

УДК 539.3

## ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛИАРМИРОВАННЫХ ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

**Ю.В. Немировский<sup>1</sup>, А.И. Бабин<sup>2</sup>, Е.А. Сальский<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича*

<sup>2</sup>*Кузбасский государственный технический университет  
им. Т.Ф. Горбачева*

<sup>3</sup>*Кемеровский государственный университет*

В общем случае оболочечная конструкция геликоидальной формы может состоять из  $m$  армированных слоев, различающихся составами связующего, материалами армирующих волокон и схемами армирования. Получены физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений для многослойного полиармированного композитного материала в системе координат, не связанной с микроструктурой материала.

При этом физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений армированного материала зависят от модулей Юнга материалов арматуры и связующего, коэффициентов Пуассона арматуры и связующего, интенсивностей армирования и направления укладки волокон. Используемая структурная модель армированного материала позволяет после решения краевой задачи и определения осредненных напряжений находить напряжения в элементах композиции – арматуре и связующем материале.

С целью определения нелинейного закона распределения температуры по толщине многослойной полиармированной оболочки отрицательной гауссовой кривизны найдено аналитическое решение контактной задачи теплопроводности. Приведена замкнутая система уравнений статики многослойных геликоидальных оболочек с учетом внешних термосиловых полей в системе координат нормально связанной с отсчетной поверхностью. Порядок системы уравнений не зависит от количества слоев и схем армирования. Разработана методика расчета армированных оболочек отрицательной гауссовой кривизны, которая учитывает структурную неоднородность материала, а также возможность за счет варьирования внутренней структуры достигать наибольшей согласованности жесткостных полей конструкции с полями напряжений от внешних термосиловых воздействий.

*Ключевые слова:* полиармированная оболочка, прямой геликоид, температура, не связанная задача термоупругости, обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко, закон Дюамеля–Неймана.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-4-7-21

### **Введение**

В современной строительной практике широкое применение находят линейчатые оболочки отрицательной гауссовой кривизны. В конструкциях современных многоэтажных гаражей используются сходни – пандусы, выполненные в виде прямой геликоидальной оболочки [1]. Элементы в виде геликоидальных оболочек могут найти широкое использование при оформлении перекрытий новых архитектурных ансамблей.

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-00825.

© 2016 Ю.В. Немировский, А.И. Бабин, Е.А. Сальский

Одним из основных факторов риска для таких конструкций является возможность возникновения пожара в здании. Температура окружающей среды при пожаре может достигать 1000 °С и более в течение всего лишь десятков минут [2].

В этом случае тонкостенные элементы работают в условиях высокотемпературного неравномерного нестационарного нагрева, приводящего к возникновению тепловых напряжений, знание величины и характера которых необходимо для всестороннего анализа несущей способности конструкции. Тепловые напряжения как сами по себе, так и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызвать появление трещин в элементах конструкций из хрупких материалов, возникновение и развитие пластических деформаций, ведущих к полному или прогрессирующему разрушению композитных тонкостенных конструкций, их термовыпучивание.

В настоящее время геликоидные турбины разработчики пытаются приспособить под ветровые преобразователи энергии. Геликоидные турбины (Патент Австрии № 117749 от 10.05.1930) с винтовыми направляющими, которые закручивают поток воды в продольный вихрь и способствуют возникновению гироскопического эффекта, оказывающего действие на тело ротора турбины. Известны также геликоидные турбины с вертикальной осью вращения и лопастями, изогнутыми по винтовой линии (Патент США № 5451137).

С целью облегчения таких конструкций при их изготовлении можно использовать современные волокнистые композиты: боро-, органо-, углепластики.

Отметим специфические особенности оболочек из композитных материалов: резко выраженную анизотропию их деформативных свойств, ослабленное сопротивление поперечным деформациям, существенное различие механических и теплофизических характеристик слоев. Эти факторы имеют принципиальное значение [3–10] при определении полей напряжений тонкостенных слоистых элементов конструкций.

Строительная практика промышленно развитых государств подтверждает перспективность применения подобных материалов. Однако отсутствие надежных методик расчета армированных оболочек отрицательной гауссовой кривизны, которые бы учитывали структурную неоднородность материала, а также возможность за счет варьирования внутренней структуры достигать наибольшей согласованности жесткостных полей конструкции с полями напряжений от внешних воздействий сдерживает проектирование подобных конструкций. Даже расчет изотропных геликоидальных оболочек строится на различных упрощающих предположениях, которые часто противоречат положениям теории оболочек и реальным условиям работы конструкции.

К примеру, весьма распространен подход, основанный на применении безмоментной теории оболочек [11, 12]. Однако авторы не замечают, что поскольку границами геликоидальной оболочки являются асимптотические линии, то это противоречит условиям применимости безмоментной теории [13] из-за возможности возникновения обобщенного краевого эффекта. С другой стороны, безмоментная краевая задача теории оболочек является статически определимой. Значит, для вычисления усилий и напряжений не используется физический закон деформирования, и, следовательно, усилия и напряжения никак не зависят от структуры и свойств материала оболочки. Все это делает неприемлемым использование безмоментной теории для анализа деформирования армированных оболочек отрицательной гауссовой кривизны, напряженное состояние которых может качественно изменяться за счет варьирования структуры материала оболочки [14].

В известных работах, посвященных расчету изотропных геликоидальных оболочек, на основе моментной теории также используются не всегда оправданные упрощающие предположения. Например, в [15, 16] авторы пренебрегают ради-

альной компонентой вектора смещений, что приводит к понижению порядка разрешающей системы дифференциальных уравнений. При этом не дается оценки погрешности данных допущений. Часто делается предположение о том, что оболочка имеет большое число витков, нагрузка и шаг геликоида не изменяются в окружном направлении и влиянием закрепления прямолинейных кромок можно пренебречь [25]. Эти предположения приводят к тому, что компоненты напряженно-деформированного состояния не зависят от окружной координаты и краевая задача описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Подобный подход справедлив для оболочек с большим числом витков (больше десяти) [1], что в строительной практике встречается нечасто.

