

УДК 532.517.3

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ПРАВИЛЬНЫХ  
ВИХРЕВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ****Е.Г. Борд***Новосибирский государственный архитектурно-строительный  
университет (Сибстрин)*

Моделируется регулярное поведение возмущений твердотельного вращения правильной вихревой многоугольника (решения Кельвина). Для получения решения, являющегося обобщением решения Кельвина, используется процедура редукции уравнений динамики вихревой системы. В результате редукции получены уравнения второго порядка, описывающие частные решения уравнений динамики систем двух, четырех, шести, восьми, десяти, двенадцати вихрей. Получены численные решения этих уравнений. Описана структура фазового пространства решений. Фазовые портреты построенных решений иллюстрируют изменение устойчивости систем в зависимости от числа вихрей. Свойство устойчивости, известное для систем с малым (меньше восьми) числом вихрей проявляется в том, что неподвижная точка, соответствующая решению Кельвина, является внутренней точкой области, образованной замкнутыми фазовыми кривыми. При рассмотрении неустойчивых систем с восьмью, десятью и двенадцатью вихрями наблюдается распад областей нейтрально устойчивых колебаний, при этом решение Кельвина оказывается предельным для решений принадлежащих различным областям фазового пространства. Фазовые портреты в системах восьми, десяти и двенадцати вихрей оказываются типичными, что позволяет предположить существование универсального механизма возникновения хаотического поведения в этих системах.

*Ключевые слова:* устойчивость, нелинейные колебания, точечные вихри, решение Кельвина.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-1-7-18

**Введение**

Исследование устойчивости движения правильной полигональной системы вихрей, предпринятое впервые в XIX веке, получило содержательное развитие в ряде современных работ. Интерес исследователей к этой задаче обусловлен как фундаментальным характером проблемы, так и очевидными практическими приложениями. Из недавно опубликованных работ следует упомянуть [1, 2] в которых рассматривается поведение точечных вихрей на сфере, востребованное, в частности, при решении задач описания движения вихрей в атмосфере планеты. Методам численного моделирования в гидродинамике, основанным на модели динамики системы дискретных вихрей, посвящены работы [3, 4]. В настоящей работе предлагается описание частных решений задачи динамики правильной полигональной конфигурации, полученное для систем, образованных  $N = 4, 6, 8, 10, 12$  вихрями. Полученные решения, несмотря на свой частный характер, демонстрируют изменение устойчивости, связанное как с увеличением числа вихрей в системе, так и с различными типами возмущений начального положения вихрей. Предлагаемые частные решения описывают нелинейные колебания с одной

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (соглашение № 14-19-00312).

© 2017 Е.Г. Борд

степенью свободы, возникающие в системе двух правильных многоугольников точечных вихрей при выполнении дополнительных ограничений на их положения.

Рассматривается движение системы  $N$  точечных вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma$ . Положение вихрей может быть задано комплексными координатами  $z_n(t)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ . Движение описывается системой уравнений

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{m=0, m \neq n}^{N-1} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m}. \quad (1)$$

Твердотельное вращение вихревой конфигурации, известное как решение Кельвина [5, 6], получается из уравнений (1) в предположении, что вихри расположены в вершинах правильного  $N$ -угольника. Движение системы вихрей определяется функцией  $z_n(t) = R \exp(i\Omega_N t + 2\pi i n / N)$ . Подстановка этого представления в уравнение (1) дает выражение для угловой скорости вращения правильного вихревого многоугольника  $\Omega_N = \frac{N-1}{4\pi R^2}$ , полученное впервые в [7]. В работах

[8, 9] были получены ответы на ряд вопросов, связанных с устойчивостью правильной полигональной конфигурации, оставшихся неизученными в XX веке. В частности, в [8] была доказана устойчивость правильного вихревого семиугольника. Методы редукции уравнений движения различных вихревых систем на плоскости, на сфере и в областях с границей представлены в работах [1, 9, 10]. Тем не менее оставался открытым вопрос о том, что является источником возникновения неустойчивости. В случае правильной вихревой системы можно предполагать влияние двух факторов, вызывающих неустойчивость: сингулярности поля завихренности и сложности системы, определяемой количеством взаимодействующих вихрей. Ответ на вопрос о влиянии сингулярности завихренности на устойчивость полигональной системы был получен в работах [11, 12]. Поле завихренности, порождаемое точечными вихрями, было регуляризовано. Рассматривалась система вихрей с гауссовскими распределениями завихренности. Для такой системы были получены явные выражения показателей Ляпунова. С увеличением дисперсии распределения завихренности показатели Ляпунова монотонно убывают, а при стремлении дисперсии к нулю стремятся к значениям, полученным в [7] для системы точечных вихрей. Поведение показателей Ляпунова говорит о том, что регуляризация поля завихренности не объясняет качественного изменения решения линейной задачи устойчивости правильной полигональной конфигурации вихрей при изменении числа вихрей. Таким образом, главным фактором влияния на устойчивость является размерность задачи. Для углубления представлений о поведении вихревой системы в этой ситуации требуется располагать новыми решениями, отличными от решения, описывающего твердотельное вращение правильной конфигурации вихрей.

