} + mlg \cos \varphi \sin \varphi \cdot L^{-1} - ml\ddot{s} \cos^2 \varphi L^{-1} - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u .$$

Перегруппируем

$$(m - ml \cos^2 \varphi \cdot L^{-1}) \ddot{s} - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mlgL^{-1} \sin \varphi \cos \varphi = u$$

и поделим на m :

$$\left(1 - \frac{l}{L} \cos^2 \varphi\right) \ddot{s} + \frac{l}{L} g \sin \varphi \cos \varphi - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{m} u, \quad (8a)$$

т. е. уравнение (6a) преобразовано в (8a).

Преобразуем уравнение (7a), для чего возьмем \ddot{s} из (6a):

$$m \ddot{s} = u - ml \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

и подставим в (7a):

$$(I + ml^2) \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - l \cos \varphi (u - ml \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$(I + ml^2) \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - l \cos \varphi \cdot u + ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - ml^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Полученное выражение поделим на ml :

$$\frac{I + ml^2}{ml} \ddot{\varphi} = \frac{ml}{ml} g \sin \varphi - \frac{l}{ml} \cos \varphi \cdot u + \frac{ml^2}{ml} \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{ml^2}{ml} \cos \varphi \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{I + ml^2}{ml} \ddot{\varphi} = g \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{m} u + l \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \cos \varphi \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

После деления на $(I + ml^2)/ml$ и переноса всех членов, кроме второго, в левую часть и деления на L получим

$$\left(1 - \frac{l}{L} \cos^2 \varphi\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{L} \sin \varphi + \frac{l}{L} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{mL} \cos \varphi \cdot u. \quad (9a)$$

Система «перевернутый маятник на цилиндре» в случае $M = 0$, $I \neq 0$ описана уравнениями (8a) и (9a), где $L = (I + ml^2)/ml$. Формально (8a) и (9a) можно было получить из (8) и (9) заменой M_t на m .

2.2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M \neq 0$, $I = 0$

Составляем уравнения действующих сил.

Цилиндр: действующие силы по горизонтали

$$M \ddot{s} = u - N \quad (16)$$

и действующие силы по вертикали

$$\begin{aligned} P - R &= 0, \\ P &= R. \end{aligned} \quad (25)$$

Маятник – действующие силы по горизонтали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = N.$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = N. \quad (36)$$

Маятник – действующие силы по вертикали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = P - mg.$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = P - mg. \quad (46)$$

Кручение маятника

$$0 = Pl \sin \varphi - Nl \cos \varphi. \quad (56)$$

Выразим N из (16) и подставим в (36):

$$u = M\ddot{s} + N,$$

$$\begin{aligned} u &= M\ddot{s} + N = M\ddot{s} + m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = \\ &= \ddot{s}(M + m) + m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \end{aligned}$$

$$(m + M)\ddot{s} + m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) = u. \quad (66)$$

Возьмем N и P из (36) и (46) и подставим в (56):

$$m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg = P,$$

$$\begin{aligned} 0 &= [m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg] l \sin \varphi - \\ &- m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) l \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$0 = -ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} .$$

Сократив первый и предпоследний члены, а также сгруппировав второй и последний, получим

$$\begin{aligned} -ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= 0 , \\ -ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} &= -ml^2 \ddot{\varphi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -ml^2 \cdot \ddot{\varphi} . \end{aligned}$$

Зная, что $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$,

$$0 = -ml^2 \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi .$$

После преобразований получили частный случай:

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi . \quad (76)$$

Теперь система описывается уравнениями (66) и (76). Преобразуем уравнения (66) и (76). Вначале поделим уравнение (76) на ml :

$$\frac{ml^2}{ml} \ddot{\varphi} = \frac{ml}{ml} g \sin \varphi - \frac{ml}{ml} \ddot{s} \cos \varphi ,$$

$$l\ddot{\varphi} = g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi .$$

Формально $L = (I + ml^2) / ml = l$. Значение $l\ddot{\varphi}$ подставим в (66) и учтем, что $M + m = M_t$:

$$M_t \ddot{s} + m \cos \varphi (g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi) - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u .$$

Перегруппируем

$$\left(M_t - m \cos^2 \varphi \right) \ddot{s} - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi \cos \varphi = u$$

и делим на M_t :

$$\left(\frac{M_t}{M_t} - \frac{m}{M_t} \cos^2 \varphi \right) \ddot{s} + \frac{m}{M_t} g \sin \varphi \cos \varphi - \frac{m}{M_t} l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{M_t} u ,$$

$$\left(1 - \frac{m}{M_t} \cos^2 \varphi\right) \ddot{s} + \frac{m}{M_t} g \sin \varphi \cos \varphi - \frac{m}{M_t} l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{M_t} u. \quad (8б)$$

Уравнение (8б) можно формально получить из (8), если учесть, что $L = l$.

