ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2016 апрель–июнь № 2 (31)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.21

О МОДЕЛИРОВАНИИ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ МЕТОДОМ МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ

Н.С. Аркашов, В.А. Селезнев
Новосибирский государственный технический университет

К настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных данных о разнообразных процессах так называемой аномальной диффузии, для которых, в частности, дисперсия меняется нелинейным по времени образом. Разнообразные методы моделирования аномальной диффузии связаны со следующими свойствами соответствующих процессов: «сильная форма» зависимости приращений; нестационарность приращений (см., например, [1]–[4]). Известными примерами таких процессов являются модели блуждания в непрерывном времени (общепринятая аббревиатура CTRW), фрактальное (дробное) броуновское движение (см., например, [4, 5]). На сегодняшний день по всей видимости не существует форматов моделирования (см. [3]), охватывающих все указанные свойства, подобно тому как винеровский процесс является классическим форматом броуновского движения. Вопросы моделирования процессов переноса в сингулярных фазовых пространствах ставились в работах [1–4] и др., где рассматривалось моделирование процессов переноса в сплошных средах с фрактальной структурой, рассматриваемых как подмножества нулевой лебеговой и некоторой ненулевой хаусдорфовой меры. В качестве инструмента моделирования в этих работах применялся аппарат дробного интегро-дифференциального исчисления. В этой работе мы отходим от парадигмы того, что процессы переноса моделируются в сплошных средах с фрактальной структурой. В работе построено мастер-уравнение, которое позволяет моделировать процессы аномальной диффузии таким образом, чтобы учитывать одновременно фрактальную структуру последействия и корреляционные свойства процесса. Мастер-уравнение позволяет получить в качестве предельных случаев винеровский процесс и фрактальное броуновское движение. Настоящая работа является естественным продолжением цикла работ [6–9], в котором аномальность переноса массы, энергии, импульса существенно связывалась с введением сингулярных относительно меры Лебега величин.

Ключевые слова: множество Кантора, фрактальное броуновское движение, скользящие средние, аномальная диффузия, самоподобие.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

Введение

На множестве отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$ определим операцию «вырезания»

$$\mathrm{del}_q([a,b]) = [a,b]\setminus(a+(b-a)/q, b-(b-a)/q),$$

где $q>2$. Результатом этой операции является появление вместо одного отрезка пары непересекающихся отрезков.

Естественным образом распространим эту операцию на совокупность подмножеств, представимых в виде объединения конечного числа непересекающихся отрезков. Тогда определенную операцию «вырезания» можно итерировать. При каждом $q>2$ определим канторово множество S_q:

$$S_q = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{del}_q^n([0,1]).$$

Множество S_3 – классическое канторово множество. Заметим, что множество же S_2 совпадает с отрезком $[0,1]$. Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d_q = \ln 2/\ln q$ (см., например, [14]), при этом μ_{d_q} – соответствующая конечная мера Хаусдорфа (заметим, что $\mu_{d_q}(S_q) = 1$). В дальнейшем за буквой d_q закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества S_q.

Каждому множеству $S_q, 2 < q < \infty$ соответствует непрерывная и возрастающая на отрезке $[0,1]$ функция $C_q(x) = \mu_{d_q}([0,x])$, $x \in [0,1]$, называемая канторовой лестницей.

Отметим, что $C_2(t) = t$ для всех $t \in [0,1]$ и $C_\infty(t) = 1/2$ при всех $t \in (0,1)$, кроме того, $C_\infty(0) = 0$ и $C_\infty(1) = 1$ (см., например, [12]).

Пусть B и T – положительные константы. Для всех $t \in [0,T]$ обозначим $M_q(t) := 2BC_q(t/T)$.

1. Постановка задачи

Теперь перейдем к постановке основной задачи, причем для простоты изложения мы ограничимся *одномерным случайным блужданием* материальной частицы.

Пусть $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$ определяется по формуле

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{1}$$

которые являются скользящими средними исходной последовательности $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ (см. [13]). Следующее хорошо известное условие гарантирует сходимость с вероятностью первого ряда в правой части (1):

$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 < \infty. \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем условие (2) предполагается выполненным. Заметим, что если $a_0 \neq 0$ и $a_j = 0$ при всех $j \neq 0$, то последовательность $\{X_j\}$ становится последовательностью $\{a_0\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$.