Экспериментальные исследования показали, что разрушения от поперечного сдвига часто лимитируют несущую способность армированных конструкций [17]. Учет обжатия влияет на напряженно-деформированное состояние конструкции значительно меньше, чем учет поперечного сдвига.

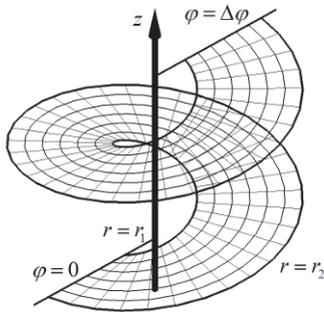
В связи с вышесказанным при выводе дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние геликоидальной оболочки, будем использовать обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко [18], позволяющие учесть поперечные сдвиги, удовлетворяющие краевым условиям на лицевых поверхностях оболочки.

### Постановка задачи

Рассмотрим прямую геликоидальную поверхность (см. рисунок), задаваемую радиусом-вектором:

$$\vec{r}(r, \varphi) = r\vec{e}_\rho + l\varphi\vec{e}_z, \quad l = \frac{t}{2\pi},$$

где  $r, \varphi$  – криволинейная ортогональная система координат;  $t$  – шаг геликоида.



Прямой геликоид  
Strait helicoid

Компоненты основного метрического тензора, тензора кривизны, а также главные кривизны прямого геликоида определяются следующим образом [19, с. 291]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = r^2 + l^2; \\ b_{11} &= b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}; \\ \frac{1}{R_{11}} &= \frac{1}{R_{22}} = 0, \quad \frac{1}{R_{12}} = -\frac{1}{r^2 + l^2}; \\ a &= a_{22}, \quad g = -b_{12}^2, \quad K = \frac{g}{a} = -\frac{l^2}{(r^2 + l^2)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$  и  $g$  – дискриминанты метрических тензоров поверхности и пространства соответственно;  $K$  – гауссова кривизна.

Параметры Ламе имеют вид

$$A_1 = 1; \quad A_2 = \sqrt{r^2 + l^2}. \quad (2)$$

В общем случае оболочечная конструкция может состоять из  $m$  армированных слоев, различающихся составами связующего, материалами армирующих волокон и схемами армирования.

Поверхности раздела  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоя описываются уравнениями:

$$z = z_{k+1}, \quad z_{k+1} = \sum_{j=1}^k h_j, \quad \sum_{j=1}^m h_j = 2H \quad (k = 1, 2, \dots, m-1).$$

Будем рассматривать оболочку достаточно тонкую, поэтому теплообменом с поверхностей (см. рисунок)  $r = r_1$ ,  $r = r_2$ ;  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \Delta\varphi$  можно пренебречь.

На поверхностях  $z = -H$ ,  $z = H$  оболочки имеет место конвективный теплообмен (при граничных условиях первого, второго или третьего рода):

$$\Lambda_{(33)}^{(1)} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial z} + \alpha_{0,1} (T_{(1)} - T_{(1)}) + q_{0,1} = 0, \quad z = -H; \quad (3)$$

$$-\Lambda_{(33)}^{(m)} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial z} + \alpha_{m,m+1} (T_{(m+1)} - T_{(m)}) + q_{m,m+1} = 0, \quad z = H. \quad (4)$$

В (3), (4) температуры внешних сред и коэффициенты теплообмена обозначены через  $T_{(0)}$ ,  $T_{(m+1)}$  и  $\alpha_{0,1}$ ,  $\alpha_{m,m+1}$  соответственно; удельные мощности поверхностных источников:  $q|_{z=-H} = q_{0,1}$ ,  $q|_{z=H} = q_{m,m+1}$ .

На границах раздела армированных слоев выполняются условия идеального теплового контакта:

$$T_{(k)} \Big|_{z=z_{k+1}^-} = T_{(k+1)} \Big|_{z=z_{k+1}^+},$$

$$\Lambda_{(33)}^{(k)} \frac{\partial T_{(k)}}{\partial z} \Big|_{z=z_{k+1}^-} = \Lambda_{(33)}^{(k+1)} \frac{\partial T_{(k+1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_{k+1}^+} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1). \quad (5)$$

В качестве первого приближения для неизвестных функций  $T_{(k)}$  примем нелинейный закон распределения температуры по толщине пакета, который следует из решения одномерных уравнений стационарной контактной задачи теплопроводности для оболочки, состоящей из  $m$  армированных слоев [20],

$$\frac{d}{dz} \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \Lambda_{(33)}^{(k)} \frac{dT_{(k)}}{dz} \right) + \sqrt{\frac{g}{a}} w_{(k)}^t = 0 \quad (k = \overline{1, m}), \quad (6)$$

где  $a$  и  $g$  – дискриминанты метрических тензоров поверхности и пространства соответственно;  $w_{(k)}^t$  – удельная мощность объемных источников диссипативного характера.

Интегрируя уравнение (6), получаем  $2m$  параметрическое семейство первообразных функций:

$$T_{(k)}(z) = A_{(k)} + B_{(k)} \mathfrak{S}(z) - W_T^{(k)}(z), \quad k = \overline{1, m}; \quad (7)$$

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2\sqrt{E}} \ln \left| \frac{Kz - H - \sqrt{E}}{Kz - H + \sqrt{E}} \right|, \quad W_T^{(k)}(z) = \left( \Lambda_{(33)}^{(k)} \right)^{-1} \left[ \int_{z_k}^z \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{z_k}^z w_T^{(k)} \sqrt{\frac{g}{a}} d\zeta \right] d\zeta.$$

Здесь  $K$  – гауссова кривизна;  $H$  – средняя кривизна и  $E$  – эйлерова разность [19].