Нужно вывести (9) но с условием, что $I = 0$. Преобразуем уравнение (7б), для чего возьмем \ddot{s} из (6б):

$$M_t \ddot{s} = u - ml \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

и подставим в (7б):

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml \cos \varphi M_t^{-1} (u - ml \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Полученное выражение делим на ml^2 :

$$\frac{ml^2}{ml^2} \ddot{\varphi} = \frac{ml}{ml^2} g \sin \varphi - \frac{ml}{ml^2} \cos \varphi \cdot M_t^{-1} (u - ml \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$\ddot{\varphi} = gl^{-1} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{M_t} l^{-1} u + \frac{m}{M_t} \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{\cos \varphi}{M_t} m \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

После переноса всех членов, кроме второго, в левую часть получим

$$\left(1 - \frac{m}{M_t} \cos^2 \varphi\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{m}{M_t} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{M_t l} \cos \varphi \cdot u. \quad (9б)$$

Уравнение (9б) можно формально получить из (9) заменой $L = l$.

Система «перевернутый маятник на цилиндре» в случае $M \neq 0$, $I = 0$ описывается уравнениями (8б) и (9б), где $M + m = M_t$.

2.3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M = 0$, $I = 0$

Составляем уравнения действующих сил.

Цилиндр: действующие силы по горизонтали

$$0 = u - N \quad (1в)$$

и действующие силы по вертикали

$$\begin{aligned} P - R &= 0, \\ P &= R. \end{aligned} \quad (2в)$$

Маятник – действующие силы по горизонтали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = N .$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = N . \quad (3в)$$

Маятник – действующие силы по вертикали

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = P - mg .$$

Продифференцируем два раза и получим

$$m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = P - mg . \quad (4в)$$

Кручение маятника

$$0 = Pl \sin \varphi - Nl \cos \varphi . \quad (5в)$$

Берем $u = N$ из (1в) и подставляем в (3в):

$$\begin{aligned} m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) &= u , \\ m\ddot{s} + m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) &= u . \end{aligned} \quad (6в)$$

Аналогично общему случаю исключим N и P из (5в) – возьмем их из (3в) и (4в) и подставим в (5в):

$$\begin{aligned} m(-l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg &= P , \\ 0 &= [m(-l \cos \varphi \cdot (\dot{\varphi})^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) + mg] l \sin \varphi - \\ &\quad - m(\ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) l \cos \varphi , \\ 0 &= -ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - ml\ddot{s} \cos \varphi + \\ &\quad + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} . \end{aligned}$$

Сократив первый и предпоследний члены, а также сгруппировав второй и последний, получим

$$-ml^2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = 0 ,$$

$$-ml^2 \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} = -ml^2 \ddot{\varphi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -ml^2 \cdot \ddot{\varphi}.$$

Зная, что $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$,

$$0 = -ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - ml \ddot{s} \cos \varphi,$$

получим

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - ml \ddot{s} \cos \varphi. \quad (7в)$$

Поделим уравнение (7в) на ml :

$$\frac{ml^2}{ml} \ddot{\varphi} = \frac{ml}{ml} g \sin \varphi - \frac{ml}{ml} \ddot{s} \cos \varphi,$$

получим

$$l \ddot{\varphi} = g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi.$$

Значение $l \ddot{\varphi}$ подставим в (6в):

$$m \ddot{s} + m \cos \varphi (g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi) - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u.$$

Открывая скобки, получим

$$m \ddot{s} + mg \sin \varphi \cos \varphi - m \ddot{s} \cos^2 \varphi - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = u.$$

Перегруппируем

$$(m - m \cos^2 \varphi) \ddot{s} - ml \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi \cos \varphi = u$$