Определим процесс частных сумм скользящих средних из (1):

$$S_0 := 0, S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, ...$$

Через $B_H(t)$ обозначим так называемое фрактальное броуновское движение (см. [5]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), 0 < H < 1. \tag{3}$$

Легко видеть, что случай $H=1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу. Отметим известное свойство H-однородности фрактального броуновского движения (см. [5]): для любого $\lambda>0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H(\lambda t)\}$ и $\{\lambda^H B_H(t)\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H имеет стационарные приращения.

Скорость некоторой частицы в моменты времени kT/n, $k=1,\dots,n$, обозначим через $v_n(kT/n)$, положим $v_n(0)=0$. Пусть закон изменения импульса частицы единичной массы имеет вид

$$\Delta v_n(kT/n)=n^{1-H}\sum_{i=0}^{k-1}\Delta X_{k-i}\Delta M_{q,n}(iT/n), \tag{4}$$

где $\Delta X_k=X_{k+1}-X_k$, $k=1,\dots$, $\Delta X_1=X_1$ и $\Delta v_n(t)=v_n(t+T/n)-v_n(t)$, $\Delta C_{q,n}(t)=C_q(t+T/n)-C_q(t)$.

Представление (4) является кинетическим уравнением, описывающем эволюцию некоторой системы во времени с последействием, имеющем фрактальную структуру. Соотношение (4) назовем *мастер-уравнением*.

Правая часть (4) является скользящим средним порядка k (см., например, [13]). Далее, определим следующий процесс частных сумм:

$$R_n(t)=\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{[nt/T]}v_n(iT/n),\quad t\in[0,T],\quad n=1,2,\dots \tag{5}$$

Значение $R_n(t)$ представляет собой положение точки в момент времени $T[nt/T]/n$ (через $[\cdot]$ мы обозначаем целую часть числа).

Приведем два предельных случая:

I) $q=\infty$;

II) $q=2$.

I) Закон изменения скорости имеет вид:

$$\Delta v_n(kT/n)=Bn^{1-H}\Delta X_k,\, k=1,\dots,n-2 \tag{6}$$

и

$$\Delta v_n((n-1)T/n)=Bn^{1-H}(\Delta X_{n-1}+\Delta X_1). \tag{7}$$

Заметим, что $R_n(t)$ слабо сходится к $\sigma_0 BTB_H(t/T)$, $t\in[0,T]$ при $n\to\infty$, где $B_H(\cdot)$ – фрактальное броуновское движение (см. [10]).

II) Закон изменения скорости имеет вид

$$\Delta v_n(kT/n)=\frac{2B}{n^H}X_{k+1},\, k=1,2,\dots,n-1. \tag{8}$$

Отметим, что $R_n(t)$ описывает положение материальной точки с единичной массой движущейся под действием силы $\dfrac{2Bn^{1-H}}{T}X_{[nt/T]}$.

Обозначим

$$\begin{aligned}&A_m=a_0+\dots+a_m, m\ge 0; A_{-1}:=0,\\&A_m=-(a_{m+1}+\dots+a_{-1}), m<-1.\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что $S_n, n\ge 0$, можно представить в виде $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{n-k}-A_{-k})\xi_k$.

Введем в рассмотрение условия, связывающие между собой последовательность $\{a_i\}$ и параметр $H \in (0,1)$:

(I_H). *Пусть для некоторых постоянных* $c \neq 0$ и $0 < \delta < H$ *при* $n \to \infty$ *выполняются следующие соотношения*:

$$| A_n - cn^{H-1/2} | = O(n^{H-1/2-\delta}), \tag{10}$$

$$| a_n - c(H-1/2)n^{H-3/2} | = O(n^{H-3/2-\delta}) \tag{11}$$

и, кроме того,

$$a_n = 0, n < 0. \tag{12}$$

Скажем, последовательность $a_i = c((i+1)^{H-1/2} - i^{H-1/2}), i \geq 1$, $a_0 = c$ и $a_i = 0, i < 0$ удовлетворяет условию I_H (см. [10, 11]).

Замечание 1. Пусть выполнено условие (I_H). Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{DS_n}{n^{2H}} = \sigma_0^2$, причем константа σ_0^2 имеет вид $c^2 L_H$, где $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\, ds$, а константа c определена в условии (I_H) (см. [10, 11]).