После подстановки выражений (7) в граничные условия (3)–(5) однозначно определяются  $2m$  коэффициентов  $A_{(k)}, B_{(k)}$  и находятся конечные выражения для искомых функций:

$$\begin{aligned}
 T_{(k)}(z) &= \Phi_{(k)} - \bar{S}_{k-2} + \left( K_{\lambda}^{(k)} \varphi - \left( \Lambda_{(33)}^{(k)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{W'_{ik}(z_{k+1})}{\mathfrak{G}'(z_{k+1})} \right) \times \\
 &\quad \times [\mathfrak{G}(z) - \mathfrak{G}(z_k)] - W_{ik}(z), \\
 \Phi_{(k)} &= \frac{Q_3}{Q_2} + \varphi \left( S_{k-1} - \frac{Q_1}{Q_2} \mathfrak{G}''(z_1) \right), \quad k = \overline{1, m}; \\
 \bar{S}_l &= \sum_{j=1}^l \left\{ \left( \Lambda_{(33)}^{(j+1)} \right)^{-1} [\mathfrak{G}(z_{j+1}) - \mathfrak{G}(z_j)] \sum_{i=1}^j \frac{W'_{ii}(z_{i+1})}{\mathfrak{G}'(z_{i+1})} \right\} + \sum_{j=1}^{l+1} W_{lj}(z_{j+1}); \\
 \bar{\varphi} &= P_2 \bar{S}_{m-1} + P_1 \left[ \mathfrak{G}'(z_{m+1}) \left( \Lambda_{(33)}^{(m)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{W'_{jj}(z_{j+1})}{\mathfrak{G}'(z_{j+1})} - W'_{lm}(z_{m+1}) \right] \\
 S_l &= \sum_{j=1}^l K_{\lambda}^{(j)} [\mathfrak{G}(z_{j+1}) - \mathfrak{G}(z_j)]; \\
 \varphi &= \frac{P_3 - P_2 Q_3 Q_2^{-1} + \bar{\varphi}}{P_1 K_{\lambda}^{(m)} \mathfrak{G}'(z_{m+1}) + P_2 [S_m - \mathfrak{G}'(z_m) Q_1 Q_2^{-1}]}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Радиальная, окружная и нормальная компоненты вектора смещений оболочки представляются в виде [10]

$$u_{r(\varphi)} = u_{0r(\varphi)} + \sum_{i=1}^3 z^i \gamma_{ir(\varphi)}, \quad w = w(r, \varphi), \tag{9}$$

где  $u_{0r}, u_{0\varphi}$  – радиальная и окружная компоненты вектора смещений срединной поверхности оболочки;  $\gamma_{ir}, \gamma_{i\varphi}$  – коэффициенты разложения в степенной ряд смещений оболочки – функции координат срединной поверхности.

В дальнейшем предполагается, что оболочка находится под действием нормальной нагрузки  $q(r, \varphi)$ . В этом случае на лицевых поверхностях  $z = \pm H$  должны выполняться условия  $\sigma_{r(\varphi)z} = 0$ .

Компоненты тензора деформации выражаются через обобщенные смещения:

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + (z^3 - 3H^2 z) \frac{\partial \gamma_{3r}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}; \\
 e_{\varphi} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} u_{0r} + (z^3 - 3H^2 z) \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{3\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} \gamma_{3r} \right] - z \left[ \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dz} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right];
 \end{aligned}$$

$$e_{r\varphi} = \left\{ \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} u_{0\varphi} + (z^3 - 3H^2 z) \left[ \frac{\partial \gamma_{3\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{3r}}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} \gamma_{3\varphi} \right] - z \left[ \frac{2}{A_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{A_2^2} \frac{dA_2}{dr} \frac{dA_2}{dr} \frac{d\omega}{d\varphi} \right] - 2 \frac{b_{12}}{A_2} \omega \right\}; \quad (10)$$

$$e_{rz} = \frac{3}{2} (z^2 - H^2) \gamma_{3r}; \quad e_{\varphi z} = \frac{3}{2} (z^2 - H^2) \gamma_{3\varphi}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия и набор краевых условий на прямолинейных и винтовых кромках оболочки были получены с помощью принципа возможных перемещений.

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (A_2 T_r) + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{dA_2}{dr} T_\varphi &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} (A_2 S) + \frac{dA_2}{dr} S + \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} = 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (A_2 M_r) + 2 \frac{\partial^2 M_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{dA_2}{dr} M_\varphi \right) + \\ &+ \frac{2A_2}{R_{12}} S = -A_2 q; \quad (11) \\ \frac{\partial}{\partial r} (A_2 H_r) + \frac{\partial H_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{dA_2}{dr} H_\varphi - A_2 Q_r &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r} (A_2 H_{r\varphi}) + \frac{dA_2}{dr} H_{r\varphi} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} - A_2 Q_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Краевые условия на направляющих и прямолинейных кромках:

$$\begin{aligned} (T_{\varphi(r)} - T_{\varphi(r)}^0) (u_{\varphi(r)} - u_{\varphi(r)}^0) &= 0; \quad (S - T_{r(\varphi)}^0) (u_{\varphi(r)} - u_{\varphi(r)}^0) = 0; \\ [M_{\varphi(r)} - M_{\varphi(r)}^0] \frac{\partial w}{\partial \varphi(r)} &= 0; \quad (H_{\varphi(r)} - H_{r(\varphi)}^0) (\gamma_{3\varphi(r)} - \gamma_{3\varphi(r)}^0) = 0; \\ \left( 2 \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dr} M_{r\varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - Q^0 \right) (w - w^0) &= 0 \quad (\text{при } \varphi = 0, \Delta\varphi); \quad (12) \\ \left( \frac{\partial}{\partial r} (A_2 M_r) + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{dA_2}{dr} M_\varphi - A_2 Q^0 \right) (w - w^0) &= 0 \quad (\text{при } r = r_1, r_2); \\ (H_{r\varphi} - H_{r\varphi}^0) (\gamma_{3r(\varphi)} - \gamma_{3r(\varphi)}^0) &= 0. \end{aligned}$$