и делим на m :

$$\left(\frac{m}{m} - \frac{m}{m} \cos^2 \varphi \right) \ddot{s} - \frac{m}{m} l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{m} g \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{m} u.$$

Зная, что $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$, запишем

$$(1 - \cos^2 \varphi) \ddot{s} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{m} u,$$

$$\sin^2 \varphi \ddot{s} + g \sin \varphi \cos \varphi - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{m} u. \quad (8в)$$

Аналогично выводу в общем случае из (6в) определяем $m\ddot{s}$:

$$m \cdot \ddot{s} = u - m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2),$$

подставляем в (7в):

$$\begin{aligned} ml^2 \cdot \ddot{\varphi} &= mgl \sin \varphi - l \cos \varphi [u - m(l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2)] = \\ &= mgl \sin \varphi - l \cos \varphi \cdot u + ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \\ ml^2 \ddot{\varphi} - mgl \sin \varphi - ml^2 \cos^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= -l \cos \varphi \cdot u, \\ ml^2 \ddot{\varphi} (1 - \cos^2 \varphi) - mgl \sin \varphi + ml^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= -l \cos \varphi \cdot u. \end{aligned}$$

Известно, что $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$. Обе части уравнения делим на ml^2 :

$$\frac{ml^2}{ml^2} \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - \frac{ml}{ml^2} g \sin \varphi + \frac{ml^2}{ml^2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{l}{ml^2} \cos \varphi \cdot u,$$

получим

$$\sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{1}{ml} \cos \varphi \cdot u. \quad (9в)$$

Получили описание системы в виде (8в) и (9в). Частный случай $M = 0$, $I = 0$ можно было получить из выражений (8) и (9) формальным приравнением нулю, т. е. $M = 0$, $I = 0$.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ

3.1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $M \neq 0$, $I \neq 0$

Линеаризацию осуществляем в окрестности точки $\varphi \approx 0$ и $\dot{\varphi} \approx 0$. В уравнениях (8) и (9) полагаем $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi = 1$, $\sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} \approx 0$:

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L}\right) \ddot{s} + \frac{ml}{M_t L} g \varphi = \frac{1}{M_t} u, \quad (10)$$

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L}\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{L} \varphi = -\frac{1}{M_t L} u. \quad (11)$$

3.2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M = 0, I \neq 0, (L = l, M_t = M + m)$

Линеаризацию осуществляем в окрестности точки $\varphi \approx 0$ и $\dot{\varphi} \approx 0$. В уравнениях (8а) и (9а) полагаем $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi = 1, \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} \approx 0$:

$$\left(1 - \frac{l}{L}\right) \ddot{s} + \frac{l}{L} g \varphi = \frac{1}{m} u, \quad (10a)$$

$$\left(1 - \frac{l}{L}\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{L} \varphi = -\frac{1}{mL} u. \quad (11a)$$

3.3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M \neq 0, I = 0$

Линеаризацию осуществляем в окрестности точки $\varphi \approx 0$ и $\dot{\varphi} \approx 0$. В уравнениях (8б) и (9б) полагаем $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi = 1, \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} \approx 0$:

$$\left(1 - \frac{m}{M_t}\right) \ddot{s} + \frac{m}{M_t} g \varphi = \frac{1}{M_t} u, \quad (10б)$$

$$\left(1 - \frac{m}{M_t}\right) \ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \varphi = -\frac{1}{M_t l} u. \quad (11б)$$

3.4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M = 0, I = 0$

Линеаризацию осуществляем в окрестности точки $\varphi \approx 0$ и $\dot{\varphi} \approx 0$. В уравнениях (8в) и (9в) полагаем $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi = 1, \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} \approx 0$:
из уравнения (8в)

$$g \varphi = \frac{1}{m} u, \quad (10в)$$

из уравнения (9в)

$$-\frac{g}{l} \varphi = -\frac{1}{ml} u. \quad (11в)$$

Уравнения (10в) и (11в) нелинейные и алгебраические, поэтому они непригодны для моделирования. Эти уравнения рассмотрим в следующем разделе.

4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $M = 0$, $I = 0$: УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНОВ

Вернемся к уравнениям (8в) и (9в). Вспомним степенные ряды и формулу двойного угла для синуса:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Отсюда определяем $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Для уравнения (8в) используем степенные ряды.