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (I_H). *Тогда для каждого* q, *такого что* $2 \leq q < \infty$, *дисперсия процесса* R_n *удовлетворяет неравенствам*:

$$c(t/T)^{2H+2d_q} \leq \lim_{n\to\infty} DR_n(t) \leq C(t/T)^{2H+2d_q}, 0 \leq t \leq T,$$

где $d_q = \ln 2 / \ln q$, $c = \frac{2HB^2\sigma_0^2T^2}{(q-1)^{2d}} \int_0^1 u^{2d}(1-u)^{2H-1}du$ и $C = 4H^2B^2\sigma_0^2T^2 \times$ $\times \left(\int_0^1 u^d (1-u)^{H-1} du \right)^2$.

2. Доказательство основных результатов

Введем обозначение: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \geq 1$, $S_0 = 0$.

Лемма 1. *Для любых* $s_1, s_2, t \in [0,1]$, *таких что* $s_1, s_2 \leq t$, *при* $n \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$E\left(S_{[nt]-[ns_1]} S_{[nt]-[ns_2]}\right) \Big/ n^{2H} \to \sigma_0^2 E B_H(t-s_1) B_H(t-s_2).$$

Доказательство. Будем считать, что $s_1 \leq s_2$. Выполняется очевидное равенство:

$$2S_{[nt]-[ns_1]} S_{[nt]-[ns_2]} \Big/ n^{2H} = S^2_{[nt]-[ns_1]} \Big/ n^{2H} +$$
$$+ S^2_{[nt]-[ns_1]} \Big/ n^{2H} - \left(S_{[nt]-[ns_1]} - S_{[nt]-[ns_2]}\right)^2 \Big/ n^{2H}. \tag{13}$$

Из (13) получаем

$$2E\left(S_{[nt]-[ns_1]}S_{[nt]-[ns_2]}\right)\Big/n^{2H} = D\left(S_{[nt]-[ns_1]}\right)\Big/n^{2H} +$$

$$+D\left(S_{[nt]-[ns_2]}\right)\Big/n^{2H} - D\left(S_{[ns_2]-[ns_1]}\right)\Big/n^{2H}. \qquad (14)$$

В соответствии с замечанием 1 выводим

$$D\left(S_{[nt]-[ns_1]}\right)\Big/n^{2H} + D\left(S_{[nt]-[ns_2]}\right)\Big/n^{2H} - D\left(S_{[ns_2]-[ns_1]}\right)\Big/n^{2H} \to$$

$$\to \sigma_0^2\left((t-s_1)^{2H} + (t-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}\right).$$

Откуда и из (14) получаем

$$E\left(S_{[nt]-[ns_1]}S_{[nt]-[ns_2]}\right)\Big/n^{2H} \to \frac{\sigma_0^2}{2}\left((t-s_1)^{2H} + (t-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}\right). \qquad (15)$$

Осталось заметить, что правая часть (15) совпадает с $\sigma_0^2 EB_H(t-s_1)B_H(t-s_2)$.

Приведем следующее предложение из [12, стр. 192], на котором основывается доказательство предложения 1.

Предложение 1. *Для каждого* $2 < q < \infty$ *имеют место неравенства*:

$$t^d/(q-1)^d \le C_q(t) \le t^d,\ t \ge 0,$$

где $d_q = \ln 2/\ln q$. Оба неравенства точные и $C_q(t)/t^d$ не имеет предела при $t \to 0$.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего имеют место следующие очевидные равенства:

$$R_n(t) = 2BT\sum_{i=0}^{[n\tau]-1}\frac{S_{[n\tau]-i}}{n^H}\left(C_q((i+1)/n) - C_q(i/n)\right) =$$

$$= 2BT\int_0^\tau \frac{S_{[n\tau]-[ns]}}{n^H}\,dC_q(s), \qquad (16)$$

где $\tau = t/T$. Из (16) следует, что

$$DR_n(t) = 4B^2T^2\int_0^\tau\!\!\int_0^\tau E\left(\frac{S_{[n\tau]-[ns_1]}S_{[n\tau]-[ns_2]}}{n^{2H}}\right)dC_q(s_1)\,dC_q(s_2). \qquad (17)$$

Из леммы 1 (см. соотношение (15)) получаем

$$\lim_{n\to\infty} DR_n(t) = 4\sigma_0^2B^2T^2 \times$$

$$\times \int_0^\tau\!\!\int_0^\tau \frac{(\tau-s_1)^{2H} + (\tau-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}}{2}\,dC_q(s_1)\,dC_q(s_2). \qquad (18)$$