Входящие в (11), (12) усилия и моменты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\varphi(r)} &= \int_{-H}^H \sigma_{r(\varphi)} dz; \quad M_{r(\varphi)} = \int_{-H}^H \sigma_{r(\varphi)} z dz; \\ H_{r(\varphi)} &= \frac{1}{H^2} \int_{-H}^H f_1(z) \sigma_{r(\varphi)} dz; \end{aligned}$$

$$S = \int_{-H}^H \sigma_{r\varphi} dz; \quad M_{r\varphi} = \int_{-H}^H \sigma_{r\varphi} z dz; \quad H_{r\varphi} = \frac{1}{H^2} \int_{-H}^H f_1(z) \sigma_{r\varphi} dz; \quad (13)$$

$$Q_{r(\varphi)} = \int_{-H}^H f_2(z) \sigma_{r(\varphi)} dz.$$

Внешние усилия и моменты, приложенные к краям оболочки, определяются по формулам:

$$T_{\varphi(r)}^0 = \int_{-H}^H p_{r(\varphi)} dz; \quad H_{r(\varphi)} = \frac{1}{H^2} \int_{-H}^H f_1(z) p_{r(\varphi)} dz; \quad (14)$$

$$M_{r(\varphi)}^0 = \int_{-H}^H z p_{r(\varphi)} dz; \quad Q^0 = \int_{-H}^H p_z dz,$$

где  $f_1(z) = z^3 - 3H^2z$ ;  $f_2(z) = \frac{df_1}{dz}$ ;  $p_r, p_\varphi, p_z$  – компоненты распределенной нагрузки, приложенной к границам оболочки.

Компоненты тензоров напряжений, деформаций и температура для  $k$ -го слоя связаны зависимостями [21]:

$$\sigma_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \hat{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)} \varepsilon_{(\lambda\mu)}^{(k)} - \hat{c}_{(\alpha\beta)}^{(k)} T^{(k)}, \quad (15)$$

$$\tau_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \hat{p}_{(\alpha\beta)}^{(k)} \gamma_{(\beta\beta)}^{(k)}, \quad \gamma_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \hat{q}_{(\alpha\beta)}^{(k)} \tau_{(\beta\beta)}^{(k)}.$$

Здесь  $\|\hat{p}_{(\alpha\beta)}\| = \|\hat{q}_{(\alpha\beta)}\|^{-1}$ .

Физические составляющие  $\hat{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)}, \hat{c}_{(\alpha\beta)}^{(k)}, \hat{q}_{(\alpha\beta)}^{(k)}$  тензоров эффективных тангенциальных упругих и температурных жесткостей  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{c}$ , тензора поперечных сдвиговых податливостей  $\mathbf{q}$  для  $k$ -го армированного слоя определяются формулами [21]:

$$\hat{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)} = \frac{(1 - \omega_z^{(k)}) E_c^{(k)}}{1 - \nu_c^{(k)2}} \times$$

$$\times \left[ \nu_c^{(k)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} + \frac{1 - \nu_c^{(k)}}{2} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}) \right] + \omega_z^{(k)} E_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)}, \quad (16)$$

$$\hat{c}_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \omega_z^{(k)} k_{(\alpha\beta)}^{(k)} + (1 - \omega_z^{(k)}) \chi_c^{(k)} \delta_{\alpha\beta},$$

$$\hat{q}_{(\alpha\beta)}^{(k)} = \frac{2(1 - \omega_z^{(k)})(1 + \nu_c^{(k)})}{E_c^{(k)}} \delta_{\alpha\beta} + \omega_z^{(k)} \Gamma_{(\alpha\beta)}^{(k)}, \quad (17)$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta; \end{cases}$$

$$E_{(1111)}^{(k)} = \varpi^{(k)} E_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) E_c^{(k)} + \frac{E_a^{(k)} E_c^{(k)} \left[ \varpi^{(k)} v_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) v_c^{(k)} \right]^2}{\varpi^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) E_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 - v_c^{(k)2}) E_a^{(k)}}, \quad (18)$$

$$E_{(1122)}^{(k)} = \frac{E_a^{(k)} E_c^{(k)} \left[ \varpi^{(k)} v_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) v_c^{(k)} \right]}{\varpi^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) E_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 - v_c^{(k)2}) E_a^{(k)}}, \quad (19)$$

$$E_{(1212)}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{E_a^{(k)} E_c^{(k)}}{\varpi^{(k)} (1 + v_a^{(k)}) E_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 + v_c^{(k)}) E_a^{(k)}},$$

$$E_{(2222)}^{(k)} = \frac{E_c^{(k)} E_a^{(k)}}{\varpi^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) E_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 - v_c^{(k)2}) E_a^{(k)}}, \quad (20)$$

$$E_{(1122)}^{(k)} = 0, \quad E_{(1222)}^{(k)} = 0;$$

$$\Gamma_{(11)}^{(k)} = \frac{2(1 + v_c^{(k)})(1 + v_a^{(k)})}{\varpi^{(k)} (1 + v_c^{(k)}) E_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 + v_a^{(k)}) E_c^{(k)}},$$