Основанием для поиска таких решений для автора явились работы [13, 14, 15]. Здесь для изучения динамики вихревой системы вычислялась автокорреляционная функция координат вихрей. Стохастизация неустойчивой вихревой системы характеризовалась стремлением автокорреляционной функции к нулю. Вместе с тем на начальных временных интервалах эволюции системы, продолжительность которых была сопоставима с периодом оборота томпсоновской конфигурации, наблюдалось регулярное поведение автокорреляционной функции, при этом ее амплитуда оставалась неизменной с высокой степенью точности. Такое поведение свидетельствовало о сохранении регулярного режима движения в неустойчивой системе на конечном интервале времени. Возмущение, вносимое неустраняемыми погрешностями численного интегрирования приводило к экспоненциальному

росту возмущений решения, описывающего твердотельное вращение вихревой системы. Инкременты нарастания возмущений в системах с различным  $N$  соответствовали наибольшему значению показателя Ляпунова в соответствующей вихревой системе. Возможное объяснение такого поведения динамической системы состояло в том, что в ней существует устойчивое решение, соответствующее возмущению начальных данных. Описание такого решения для системы  $N = 8$  вихрей было предложено в [16, 17]. Были получены уравнения нелинейных колебаний в окрестности положения неустойчивого равновесия и показано, что именно это решение реализуется в интервале экспоненциального роста возмущений начальных данных. Целью настоящей работы является описание регулярного периодического поведения в системах двух правильных многоугольников, возникающих в результате эволюции систем с  $N = 4, 6, 10, 12$  вихрей. Сопоставление фазовых портретов, полученных для этих систем, позволяет продемонстрировать критериальный характер системы восьми вихрей, разделяющей системы с «малым» числом вихрей  $N = 4, 6$  и системы с «большим» числом вихрей  $N = 10, 12$ . Детализация и обобщение результатов, полученных ранее в [16–19] для системы восьми вихрей, имеют целью описание качественного изменения устойчивости при переходе от «малых» систем к «большим».

### 1. Редуцированные уравнения движения

В работах [1, 2] обоснована редукция с уменьшением числа степеней свободы на две единицы, при этом используется явное представление координат вихрей в гамильтониане системы с последующим поиском новых обобщенных координат для динамической системы. В случае правильной полигональной конфигурации вихрей равной интенсивности для реализации этой процедуры редукции достаточно выбрать начало отсчета в центре симметрии многоугольника и перейти к полярному представлению координат вихрей  $(\rho_k, \theta_k)$  в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega_N$ :  $z_k(t) = R\rho_k(t)\exp[i\theta_k(t) + i\Omega_N t + 2\pi i k / N]$ .

Следующим шагом в редукции системы является искусственное уменьшение числа степеней свободы. В системах с числом вихрей  $N$ , представимых в виде произведения двух целых сомножителей  $N = M \cdot K$ , можно предположить, что выполнено представление:

$$z_n = R \exp(i\Omega_N t + 2\pi i n_k / N) \zeta_k; \quad n_k = Km + k;$$

$$m = 0, \dots, M-1; \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Вихревой  $N$ - угольник в этом случае рассматривается как  $K$  отдельных правильных вихревых  $M$ - угольников, центры которых совпадают. Движение каждого из них в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega_N$ , определяется зависимостью  $\zeta_k(t)$ . По-видимому, впервые такое представление для описания динамики системы точечных вихрей было предложено в [10]. Подстановка выражений для  $z_n$  через  $\zeta_k$  в (1) приводит к уравнениям

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = -i\Omega_N \zeta_k + \frac{i\Omega_M}{\zeta_k} + \frac{i\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{l=0, l \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_l \exp\left(2\pi i \frac{k-n_l}{N}\right) \right]^{-1}, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Для модуля и аргумента в полярном представлении переменных  $\zeta_k = \rho_k \exp(i\theta_k)$  выполнены уравнения:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{l=0, l \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\rho_l \sin \vartheta_{kl}}{\Delta_{kl}^2}, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = -\Omega_N + \frac{\Omega_M}{\rho_k^2} + \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{l=0, l \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\rho_k - \rho_l \cos \vartheta_{kl}}{\rho_k \Delta_{kl}^2}, \quad (3)$$

здесь  $\Delta_{kl}^2 = \rho_k^2 + \rho_l^2 - 2\rho_k \rho_l \cos \vartheta_{kl}$ ,  $\vartheta_{kl} = \theta_k - \theta_l + 2\pi \left( \frac{k-l}{N} - \frac{m}{M} \right)$ .