Из (18) вытекает неравенство

$$\lim_{n\to\infty} DR_n(t) \ge 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \times$$

$$\times \int_0^\tau \int_0^{s_2} \frac{(\tau - s_1)^{2H} + (\tau - s_2)^{2H} - (s_2 - s_1)^{2H}}{2} dC_q(s_1) dC_q(s_2). \qquad (19)$$

Уменьшая правую часть (19), получаем

$$\lim_{n\to\infty} DR_n(t) \ge 2\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^{s_2} (\tau s_2)^{2H} dC_q(s_1) dC_q(s_2). \qquad (20)$$

Преобразовывая правую часть (20), а также интегрируя по частям, получаем

$$2\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^{s_2} (\tau - s_2)^{2H} dC_q(s_1) dC_q(s_2) = \sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau (\tau - s_2)^{2H} dC_q^2(s_2) =$$

$$= 2H\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau C_q^2(s_2)(\tau - s_2)^{2H-1} ds_2. \qquad (21)$$

Далее, применяя предложение 1 к правой части последнего равенства в (21), получаем нижнюю оценку неравенства, сформулированного в теореме 1.
Получим теперь верхнюю оценку. Применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$\lim_{n\to\infty} DR_n(t) = 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^\tau EB_H(\tau - s_1) B_H(\tau - s_2) dC_q(s_1) dC_q(s_2) \le$$

$$\le 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \left(\int_0^\tau (\tau - s)^H dC_q(s) \right)^2. \qquad (22)$$

Интегрируя по частям в правой части (22), получаем

$$\left(\int_0^\tau (\tau - s)^H dC_q(s) \right)^2 = H^2 \left(\int_0^\tau (\tau - s)^{H-1} C_q(s) ds \right)^2. \qquad (23)$$

И, наконец, применяя предложение 1 к правой части равенства (23), получаем верхнюю оценку теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федер Е.** Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
2. **Зеленый Л.М., Милованов А.В.** Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852.
3. **Заславский Г.М.** Гамильтонов хаос и фрактальная динамика: пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 472 с.
4. **Учайкин В.В.** Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847–876.
5. **Mandelbrot B., Ness J. van.** Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Review. – 1968. – Vol. 10. – P. 422–437.
6. **Аркашов Н.С.** Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой // Математические заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 163–173.

7. **Аркашов Н.С., Селезнев В.А.** О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1216–1236.
8. **Аркашов Н.С., Селезнев В.А.** О модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой // ТВП. – 2015. – Т. 60, № 2. – С. 209–226.
9. **Селезнев В.А., Аркашов Н.С.** Об условиях формирования процессов суб- и супердиффузии на самоподобных множествах // Доклады АН ВШ РФ. – 2014. – № 4 (25). – С. 33–38.
10. **Аркашов Н.С., Борисов И.С.** Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1221–1255.
11. **Аркашов Н.С., Борисов И.С., Могульский А.А.** Принцип больших уклонений для процессов частных сумм скользящих средних // ТВП. – 2007. – Т. 52, № 2. – С. 209–239.
12. **Горин Е.А., Кукушкин Б.Н.** Интегралы, связанные с канторовой лестницей // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 3. – С. 188–220.
13. **Ширяев А.Н.** Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.
14. **Edgar G.** Measure, topology, and fractal geometry. – New York: Springer, 2008. – 268 p.

ON THE MASTER EQUATION APPROACH TO MODELING ANOMALOUS DIFFUSION

Arkashov N. S., Seleznev V. A.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

A large amount of experimental data on various processes of the so-called anomalous diffusion for which variance varies nonlinearly over time has currently been accumulated. Various methods of modeling anomalous diffusion are associated with such properties of the corresponding processes as “a strong form” of increment dependence and increment nonstationarity (see, e.g., [1]–[4].). The well-known examples of such processes are continuous time random walk (CTRW) models and the fractional Brownian motion (see e. g, [4], [5]). Today, apparently, there are no modeling formats (see. [3]) covering all of these properties, similar to the Wiener process which is a classical format of the Brownian motion. Questions of modeling transport processes in singular phase spaces were raised in [1]–[4] etc., where the modeling of transport processes in continuous media with a fractal structure was studied. These processes were considered as a subset of the zero Lebesgue and some non-zero Hausdorff measures. A technique of fractional integro-differential calculus was used as a modeling tool in these studies. In this paper we depart from the paradigm that transfer processes are modeled in continuous media with a fractal structure. We construct a master equation that makes it possible to model anomalous diffusion processes in such a way as to take into account both the aftereffect fractal structure and correlation properties of the process. This master equation allows obtaining the Wiener process and the fractional Brownian motion as limiting cases. This present paper is a natural continuation of a series of papers [6], [7], [8], [9] in which an anomalous character of mass, energy, and momentum transport was closely linked with the introduction of values singular relative to the Lebesgue measure.