Для определения степенного ряда $\sin^2 \varphi$ необходимо вспомнить формулы двойных углов: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Степенной ряд для косинуса $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{4x^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{4x^2}{2} = x^2. \end{aligned}$$

Вместо x подставим φ , получим

$$\sin^2 \varphi \cdot \ddot{s} \approx \varphi^2 \cdot \ddot{s}.$$

Известно, что

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!}.$$

С учетом вышеприведенных соотношений

$$g \sin \varphi \cos \varphi \approx g \frac{\sin 2\varphi}{2} \approx \frac{g}{2} \left(2\varphi - \frac{(2\varphi)^3}{3!} \right) \approx \frac{g}{2} \left(2\varphi - \frac{8\varphi^3}{6} \right) \approx g \left(\varphi - \frac{4\varphi^3}{6} \right),$$

$$l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \approx l \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \right) \dot{\varphi}^2 \approx l \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) \dot{\varphi}^2.$$

Из уравнения (8в) получим

$$\varphi^2 \cdot \ddot{s} + g \left(\varphi - \frac{4\varphi^3}{6} \right) - l \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{m} u. \quad (12)$$

Для уравнения (9в)

$$\sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{1}{ml} \cos \varphi \cdot u, \text{ где}$$

а)

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{4\varphi^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{4\varphi^2}{2} = \varphi^2,$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!}, \quad \sin^2 \varphi \cdot \ddot{\varphi} = \varphi^2 \cdot \ddot{\varphi};$$

б) $\frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{g}{l} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \right) = \frac{g}{l} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right);$

в) $\sin \varphi \cos \varphi \approx g \frac{\sin 2\varphi}{2} \approx \frac{g}{2} \left(2\varphi - \frac{(2\varphi)^3}{3!} \right) \approx \frac{g}{2} \left(2\varphi - \frac{8\varphi^3}{6} \right) \approx g \left(\varphi - \frac{4\varphi^3}{6} \right),$

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 &\approx \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \approx \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(2\varphi - \frac{(2\varphi)^3}{3!} \right) \approx \\ &\approx \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(2\varphi - \frac{8\varphi^3}{6} \right) \approx \dot{\varphi}^2 \left(\varphi - \frac{4\varphi^3}{6} \right); \end{aligned}$$

г) рассмотрим степенной ряд $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!}$$

и получим основное уравнение из (9в):

$$\varphi^2 \cdot \ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) + \dot{\varphi}^2 \left(\varphi - \frac{4\varphi^3}{6} \right) = - \left(\frac{1}{ml} - \frac{\varphi^2}{2ml} \right) u. \quad (13)$$

4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ $M = 0, I = 0$

Зададим параметры объекта для случая, когда $M = 0, I = 0$: $m = 70$ кг, $M = 30$ кг, $l = 1$ м, $g = 10$ м/с².

а) Для (10в):

$$\varphi^2 \cdot \ddot{s} + 10 \left(\varphi - \frac{4}{6} \varphi^3 \right) - 1 \left(\varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{70} u,$$

или

$$\varphi^2 \ddot{s} + 10\varphi - 6,66\varphi^3 - \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 0,166\varphi^3 \cdot \dot{\varphi}^2 = 0,014u,$$

откуда

$$\ddot{s} = \frac{1}{\varphi^2} (0,014u - 10\varphi + 6,66\varphi^3 + \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - 0,166\varphi^3 \cdot \dot{\varphi}^2). \quad (12^*)$$

б) Для (11в) аналогично:

$$\varphi^2 \cdot \ddot{\varphi} - \frac{10}{1} \left(\varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) + \dot{\varphi}^2 \left(\varphi - \frac{4}{6} \varphi^3 \right) = - \left(\frac{1}{70} - \frac{\varphi^2}{2 \cdot 70 \cdot 1} \right) u,$$

$$\varphi^2 \cdot \ddot{\varphi} - 10\varphi + 1,66\varphi^3 + \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - 0,66\varphi^3 \cdot \dot{\varphi}^2 = (0,0071\varphi^2 - 0,014)u,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} [10\varphi - 1,66\varphi^3 - \varphi\dot{\varphi}^2 + 0,66\varphi^3 \cdot \dot{\varphi}^2 + (0,0071\varphi^2 - 0,014)u]. \quad (13^*)$$

Схема моделирования уравнений (12*) и (13*) приведена на рис. 2.