$$\Gamma_{(22)}^{(k)} = 2 \frac{\varpi^{(k)} (1 + v_a^{(k)}) E_c^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 + v_c^{(k)}) E_a^{(k)}}{E_c^{(k)} E_a^{(k)}},$$

$$k_{(11)}^{(k)} = \left[ \varpi^{(k)} v_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) v_c^{(k)} \right] \times \frac{\varpi^{(k)} E_c^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) \chi_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) E_a^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) \chi_c^{(k)}}{\varpi^{(k)} E_c^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) + (1 - \varpi^{(k)}) E_a^{(k)} (1 - v_c^{(k)2})} + \varpi^{(k)} (1 - v_a^{(k)}) \chi_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) (1 - v_c^{(k)}) \chi_c^{(k)}, \quad (21)$$

$$k_{(22)}^{(k)} = \frac{\varpi^{(k)} E_c^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) \chi_a^{(k)} + (1 - \varpi^{(k)}) E_a^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) \chi_c^{(k)}}{\varpi^{(k)} E_c^{(k)} (1 - v_a^{(k)2}) + (1 - \varpi^{(k)}) E_a^{(k)} (1 - v_c^{(k)2})},$$

$$k_{(12)}^{(k)} = k_{(21)}^{(k)} = 0.$$

В соотношениях (15)–(21) приняты следующие обозначения:  $E_n^{(k)}$ ,  $v_n^{(k)}$ ,  $\chi_n^{(k)} = \frac{E_n^{(k)} \alpha_n^{(k)}}{1 - v_n^{(k)}}$  – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и температурного расширения для арматуры ( $n = a$ ) и связующего ( $n = c$ ),  $\varpi^{(k)}$ ,  $\varpi_z^{(k)}$  – интенсивности армирования в плоскости и по толщине  $k$ -го слоя.

Установленные уравнения модели однонаправленно армированного слоя достаточно просты и их использование в конкретных расчетах не вызывает никаких затруднений. В то же время эти уравнения при

$$E_a \rightarrow E_c, \nu_a \rightarrow \nu_c, \lambda_a \rightarrow \lambda_c$$

обеспечивают непрерывный переход к уравнениям Дюамеля–Неймана однородного изотропного тела.

На практике оболочка нередко изготовлена из материалов однонаправленно армированных слоев, оси симметрии которых не совпадают с координатными линиями исходной поверхности. Такая ситуация имеет место, например, в перекрестно армированных (под углами  $\pm\psi_k$  к направлению  $\vec{r}' = \text{const}$ ) оболочках.

Преобразование физических компонентов эффективных механических (16), температурных (17) жесткостей и тензора поперечных сдвиговых податливостей осуществляется по известным формулам [22]:

$$\begin{aligned} A_{(\pi\omega\rho\delta)}^{(k)} &= \hat{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)} m_{\pi}^{(k)\alpha} m_{\omega}^{(k)\beta} m_{\rho}^{(k)\lambda} m_{\delta}^{(k)\mu}, \quad q_{(\lambda\mu)}^{(k)} = \hat{q}_{(\alpha\beta)}^{(k)} m_{\lambda}^{\alpha} m_{\mu}^{\beta}, \\ c_{(\lambda\mu)}^{(k)} &= \hat{c}_{(\alpha\beta)}^{(k)} m_{\lambda}^{\alpha} m_{\mu}^{\beta}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $m_1^{(k)1} = m_2^{(k)2} = \cos\psi_k$ ,  $m_2^{(k)1} = -m_1^{(k)2} = \sin\psi_k$ .

При этом физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений армированного материала зависят от модулей Юнга материалов арматуры и связующего, коэффициентов Пуассона арматуры и связующего, интенсивностей армирования и направления укладки волокон. Используемая структурная модель армированного материала позволяет после решения краевой задачи и определения осредненных напряжений находить напряжения в элементах композиции – арматуре и связующем [21–23].

Кроме того, можно учитывать неоднородность материала оболочки, находя для различных структур армирования слоев зависимость структурных параметров  $\varpi^{(k)}$ ,  $\varpi_z^{(k)}$ ,  $\psi_k$  от координат срединной поверхности [24].

### Заключение

Таким образом, расчет армированной геликоидальной оболочки сводится к решению краевой задачи, описываемой дифференциальными уравнениями равновесия (11), кинематическими соотношениями (9), физическими соотношениями (15), а также краевыми условиями на прямолинейных и винтовых кромках оболочки (12).

В отличие от [24], где подобные соотношения получены для оболочки, срединная поверхность которой отнесена к главным линиям кривизны, приведенные здесь уравнения получены для оболочки, отнесенной к асимптотическим линиям.

Если оболочка шарнирно оперта вдоль прямолинейных кромок, то краевые условия (12) при  $\varphi = 0$ ,  $\Delta\varphi$  примут вид

$$u_{0\varphi} = w = \gamma_{3r} = S = M_{\varphi} = H_{\varphi} = 0. \quad (23)$$

Условиям (23) можно полностью удовлетворить, если обобщенные смещения представить в виде тригонометрических рядов:

$$w(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(r) \sin b_k \varphi; \quad u_{0\varphi}(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0\varphi}^k(r) \sin b_k \varphi;$$

$$\begin{aligned}
u_{0r}(r, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{0r}^k(r) \cos b_k \varphi; & \gamma_{3r}(r, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{3r}^k(r) \sin b_k \varphi; \\
\gamma_{3\varphi}(r, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{3\varphi}^k(r) \cos b_k \varphi.
\end{aligned} \tag{24}$$