Keywords: Cantor set; fractional Brownian motion; moving averages; anomalous diffusion; self-similarity.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

REFERENCES

1. Feder J. *Fractals*. New York, Plenum Press, 1988. 254 p. (Russ. ed.: Feder E. *Fraktaly*. Moscow, Mir Publ., 1991. 254 p.).
2. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. *Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 47, no. 8, pp. 749–788. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809–852.

3. Zaslavsky G.M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford, Oxford University Press, 2008. 448 p. (Russ. ed.: Zaslavskii G.M. *Gamil'tonov khaos i fraktal'naya dinamika*. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovanii Publ., Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2010. 472 p.).
4. Uchaikin V.V. Self-similar anomalous diffusion and Lévy-stable laws. *Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821–849. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2003, vol. 173, no. 8, pp. 847–876.
5. Mandelbrot B.,Ness J. van. Fractional Brownian motions, fractional noise and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, pp. 422–437.
6. Arkashov N.S. Ergodic properties of a transformation of a self-similar space with a Hausdorff measure. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, iss. 1–2, pp. 155–163. doi: 10.1134/S0001434615010186. Translated from *Matematicheskie zametki*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 163–173.
7. Arkashov N.S., Seleznev V.A. On a random walk model on sets with self-similar structure. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 968–983. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1216–1236.
8. Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modeli sub- i superdiffuzii na topologicheskikh prostranstvakh s samopodobnoi strukturoi [On one model of sub- and superdiffusion on topological spaces with a self-similar structure]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*, 2015, vol. 60, no. 2, pp. 209–226. (In Russian)
9. Seleznev V.A., Arkashov N.S. Ob usloviyakh formirovaniya protsessov sub- i su-perdiffuzii na samopodobnykh mnozhestvakh [On conditions of forming processes of sub- and superdiffusion on sets with self-similar structures]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 4 (25), pp. 33–38.
10. Arkashov N.S., Borisov I.S. Gaussian approximation to the partial sum processes of moving averages. *Siberian Mathematical Journal*, 2014, vol. 45, iss. 6, pp. 1000–1030. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 1221–1255.
11. Arkashov N.S., Borisov I.S., Mogul'skii A.A. Large deviation principle for partial sum processes of moving averages. *Theory of Probability and its Applications*, 2008, vol. 52, iss. 2, pp. 181–208. doi: 10.1137/s0040585x97982955. Translated from *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*, 2007, vol. 52, no. 2, pp. 209–239.
12. Gorin E.A., Kukushkin B.N. Integrals related to the Cantor ladder. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, iss. 3, pp. 449–468. Translated from *Algebra i analiz*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 188–220.
13. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 574 p.
14. Edgar G. *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, Springer, 2008. 268 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Аркашов Николай Сергеевич – родился в 1978 году, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: функциональные предельные теоремы теории вероятностей. Опубликовано более 20 работ. (Адрес: 6300073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: nicky1978@mail.ru).

Arkashov Nikolay Sergeevich (b. 1978) – Candidate of Sciences (Phys.& Math.), Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on functional limit theorems in the probability theory. He is author of more than 20 papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: nicky1978@mail.ru).

Селезнев Вадим Александрович – родился в 1946 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: методы геометрической теории функций в задачах математической физики. Опубликовано более 50 работ. (Адрес: 6300073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: selvad@ngs.ru).

Seleznev Vadim Alexandrovich (b. 1946) – Doctor of Sciences (Phys.& Math.), Professor, Head of the Department of Engineering Mathematics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are focused on methods of the geometric function theory in mathematical physics. He is author of more than 50 papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia.E-mail: selvad@ngs.ru).

Статья поступила 07 апреля 2016 г.
Received April 07, 2016

To Reference:

Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modelirovanii anomal'noi diffuzii metodom master-uravneniya [On the master equation approach to modeling anomalous diffusion]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 7–15. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15