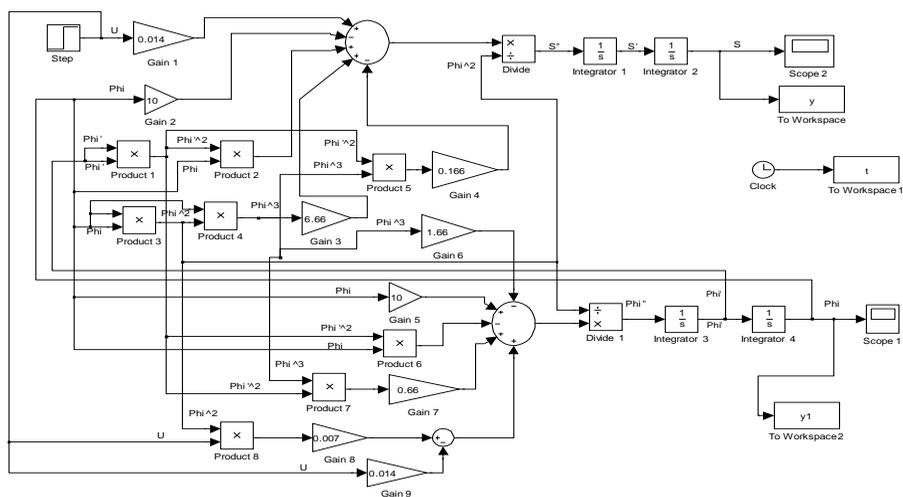


Рис. 2. Схема моделирования для частного случая $M = 0$, $I = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В литературе часто встречаются модели перевернутого маятника на цилиндре (тележке), существенно отличающиеся друг от друга. При этом выводы даются неполно и с опечатками. В данной работе подробно рассмотрен вывод модели перевернутого маятника в двух вариантах: один вариант удобен для моделирования и анализа, а другой легче получить, но труднее использовать, так как при его моделировании в структуре появляется алгебраическое кольцо. Приведены модели для частных случаев при равенстве нулю массы цилиндра (тележки) и (или) момента инерции маятника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воевода А.А. Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.
2. Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В. О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

3. Воевода А.А., Вороной В.В. Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.
4. Воевода А.А., Трошина Г.В. Оценивание параметров моделей динамики и наблюдения для линейных стационарных дискретных систем использованием информационной матрицы Фишера // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 3 (24). – С. 199–200.
5. Абденова Г.А., Воевода А.А. Оценивание параметров и характеристик шумов нестационарных процессов в стохастических системах, описываемых в пространстве состояний // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 3 (61). – С. 11–18.
6. Шоба Е.Б., Воевода А.А., Вороной В.В. Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 15–22.
7. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Координатизация системы корней вещественных многочленов малых степеней // Научный вестник НГТУ. – 2005. – № 3 (21). – С. 177–180.
8. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Координатизация системы корней вещественных многочленов степени 5 // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (22). – С. 173–176.
9. Воевода А.А., Шоба Е.В. Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.
10. Воевода А.А., Шоба Е.В. Полиномиальный метод синтеза: стабилизация перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 15–30.
11. Воевода А.А., Корюкин А.Н. Стабилизация верхнего и нижнего положений маятника при ПД регулировании с ограничением // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 1 (75). – С. 5–18.
12. Воевода А.А., Вороной В.В. Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.
13. Воевода А.А., Шоба Е.В. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза в пространстве состояний // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 1 (59). – С. 25–34.
14. Воевода А.А., Иванова А.А. О влиянии вертикальных колебаний на устойчивость перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 4 (74). – С. 5–12.
15. Воевода А.А., Вороной В.В. Об управляемости и наблюдаемости объекта «перевернутый маятник–тележка» // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 4 (70). – С. 3–12.