Любое решение уравнений (2)–(3) удовлетворяет также уравнениям (1), при этом выбор разложения на множители  $M$  и  $K$  в уравнениях (2)–(3) предоставляет возможность формального рассмотрения систем с различным числом степеней свободы для описания движения  $N$  вихрей. Предельное упрощение описания, отличное от описания твердотельного вращения, достигается при  $K = 2$ ,  $N = 2M$ . Предполагается, что координаты вихрей  $z_n$  определяются набором четырех параметров  $(\rho_0, \theta_0)$ ,  $(\rho_1, \theta_1)$ :  $z_{2m}(t) = R\rho_0(t) \exp[i\theta_0(t) + i\Omega_N t + 2\pi i m / M]$  для вихрей с четными номерами и  $z_{2m+1}(t) = R\rho_1(t) \exp[i\theta_1(t) + i\Omega_N t + 2\pi i m / M + \pi i / M]$  для вихрей с нечетными номерами, здесь  $m = 0, \dots, M-1$ .

Сохранение объема фазового пространства в консервативной системе приводит к условию  $\rho_0^2 + \rho_1^2 = 2$ , следствием инвариантности системы к поворотам относительно центра  $\rho = 0$  является необходимость замены фазовых угловых переменных  $\theta_0, \theta_1$  переменной, инвариантной к повороту. Такой угловой переменной является  $\varphi = \theta_0 - \theta_1$ . Таким образом, понижение порядка на две единицы в системе  $(\rho_0, \theta_0)$ ,  $(\rho_1, \theta_1)$  приводит к динамической системе на плоскости  $\zeta$ . Амплитудой и угловой переменной решения являются  $\rho_0$  и  $\varphi$ , соответственно. Величиной  $\rho_1$  в формулировке уравнений движения далее обозначим главное значение квадратного корня  $\rho_1 = \sqrt{2 - \rho_0^2}$ . Для систем с  $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  редуцированную систему уравнений удастся получить из уравнений (2), (3) с помощью алгебраических преобразований. Редуцированные уравнения описывают нелинейные колебания в соответствующих вихревых системах, при этом сами по себе уравнения колебаний образуют последовательность, в которой можно увидеть выполнение определенных формальных закономерностей.

## 2. Уравнения нелинейных колебаний в системах 2, 4, 6, 8, 10, 12 вихрей

Система двух вихрей приводит к тривиальному преобразованию уравнений (2), (3) при  $N = 2$ ,  $K = 2$ ,  $M = 1$ . В этом случае каждое из «колец вихрей» состоит из единственного вихря, единственным возможным движением в этой системе является твердотельное вращение. Система уравнений

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \frac{\rho_1 \sin \varphi}{1 + \rho_0 \rho_1 \cos \varphi}, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \frac{\cos \varphi}{1 + \rho_0 \rho_1 \cos \varphi} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right), \quad (5)$$

очевидно имеет решение  $\rho_0 = \rho_1 = 1$ ,  $\varphi = 0$ , соответствующее твердотельному вращению. Любое другое решение соответствует движению кольца со смещенным центром и измененным расстоянием между вихрями относительно тривиальной конфигурации. Решения являются нейтрально устойчивыми по отношению к тривиальному решению. Визуализация этого решения выглядит как нелинейные колебания.

Система четырех вихрей  $N = 4$ ,  $K = 2$ ,  $M = 2$  описывается уравнениями:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{\Gamma}{\pi R^2 \rho_0} \frac{\sin(2\varphi)}{\nu + \nu^{-1} - 2 \cos(2\varphi)}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\nu + \nu^{-1} + 4 - 6 \cos(2\varphi)}{\nu + \nu^{-1} - 2 \cos(2\varphi)}, \quad (7)$$

здесь  $\nu = 1 - 2/\rho_0^2$ .

Система шести вихрей  $N = 6$ ,  $K = 2$ ,  $M = 3$  описывается уравнениями:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{3\Gamma}{4\pi R^2} \frac{\rho_0^2 \rho_1^3 \sin(3\varphi)}{4 - 3\rho_0^2 \rho_1^2 + \rho_0^3 \rho_1^3 \cos(3\varphi)}, \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{8 - 12\rho_0^2 \rho_1^2 + 5\rho_0^3 \rho_1^3 \sin(3\varphi)}{4 - 3\rho_0^2 \rho_1^2 + \rho_0^3 \rho_1^3 \cos(3\varphi)}. \quad (9)$$

Уравнения для системы восьми вихрей  $N = 8$ ,  $K = 2$ ,  $M = 4$ , полученные ранее в [16], имеют эквивалентную форму:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{2\Gamma}{\pi R^2 \rho_0} \frac{\sin(4\varphi)}{\nu^2 + \nu^{-2} + 2 \cos(4\varphi)}, \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{3(\nu^2 + \nu^{-2}) + 8(\nu + \nu^{-1} - 1) + 14 \cos(4\varphi)}{\nu^2 + \nu^{-2} + 2 \cos(4\varphi)}. \quad (11)$$