В отличие от классической краевой задачи, описываемой дифференциальными уравнениями восьмого порядка [24], в рассматриваемой постановке порядок дифференциальных уравнений двенадцатый. Подставляя (24) в (10) с помощью (13), (15) получим следующие выражения для усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
T_{r(\varphi)} &= \sum_{k=1}^{\infty} T_{r(\varphi)k}(r) \cos b_k \varphi; & S &= \sum_{k=1}^{\infty} S_k(r) \sin b_k \varphi; \\
M_{r(\varphi)} &= \sum_{k=1}^{\infty} M_{r(\varphi)k}(r) \sin b_k \varphi; & M_{r\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} M_{r\varphi}^k(r) \cos b_k \varphi; \\
H_{r(\varphi)} &= \sum_{k=1}^{\infty} H_{r(\varphi)k}(r) \sin b_k \varphi; & H_{r\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} H_{r\varphi}^k(r) \cos b_k \varphi; \\
Q_r &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_{rk}(r) \sin b_k \varphi; & Q_{\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_{\varphi k}(r) \cos b_k \varphi.
\end{aligned} \tag{25}$$

Входящие в (25) функции  $T_{rk}(r)$ ,  $T_{\varphi k}(r)$ , ...,  $Q_{\varphi k}(r)$  выражаются через обобщенные кинематические перемещения и компоненты тензора упругости.

Подставляя далее (25) в (11) и применяя процедуру Бубнова–Галеркина, получим бесчисленное множество систем обыкновенных дифференциальных уравнений двенадцатого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}(A_2 T_{rk}) + b_k S_k - \frac{dA_2}{dr} T_{\varphi k} &= 0; & \frac{d}{dr}(A_2 S_k) + \frac{dA_2}{dr} S_k - b_k T_{\varphi k} &= 0; \\
\frac{d^2}{dr^2}(A_2 M_{rk}) - 2b_k \frac{dM_{r\varphi}^k}{r} - \frac{b_k}{A_2} \frac{dA_2}{dr} H_{r\varphi}^k - \frac{b_k^2}{A_2} M_{\varphi k} - \frac{d}{dr} \left( \frac{dA_2}{dr} M_{\varphi k} \right) + \\
&+ \frac{2A_2}{R} S_k = -A_2 q_k; \\
\frac{d}{dr}(A_2 H_{rk}) - b_k H_{r\varphi}^k - \frac{dA_2}{dr} H_{\varphi k} - A_2 Q_{rk} &= 0; \\
\frac{d}{dr} \left( A_2 H_{r\varphi}^k \right) + \frac{dA_2}{dr} H_{rk}^k + b_k H_{\varphi k} - A_2 Q_{\varphi k} &= 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

где  $q_k$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье нормальной и распределенной нагрузки  $q(r, \varphi)$ .

Применяя процедуру Бубнова–Галеркина к (12), получим также набор краевых условий на винтовых кромках для уравнений (26) при  $r = r_1, r_2$ .

Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния армированной геликоидальной оболочки сводится к решению краевой задачи, описываемой множеством систем обыкновенных дифференциальных уравнений двенадцатого

порядка. Если же рассматривать оболочку в рамках классической теории Кирхгофа–Лява, то порядок разрешающих систем будет восьмой [24]. Возрастание порядка разрешающих систем дифференциальных уравнений вызывает значительное повышение интенсивности краевых эффектов по сравнению с классической теорией оболочек. Поэтому хорошо зарекомендовавшие себя численные методы решения краевых задач классической теории дискретной ортогонализации здесь малопригодны. Наиболее перспективным для решения поставленной краевой задачи представляется метод инвариантных погружений [21], разработанный для решения многоточечных краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями высоких порядков.

Учет поперечного сдвига необходим при анализе напряженно-деформированного состояния оболочек, изготовленных из материала армированного высокомодульными волокнами  $E_a \gg E_c$ , например боро- или углепластика. В то же время расчет оболочек, изготовленных из материалов с сопоставимыми механическими характеристиками арматуры и связующего, может проводиться в рамках классической теории оболочек Кирхгофа–Лява.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Колтунов С.Я.** К расчету напряженного состояния в конечных геликоидальных оболочках // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 149–152.
2. **Ройтман В.М.** Инженерные решения по оценке огнестойкости проектируемых и реконструируемых зданий. – М.: Ассоциация «Пожарная безопасность и наука», 2001. – 382 с.
3. **Муц А.В.** Выбор переменных проектирования при оптимизации последовательности укладки конструкций из слоистых композитов // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 305–324.
4. **Muc A., Ulatowska A.** Design of plates with curved fiber format // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92, N 7. – P. 1728–1733.
5. **Muc A., Muc-Wersgon' M.** An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94, N 4. – P. 1461–1470.
6. **Джагангиров А.А.** Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемленной по краям // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 385–392.
7. **Немировский Ю.В., Мищенко А.В.** Динамический расчет системы профилированных композитных стержней // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 188–199.
8. **Емельянов И.Г., Кузнецов А.В.** Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 245–252.
9. **Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А.** Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упруго-пластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427–434.
10. **Киреев И.В., Немировский Ю.В.** Консервативный численный метод решения линейных краевых задач статики упругих оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 85–99.
11. **Залесский В.Н.** Двумерная безмоментная задача для оболочки в виде косоугольного геликоида // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1974. – Вып. 12. – С. 88–93.
12. **Залесский В.Н.** Двумерная безмоментная задача для геликоидальной оболочки в асимптотических линиях // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1966. – Вып. 3. – С. 10–13.
13. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

14. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние гиперболической оболочки вращения при неоднородном армировании // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 10. – С. 27–32.
15. Котельникова А.П. Расчет пологой геликоидальной оболочки, нагруженной изгибающим моментом // Известия вузов. Машиностроение. – 1978. – № 12. – С. 4–9.
16. O'Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells // Journal of Mathematics and Physics. – 1963. – Vol. 42. – P. 85–111.
17. Прочность при изгибе стеклопластиков, полученных намоткой / С.Г. Абрамов, Н.С. Мезенцев, В.П. Николаев, В.Д. Попов // Проблемы прочности. – 1975. – № 10. – С. 62–64.
18. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.
19. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 216 с.
20. Бабин А.И., Немировский Ю.В. Температурные напряжения в коллекторах машин постоянного тока // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XVII межреспубликанской конференции, Новосибирск, 3–5 июля 2001 г. / под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск, 2001. – С. 12–27.
21. Андреев А.Н. Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин // Известия АлтГУ. – 2014. – № 1-1 (81). – С. 19–21. – doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-02.
22. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Известия Академии наук Армянской ССР. Механика. – 1989. – Т. 42, № 1. – С. 9–19.
23. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
24. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние армированных геликоидальных оболочек // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 9. – С. 18–24.
25. Ярошенко А.Р. Осесимметричная деформация винтовой оболочки с прямоугольным профилем // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1974. – Вып. 12. – С. 3–9.

#### THERMOSTRESSED STATE OF THE HELICOIDAL MULTILAYER POLYREINFORCED SHELLS

Nemirovskii Yu.V.<sup>1</sup>, Babin A.I.<sup>2</sup>, Sal'skii E.A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia*

<sup>3</sup>*Kemerovo State University, Kemerovo, Russia*

In general, a helicoidal shell construction can be composed of  $m$  reinforced layers different in the matrix composition, reinforcing fiber materials and the reinforcement pattern. Physical components of effective tangential stiffness and temperature stress tensors of a multilayered composite reinforced in different directions were obtained in the coordinate system not related to the material microstructure.

In this case, physical components of tangential effective stiffness and heat stress tensors depend on the Young modulus, the Poisson ratio of the matrix and reinforcing phase, the reinforcement power and the reinforcement fiber direction. The used structural model of the reinforced material allows finding stresses in composite compounds, namely the reinforcing phase and matrix, after computing mean values by solving the boundary problem.

An analytical solution of the contact thermal conductivity problem was found with a view to obtain a non-linear temperature distribution law over the reinforced shell with a negative Gaussian curvature. A closed equation system of multilayered helicoidal shell statics with regard to external thermal fields in the coordinate system normally related to the reference surface is adduced. The order of the system does not depend on the number of layers or method of

reinforcement. A calculation method of reinforced shells with a negative Gaussian curvature which takes in account the material structural heterogeneity is developed. It makes it possible by varying an internal structure to obtain maximum coherence between construction stiffness fields and tension fields from external thermal and mechanical effects.

*Keywords:* multi-reinforced shell; straight helicoids; temperature; non-coupled thermoelastic problem; Timoshenko's generalized hypotheses, Duhamel-Neumann's law.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-4-7-21

#### REFERENCES

1. Koltunov S.Ya. K raschetu napryazhennogo sostoyaniya v konechnykh gelikoidal'nykh obolochkakh [Finite helicoidal shells stress condition computation]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 1980, no. 6, pp. 149–152. (In Russian)
2. Roitman V.M. *Inzhenernye resheniya po otsenke ognestoikosti proektiruemykh i rekonstruiruemykh zdaniy* [Engineer solutions in designed and restored construction's fire resistance estimation]. Moscow, Assotsiatsiya "Pozharnaya bezopasnost' i nauka" Publ., 2001. 382 p.
3. Muc A. Vybory peremennykh proektirovaniya pri optimizatsii posledovatel'nosti ukladki konstruktivnykh sloistykh kompozitov [Choice of design variables in the stacking sequence optimization for laminated structures]. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 305–324. (In Russian)
4. Muc A., Ulatowska A. Design of plates with curved fiber format. *Composite Structures*, 2010, vol. 92, no. 7, pp. 1728–1733.
5. Muc A., Muc-Wersgon' M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 4, pp. 1461–1470.
6. Dzhagangirov A.A. Nesushchaya sposobnost' trekhslonnoi voloknistoi kompozitnoi kol'tsevoi plastinki, zashchemlennoi po krayam [Load-carrying capacity of a fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours]. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 385–398. (In Russian)
7. Nemirovskii Yu.V., Mishchenko A.V. Dinamicheskii raschet sistemy profilirovannykh kompozitnykh sterzhnei [Composite rods with variable cross-section]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 188–199.
8. Emel'yanov I.G., Kuznetsov A.V. Primenenie virtual'nykh elementov pri opredelenii napryazhennogo sostoyaniya obolochek vrashcheniya [Virtual elements usage in determining shells of revolution stress condition]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 245–252.
9. Bazhenov V.G., Pavlenkova E.V., Artem'eva A.A. Chislennoe reshenie obobshchennykh osesimmetrichnykh zadach dinamiki uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniya pri bol'shikh deformatsiyakh [Elastoplastic shells of revolution dynamic general axial symmetric problems with high deformations numerical solution]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427–434.
10. Kireev I.V., Nemirovskii Yu.V. Konservativnyi chislennyi metod resheniya lineinykh kraevykh zadach statiki uprugikh obolochek vrashcheniya [Elastic shells of revolution linear boundary static problems conservative numeric solutions methods]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 85–99.
11. Zalesskii V.N. [2-dimensional skew helicoid shell momentless problem]. *Dinamika i prochnost' mashin* [Engine dynamics and durability]. Khar'kov, 1974, iss. 12, pp. 88–93. (In Russian)
12. Zalesskii V.N. [2-dimensional asymptotical line helicoidal shell momentless problem]. *Dinamika i prochnost' mashin* [Engine dynamics and durability]. Khar'kov, 1966, iss. 3, pp. 10–13. (In Russian)
13. Gol'denveizer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Elastic thin shell theory]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 512 p.