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, аспирант кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез систем управления для технических и технологических объектов управления. E-mail: kurbon_111@mail.ru

The model of the inverted pendulum: special cases*

К.М. Bobobekov

630073, Novosibirsk, the avenue K. Marksa, 20, the post-graduate student of Department "Automatics" of Novosibirsk state technical university. E-mail: kurbon_111@mail.ru

This article discusses the question development model of objects of type inverted pendulum. Presents nonlinear and linearized model of the inverted pendulum, based on the cylinder corresponding to the different cases, namely, the zero mass of the cylinder with and without consideration of the moment of inertia of the pendulum. To obtain a model of the object were composed of the equations of balance of forces horizontally and vertically for a pendulum and a cylinder (wheel on which the pendulum). In addition to a pendulum make up the equation of moments. As a result, the system is described by five equations, four of which are differential. These equations easily converted into two nonlinear differential equations of the second order, each of which contains the two highest derivatives. Analyzed the structural scheme of the model, one of which includes the so-called "algebraic ring". In the particular case when the mass of the cylinder and the moment of inertia equal to zero, when the linearization was difficult, due to the fact that differential equations degenerated to algebraic and, therefore, did not reflect the dynamic properties of the system. Examines various types of existing linear and nonlinear differential equations describing the research object for further study of the system already as a control object. Therefore, in this particular case (when the moment of inertia and the mass of the cylinder equal to zero) take into account the nonlinear terms of the expansion. As a result, obtained two nonlinear differential equations that using simulation MATLAB be investigated.

Keywords: the inverted pendulum, object model, moment of inertia, linearization, simulations, stabilization of the position of the pendulum, torsion pendulum

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-3-21-42

REFERENCES

1. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Two-mass system stabilization: polynomial method of two-channel system synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.

* Received 13 May 2015.

2. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoynogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, Vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian)
3. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.
4. Voevoda A.A., Troshina G.V. Otsenivanie parametrov modelei dinamiki i nablyudeniya dlya lineinykh statsionarnykh diskretnykh sistem ispol'zovaniem informatsionnoi matritsy Fishera [Parameters estimation of dynamics and supervision models for linear stationary discrete systems with use of Fischer information]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 3 (24), pp. 199–200.
5. Abdenova G.A., Voevoda A.A. Otsenivanie parametrov i kharakteristik shumov nestatsionarnykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, opisyyvaemykh v prostranstve sostoyanii [The parameters estimation and noise characteristics of time-varying]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 3 (61), pp. 11–18.
6. Shoba E.B. Voevoda A.A., Voronoy V.V., Modal'nyi sintez mnogokanal'nogo regulyatora ponizhennogo poryadka s ispol'zovaniem "obratnoi" proizvodnoi [Modal synthesis of multi-channel low-order controller using the "reverse" derivative principle for three-mass system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (46), pp. 15–22.
7. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Koordinatizatsiya sistemy kornei veshchestvennykh mnogochlenov malyykh stepeni [Coordinatization of the system roots of real polynomials of small degrees]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2005, no. 3 (21), pp. 177–180.
8. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Koordinatizatsiya sistemy kornei veshchestvennykh mnogochlenov stepeni 5 [Roots system coordinatization of real polynomials of degree 5]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 1 (22), pp. 173–176.

9. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.

10. Voevoda A.A., Shoba E.B. Polinomial'nyi metod sinteza: stabilizatsiya perevernutogo mayatnika [Polinomial method of synthesis: stabilization inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 15–30.

11. Voevoda A.A., Koryukin A.N. Stabilizatsiya verkhnego i nizhnego polozhenii mayatnika pri PD regulirovanii s ogranicheniem [Stabilization of the top and bottom provision of a pendulum at feasible soft PD-control]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 1 (75), pp. 5–18.

12. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Sintez nelineinogo regulyatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.

13. Voevoda A.A., Shoba E.B. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza v prostranstve sostoyanii [Stabilization of the two-mass system: a modal method of synthesis with using state space]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (59), pp. 25–34.

14. Voevoda A.A., Ivanova A.A. O vliyani i vertikal'nykh kolebani i na ustoychivost' perevernutogo mayatnika [About influence of vertical oscillations on stability of the inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 4 (74), pp. 5–12.

15. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Ob upravlyaemosti i nablyudaemosti ob"ekta "perevernutyi mayatnik–telezhka" [About controllability and observability of "inverted pendulum–cart"]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 4 (70), pp. 3–12.