Уравнения для системы десяти вихрей  $N = 10$ ,  $K = 2$ ,  $M = 5$ :

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{5\Gamma}{4\pi R^2} \frac{\rho_0^4 \rho_1^5 \sin(5\varphi)}{16 - 20\rho_0^2 \rho_1^2 + 5\rho_0^4 \rho_1^4 + \rho_0^5 \rho_1^5 \cos(5\varphi)}, \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{64 - 120\rho_0^2 \rho_1^2 + 40\rho_0^4 \rho_1^4 + 9\rho_0^5 \rho_1^5 \cos(5\varphi)}{16 - 20\rho_0^2 \rho_1^2 + 5\rho_0^4 \rho_1^4 + \rho_0^5 \rho_1^5 \cos(5\varphi)}. \quad (13)$$

Система двенадцати вихрей  $N = 12$ ,  $K = 2$ ,  $M = 6$  описывается уравнениями:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{3\Gamma}{\pi R^2 \rho_0} \frac{\sin(6\varphi)}{\nu^3 + \nu^{-3} - 2 \cos(6\varphi)}, \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{5(\nu^3 + \nu^{-3}) + 12(\nu^2 - \nu + 1 - \nu^{-1} + \nu^{-2}) - 22 \cos(6\varphi)}{\nu^3 + \nu^{-3} - 2 \cos(6\varphi)}. \quad (15)$$

### 3. Нелинейные колебания в вихревых системах

Решение уравнений (6)–(7), (8)–(9), (10)–(11), (12)–(13), (14)–(15) получено численным интегрированием метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Ниже приводятся результаты численного решения этих уравнений, иллюстрирующие свойства соответствующих динамических систем.

Фазовый портрет, полученный для системы четырех вихрей, приведен на рис. 1. Фазовое пространство делится на области четырех типов. Области *A* образуются фазовыми кривыми, соответствующими устойчивым возмущениям решения

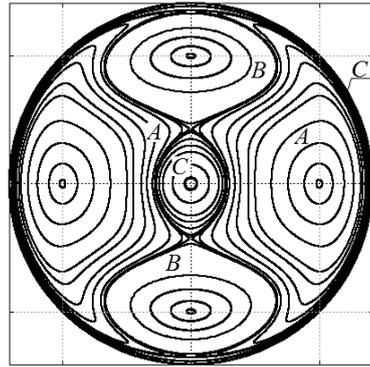


Рис. 1 – Фазовые кривые в системе четырех вихрей

Fig. 1 – Phase portrait of the four vortex system

Кельвина  $\rho_0 = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ . В этом случае имеет место вращение вихревых колец относительно положения равновесия, в системе двух вихрей при  $N = 2$ ,  $K = 2$ ,  $M = 1$  такие решения заполняют все фазовое пространство.

Области *A* граничат с областями *B* и *C*, соответствующими иным типам движений. Центры областей *B*  $\rho_0 = 1$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$  являются неподвижными точками уравнений (6)–(7), правые части уравнений имеют в этих точках устранимые особенности.

Решения, соответствующие фазовым кривым из областей *B* и решения, фазовые кривые которых принадлежат областям *A*, на физической плоскости выглядят как колебания колец, образованных вихрями, относительно положения равновесия в центре области. В отдельные моменты времени вихри оказываются сгруппированными в пары, расстояние между вихрями в парах может быть существенно меньше размеров колец. Визуализация решений, принадлежащих области *B*, выглядит как движение взаимодействующих пар.

Областям *C* соответствуют решения, в которых кольца, образованные вихрями, не совершают обмена положениями. В этом случае одно кольцо образовано вихрями, сгруппированными в окрестности начала координат  $\rho_0 \rightarrow 0$ , а другое образовано вихрями, оказавшимися на периферии  $\rho_1 \rightarrow \sqrt{2}$ . Визуализация такого решения выглядит как реализация «планетарного» движения периферийных вихрей, при этом группирование вихрей в окрестности начала координат может рассматриваться как приближение к состоянию коллапса в системе.

Границы, разделяющие области *A*, *B*, *C*, являются характеристиками уравнений (6), (7), соединяющими седловые точки, находящиеся в углах области *A*:  $\rho_0 = 1/\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ .

Известно, что решение Кельвина устойчиво в вихревых системах с числом вихрей  $N \leq 7$ . Сопоставление рис. 1 и рис. 2 позволяет видеть также, что в системах четырех и шести вихрей структуры фазовых пространств не имеют

Решения, соответствующие фазовым кривым из областей *B* и решения, фазовые кривые которых принадлежат областям *A*, на физической плоскости выглядят как колебания колец, образованных вихрями, относительно положения равновесия в центре области.