14. Aleksandrov P.V., Nemirovskii Yu.V. Napryazhennoe sostoyanie giperbolicheskoi obolochki vrashcheniya pri neodnorodnom armirovanii [Hyperboloid nonhomogenously armored shell of revolution strained state]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo i arkhitektura – News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*, 1991, no. 10, pp. 27–32.
15. Kotel'nikova A.P. Raschet pologoĭ gelikoidal'noi obolochki, nagruzhennoi izgibayushchim momentom [Stressed with bending moment flat hyperboloid computation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie – Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1978, no. 12, pp. 4–9.
16. O'Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells. *Journal of Mathematics and Physics*, 1963, vol. 42, pp. 85–111.
17. Abramov S.G., Mezentsev N.S., Nikolaev V.P., Popov V.D. Prochnost' pri izgibe stekloplastikov, poluchennykh namotkoi [Bending strength of glass-fiber-reinforced plastics produced by winding]. *Problemy prochnosti – Strength of Materials*, 1975, no. 10, pp. 62–64. (In Russian)
18. Nemirovskii Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost' elementov konstruksii iz kompozitnykh materialov* [Composite construction element resistance]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. 166 p.
19. Kagan V.F. *Osnovy teorii poverkhnostei v tenzornom izlozhenii*. Ch. 1 [Surface theory bases in tensor terms. Pt. 1]. Moscow, Leningrad, OGIz Publ., 1947. 216 p.
20. Babin A.I., Nemirovskii Yu.V. [Thermal stresses in direct current engine's collectors]. *Chislennye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: trudy XVII mezhrеспубликанской konferentsii* [Numerical methods in elasticity and plasticity problems: proceedings of the XVII inter-republican conference], Novosibirsk, 3–5 July 2001, pp. 12–27. (In Russian)
21. Andreev A.N. Matematicheskaya model' termouprugogo deformirovaniya sloistykh kompozitnykh obolochek i plastin [A mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates]. *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta – The News of Altai State University*, 2014, no. 1-1 (81), pp. 19–21. doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-02
22. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. Chislennyĭ analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistykh obolochek vrashcheniya metodom invariantnogo pogruzheniya [Numerical analysis of rotation sandwich shells stress-strain state by invariant imbedding method]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Mekhanika*, 1989, vol. 42, no. 1, pp. 9–19.
23. Nemirovskii Yu.V. Ob uprugo-plasticheskom povedenii armirovannogo sloya [Armored layer elastic-yelding behavior]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1969, no. 6, pp. 81–89. (In Russian)
24. Aleksandrov P.V., Nemirovskii Yu.V. Napryazhennoe sostoyanie armirovannykh gelikoidal'nykh obolochek [Armored helicoidal shells of rotation stress condition]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo i arkhitektura – News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*, 1991, no. 9, pp. 18–24.
25. Yaroshenko A.R. [Axisymmetric deformation of the screw shell with a rectangular profile]. *Dinamika i prochnost' mashin* [Engine dynamics and durability]. Khar'kov, 1974, iss. 12, pp. 3–9.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Немировский Юрий Владимирович** – родился в 1936 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики имени С.А. Христиановича. Область научных интересов: теория пластин и оболочек, теория термоупругости и термopрочности, теория теплопроводности и тепломассопереноса в композитных конструкциях, теория пластичности ползучести, динамики тонкостенных конструкций, механика композитных материалов и конструкций, теория оптимального проектирования. Опубликовано 455 научных работ. (Адрес: 630099, Россия, Новосибирск, Морской пр-т, 44. E-mail: nemiryury@mail.ru).

**Nemirovskii Yuri Vladimirovich** (b. 1936) – Doctor of Sciences (Phys.&Math.), professor, chief research scientist, SB RAS, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia. His research interests are currently focused on the plate and shell theory, the theory of thermal elasticity and thermal resistance, the thermal conduction and heat-and-mass transfer theory in composite structures, the thin-wall structure dynamics theory, mechanics of composites, and the optimal design theory. He is the author of 455 scientific papers. (Address: 44, Morskoï Prospekt, Novosibirsk, 630099, Russia. E-mail: nemiryury@mail.ru).



**Бабин Анатолий Иванович** – родился в 1953 году, старший преподаватель, Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева. Область научных интересов: связанная задача термоупругости, теория оболочек. Опубликовано 23 научные работы. (Адрес: 650055, Россия, Кемерово, Ворошилова, 24в. E-mail: anbabn@yandex.ru).

**Babin Anatoly Ivanovich** (b. 1953) – senior lecturer, Kuzbass State Technical University. His research interests are currently focused on the coupled thermal elasticity theory and the shell theory. He is the author of 23 scientific papers. (Address: 24c, Voroshilova St, Kemerovo, 650055, Russia. E-mail: anbabn@yandex.ru).



**Сальский Евгений Алексеевич** – родился в 1989 году, аспирант, Кемеровский государственный университет. Область научных интересов: теория оболочек, механика твердого тела. Опубликовано 3 научные работы. (Адрес: 650002, Россия, Кемерово, ул. Институтская, 12. Email: e\_s\_@mail.ru).

**Sal'skii Evgeny Alekseevich** (b. 1989) – postgraduate, Kemerovo State University. His research interests are currently focused on the shell theory and solid-state mechanics. He is the author of 3 scientific papers. (Address: 12, Institutskaya St, Kemerovo, 650002, Russia. E-mail: e\_s\_@mail.ru).

*Статья поступила 09 января 2017 г.  
Received January 9, 2017*

---

To Reference:

Nemirovskii Yu.V., Babin A.I., Sal'skii E.A. Termonapryazhennoe sostoyanie mnogosloinykh poliarmirovannykh gelikoidal'nykh obolochek [Thermo-stressed state of the helicoidal multilayer polyreinforced shells]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 4 (33), pp. 7–21. doi: 10.17212/1727-2769-2016-4-7-21