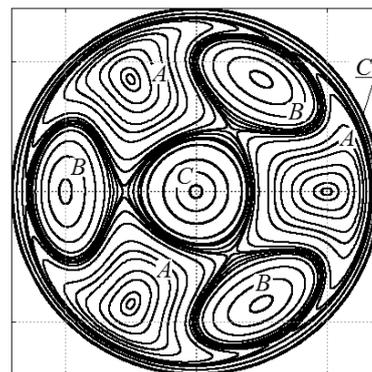


Рис. 2 – Фазовые кривые в системе шести вихрей

Fig. 2 – Phase portrait of the six vortex system

качественных различий, кроме числа областей типа  $A$  и  $B$  на фазовой плоскости. Характеристики уравнений (8), (9), образующих границы областей  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в системе шести вихрей, соединяют седловые точки:  $\rho_0 = \sqrt{1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{21}}/5}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = \pm 2\pi/3$ .

Качественное изменение свойств устойчивости правильной полигональной системы происходит при переходе к системе с числом вихрей  $N > 7$ . Фазовый портрет такой системы при  $N = 8$ ,  $K = 2$ ,  $M = 4$  представлен на рис. 3. Изменение устойчивости решения Кельвина в системах восьми вихрей по сравнению с устойчивыми системами  $N = 4, 6$  имеет топологический характер и обусловлено изменением типа неподвижных точек  $\rho_0 = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ , которые в системе восьми вихрей становятся седловыми точками. Появление седловых точек приводит к образованию секторов  $A_1$  и  $A_2$  с центрами в точках  $\rho_0 = \sqrt{6}/\sqrt{7 \pm \sqrt{7}}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ . Седловые точки и центры секторов  $A_1$  и  $A_2$  принадлежат кривым  $\rho_{\pm}(\varphi)$  на которых выполнены условия  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Уравнение (11) позволяет найти зависимости  $\rho_{\pm}(\varphi)$  в явном виде:

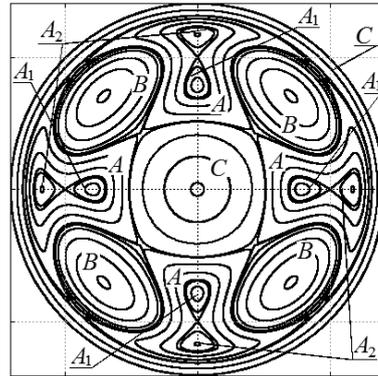


Рис. 3 – Фазовые кривые в системе восьми вихрей

Fig. 3 – Phase portrait of the eight vortex system

$$\rho_{\pm} = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5\sqrt{2} + \psi} (\sqrt{5\sqrt{2} + \psi} \pm \sqrt{\psi - \sqrt{2}})}},$$

здесь  $\psi = \sqrt{29 - 21\cos(4\varphi)}$ .

Границы секторов  $A_1$  и  $A_2$  образуют внутреннюю границу области  $A$ , являющуюся траекторией уравнений (10)–(11) и проходящей через точку перегиба на кривых  $\rho_{\pm}(\varphi)$ . Приближенное значение  $\varphi = 31\pi/736$  принималось в расчетах для нахождения границ секторов  $A_1$  и  $A_2$  по положению точки перегиба. Внешняя граница области  $A$  на рис. 3 образована характеристиками уравнений (10)–(11), соединяющими седловые точки:  $\rho_0 = \sqrt{3}/\sqrt{5 \pm \sqrt{10}}$ ,  $\varphi = \pm\pi/4$ ,  $\varphi = \pm 3\pi/4$ . Появление седловой точки в положении  $\rho_0 = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\varphi = \pi$  соответствует переходу к состоянию неустойчивости твердотельного вращения в системе восьми вихрей. С неустойчивыми решениями соседствуют устойчивые, фазовые кривые которых заполняют области  $A$ . Области фазовой плоскости, соответствующие неустойчивым и устойчивым решениям, имеют общую предельную точку – седловую точку  $\rho_0 = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ .

При рассмотрении фазового портрета системы десяти вихрей (рис. 4) обнаруживается распад области  $A$  на секторы  $A_1$  и  $A_2$ . Центры областей  $A_1$  и  $A_2$  опре-

деляются условиями  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm 2\pi/5$ ,  $\varphi = \pm 4\pi/5$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Из уравнения (13) для нахождения положения центров следует алгебраическое уравнение:  $9x^3 + 22x^2 - 8x - 16 = 0$ , в котором предполагается  $x = \rho_0\rho_1$ . Решения  $\rho_0^{A_1} \approx 0,72137257421925$ ,  $\rho_0^{A_2} \approx 1,216396979503776$  определяют положения центров областей  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Границы областей  $A_1$  и  $A_2$  являются характеристиками уравнений (12)-(13), проходящими через седловые точки, заданные условиями:  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = \pm\pi/5$ ,  $\varphi = \pm 3\pi/5$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Положение седловых точек определяется алгебраическим уравнением  $9x^3 - 22x^2 - 8x + 16 = 0$ .

Решения  $\rho_0^{S_1} = 0,63768408311479$ ,  $\rho_0^{S_2} = 1,26228323699422$  определяют положения седловых точек, через которые проходят границы областей  $A_1$  и  $A_2$ . Секторы  $A_1$  и  $A_2$  отделены от областей  $B$  и  $C$  фазовыми кривыми, соответствующими режиму движения без обмена положениями колец.

Фазовое пространство в системе двенадцати вихрей (рис. 5) имеет структуру, похожую на структуру фазового пространства в системе десяти вихрей. Выражения  $\rho_0 = 2\sqrt{5}/\sqrt{27 \pm 3\sqrt{21}}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm\pi/3$ ,  $\varphi = \pm 2\pi/3$ ,  $\varphi = \pi$  задают положение центров областей  $A_1$  и  $A_2$  соответственно.

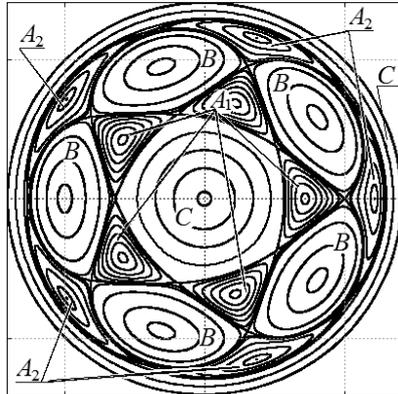


Рис. 4 – Фазовые кривые в системе десяти вихрей

Fig. 4 – Phase portrait of the ten vortex system

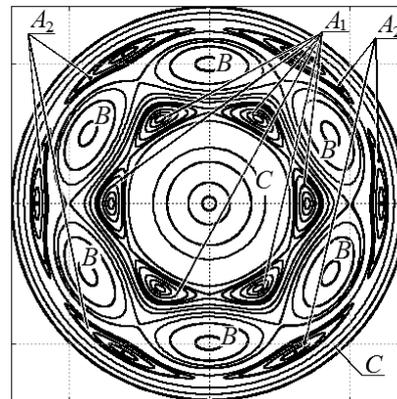


Рис. 5 – Фазовые кривые в системе двенадцати вихрей

Fig. 5 – Phase portrait of the twelve vortex system

Выражения  $\rho_0 = 2\sqrt{10}/\sqrt{37 + \sqrt{489} \pm \sqrt{2}\sqrt{189 + 17\sqrt{489}}}$ ,  $\varphi = \pm\pi/6$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\varphi = \pm 5\pi/6$  определяют седловые точки в углах областей  $A_1$  и  $A_2$ .

Область фазового пространства, отвечающая движению колец вихрей без обмена положениями, в системе двенадцати вихрей становится более выраженной по сравнению с системой десяти вихрей.

### Заключение

Представленные решения свидетельствуют о существовании неисследованных возможностей в изучении поведения вихревых систем. Представляет интерес получение сокращенного описания вихревых систем в других ситуациях: могут быть рассмотрены конфигурации, отличные от полигональных, несингулярные носители завихренности, модели возникновения и коллапса вихрей. Ключевым моментом является возможность моделирования процессов уравнениями с фазовым пространством малой размерности. Представляется возможным также исследование устойчивости решений уравнений (2), (3) по отношению к возмущениям общего вида уравнений (1). Графическое сходство фазовых портретов динамики вихревых систем, в частности полученных в настоящей работе, с известными изображениями линий тока сдвиговых течений в гидродинамическом описании представляется не случайным. По мнению автора, представленные результаты могут служить основанием для поиска аналогий между рассматриваемой упрощенной задачей динамики вихрей и задачами гидродинамической устойчивости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С.** Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*. – 2005. – Т. 1, № 2. – С. 233–246.
2. **Борисов А.В., Мамаев И.С.** Динамика двух вихревых колец на сфере // *Нелинейная динамика*. – 2006. – Т. 2, № 2. – С. 181–192.
3. **Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н.** О построении дискретных вихревых моделей течений идеальных несжимаемых жидкостей // *ЖВММФ*. – 1986. – Т. 26, № 1. – С. 103–113.
4. **Рудяк В.Я., Савченко С.О.** О развитии неустойчивости в кольцевых сдвиговых слоях // *Доклады АН ВШ РФ*. – 2002. – № 2 (6). – С. 42–51.
5. **Kelvin W.T.** Floating magnets (illustrating vortex systems) // *Mathematical and Physical Papers*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1910. – Vol. 4. – P. 135–140.
6. **Thompson J.J.** A treatise on the motion of vortex rings. – London: Macmillan, 1883. – P. 94.
7. **Havelock T.H.** The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1931. – Vol. 11, N 70. – P. 617–633. – doi: 10.1080/14786443109461714.
8. **Куракин Л.Г., Юдович В.И.** О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Доклады Академии наук*. – 2002. – Т. 384, № 4. – С. 476–482.
9. **Куракин Л.Г.** Об устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника внутри круга // *Нелинейная динамика*. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 465–488.
10. **Lewis D., Ratiu T.** Rotating n-gon/kn-gon vortex configurations // *Journal of Nonlinear Science*. – 1996. – Vol. 6. – P. 385–414. – doi: 10.1007/BF02440160.
11. **Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф.** Устойчивость полигональной системы гауссовских вихрей // *Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: тезисы докладов*. – Новосибирск, 2005. – С. 110–111.
12. **Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф.** Линейная устойчивость системы гауссовских вихрей // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 8–17.
13. **Rudyak V.Ya., Bord E.G., Kranchev D.F.** Stochastic properties of a system of point vortices // *Technical Physics Letters*. – 2004. – Vol. 30, N 3. – P. 225–227. – doi: 10.1134/1.1707175.
14. **Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф.** Динамический хаос в полигональной системе точечных вихрей // *Доклады АН ВШ РФ*. – 2004. – № 2. – С. 48–57.

15. Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. Устойчивость некоторых дискретных вихревых систем // Потоки и структуры в жидкостях: тезисы докладов. – М., 2005. – С. 268–269.
16. Борд Е.Г. О нелинейных возмущениях правильной полигональной системы вихрей // Нелинейная динамика. – 2006. – Т. 2, № 3. – С. 53–360. – doi: 10.20537/nd0603008.
17. Борд Е.Г. Нелинейные возмущения правильной полигональной вихревой системы // Современные проблемы теоретической и прикладной механики: тезисы докладов Всероссийского семинара по теоретической и прикладной механике, Новосибирск, 10–12 апреля 2007 г. – Новосибирск, 2007. – С. 27.
18. Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. Устойчивость и динамический хаос в дискретных вихревых системах // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: тезисы докладов. – Н. Новгород, 2006. – Т. 2. – С. 36–37.
19. Bord E.G. Nonlinear disturbances of vortex octagon [Electronic resource] // IV International Symposium on Bifurcation and Instabilities in Fluid Dynamics, Barcelona, Spain, 18–21 July 2011. – URL: <http://congress.cimne.com/bifd2011/Admin/Files/FileAbstract/a4.pdf> (accessed: 07.04.2017).

### NONLINEAR OSCILLATIONS IN TWO REGULAR CLOSED VORTEX POLYGON SYSTEM

**Bord E.G.**

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,  
Novosibirsk, Russia*

Regular behavior of disturbances of vortex polygon rigid body rotation known as the Kelvin solution is modeled. A reduction procedure applied to equations of the dynamics of the vortex system is used to derive a solution which is a generalization of the Kelvin solution. A reduced system includes the Kelvin solution as a partial case. As a result of the reduction second-order equations describing particular solutions of dynamic equations of systems of two, four, six, eight, ten, twelve vortices are obtained. Numerical solutions of these equations are obtained. The structure of phase space solutions is described. Phase portraits of the solutions illustrate the change in stability of systems depending on the number of vortices. The stability property known for systems with a small number of vortices (less than eight), manifests itself in the fact that a fixed point corresponding to the Kelvin solution, is an interior point of the region formed by closed phase curves. When considering unstable systems with eight, ten and twelve vortices the bifurcation of neutral oscillation areas is observed. In this case the Kelvin solution is a limiting one for solutions belonging to different areas of the phase space. The phase portraits of systems of eight, ten and twelve vortices are typical, which suggests the existence of a universal mechanism of a chaotic behavior in these systems.

*Keywords:* stability, nonlinear oscillations, point vortices, Kelvin solution.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-1-7-18

#### REFERENCES

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Reduktsiya i khaoticheskoe povedenie tochechnykh vikhrei na ploskosti i sfere [Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere]. *Nelineinaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 1, no. 2, pp. 233–246.
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika dvukh vikhrevykh kolets na sfere [Dynamics of two vortex rings on a sphere]. *Nelineinaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 2, no. 2, pp. 181–192.
3. Veretentsev A.N., Rudyak V.Ya., Yanenko N.N. O postroenii diskretnykh vikhrevykh modelei techenii ideal'nykh neszhimaemykh zhidkostei [On the discrete vortex modeling of the ideal inviscid fluid flow]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki – Com-*

- putational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, no. 1, pp. 103–113. (In Russian)
4. Rudyak V.Ya., Savchenko S.O. O razvitiu neustoiichivosti v kol'tsevykh sdvigoynykh sloyakh [On instability growth in circular shear layer]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2002, no. 2 (6), pp. 42–51.
  5. Kelvin W.T. Floating magnets (illustrating vortex systems). *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge, Cambridge University Press, 1910, vol. 4, pp. 135–140.
  6. Thompson J.J. *A treatise on the motion of vortex rings*. London, Macmillan, 1883, p. 94.
  7. Havelock T.H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633. doi: 10.1080/14786443109461714.
  8. Kurakin L.G., Yudovich V.I. O nelineinoy ustoichivosti statsionarnogo vrashcheniya pravil'nogo vikhrevoogo mnogougol'nika [On nonlinear stability of steady rotation of a regular vortex polygon]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Physics*, 2002, vol. 384, no. 4, pp. 476–482. (In Russian)
  9. Kurakin L.G. Ob ustoichivosti tomsonovskogo vikhrevoogo pyatiugol'nika vnutri kruga [On the stability of Thomson's vortex pentagon inside a circular domain]. *Nelineinaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 465–488.
  10. Lewis D., Ratiu T. Rotating n-gon/kn-gon vortex configurations. *Journal of Nonlinear Science*, 1996, vol. 6, pp. 385–414. doi: 10.1007/BF02440160.
  11. Bord E.G., Kranchev D.F. [Stability of the polygonal system of Gaussian vortices]. *Lavrent'evskie chteniya po matematike, mekhanike i fizike: tezisy dokladov* [Lavrentyev readings on mathematics, mechanics and physics: abstracts]. Novosibirsk, 2005, pp. 110–111.
  12. Bord E.G., Kranchev D.F. Lineinaya ustoichivost' sistemy gaussovskikh vikhrei [Linear stability of a system of Gauss vortices]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2005, vol. 8, no. 3, pp. 8–17. (In Russian)
  13. Rudyak V.Ya., Bord E.G., Kranchev D.F. Stochastic properties of a system of point vortices. *Technical Physics Letters*, 2004, vol. 30, no. 3, pp. 225–227. doi: 10.1134/1.1707175.
  14. Rudyak V.Ya., Bord E.G., Kranchev D.F. Dinamicheskii khaos v poligonal'noi sisteme tochechnykh vikhrei [Dynamical chaos in polygonal vortex system]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2004, no. 2, pp. 48–57.
  15. Rudyak V.Ya., Bord E.G., Kranchev D.F. [Stability of some discrete vortex systems]. *Potoki i struktury v zhidkostyakh: tezisy dokladov* [International Conference "Fluxes and structures in fluids": abstracts]. Moscow, 2005, pp. 268–269. (In Russian)
  16. Bord E.G. O nelineinykh vozmushcheniyakh pravil'noi poligonal'noi sistemy vikhrei [On the nonlinear disturbances of vortex polygon]. *Nelineinaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 2, no. 3, pp. 353–360. doi: 10.20537/nd0603008.
  17. Bord E.G. [Nonlinear perturbations of a regular polygonal vortex system]. *Sovremennye problemy teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: tezisy dokladov Vserossiiskogo seminaru po teoreticheskoi i prikladnoi mekhanike* [Modern problems of theoretical and applied mechanics: proceedings of the All-Russian seminar on theoretical and applied mechanics], Novosibirsk, 10–12 April 2007, p. 27. (In Russian)
  18. Bord E.G., Kranchev D.F. [Stability and dynamic chaos in discrete vortex systems]. *IX Vserossiiskii s'ezd po teoreticheskoi i prikladnoi mekhanike: tezisy dokladov* [Proceedings of the 9th All-Russian congress on theoretical and applied mechanics]. Nizhnii Novgorod, 2006, vol. 2, pp. 36–37. (In Russian)
  19. Bord E.G. Nonlinear disturbances of vortex octagon. *IV International Symposium on Bifurcation and Instabilities in Fluid Dynamics*, Barcelona, Spain, 18–21 July 2011. Available at: <http://congress.cimne.com/bifd2011/Admin/Files/FileAbstract/a4.pdf> (accessed 07.04.2017).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Борд Евгений Григорьевич** – родился в 1962 году, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра теоретической механики, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость течений неньютоновских жидкостей, динамика вихревых систем. Опубликовано 39 научных работ. (Адрес: 630008, Россия, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113. E-mail: ngasu2005@ngs.ru).

**Bord Evgeny Grigorievich** (b. 1962) – Candidate of Sciences (Phys.&Math.), Associate professor of the Theoretical mechanics Department at the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. His research interests are currently focused on hydrodynamic stability of the nonnewtonian fluids flow, vortex dynamics. He is author of 39 scientific papers. (Address: 113, Leninskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia. E-mail: ngasu2005@ngs.ru).

*Статья поступила 12 февраля 2017 г.  
Received February 12, 2017*

---

**To Reference:**

Bord E.G. Nelineinye kolebaniya v sisteme dvukh pravil'nykh vikhrevykh mnogougol'nikov [Nonlinear oscillations in two regular closed vortex polygon system]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2017, no. 1 (34), pp. 7–18. doi: 10.17212/1727-2769-2017-1-7-18