ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2017 октябрь–декабрь № 4 (37)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 530.182; 517.957

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДЭВИ–СТЮАРДСОНА МЕТОДОМ ДИБАР-ОДЕВАНИЯ

В.Г. Дубровский, А.В. Топовский, Ю.М. Остреинов
Новосибирский государственный технический университет

Пятьдесят лет назад был открыт метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений: метод обратной задачи рассеяния. Интегрируемое нелинейное уравнение при этом представляется как условие совместности соответствующих линейных вспомогательных задач. Ключевая идея, лежащая в основе этого метода, – сведение задачи точного интегрирования нелинейных уравнений к решению ряда вспомогательных линейных задач, оказалась необычайно плодотворной. Как оказалось, метод обратной задачи рассеяния применим к широким классам обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, разностных, интегро-дифференциальных и других уравнений.

Многие из нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, такие как уравнение Кортевега де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение синус-Гордон, уравнение одномерного ферромагнетика Гейзенберга, уравнение резонансного волнового взаимодействия, уравнение Кадомцева–Петвиашвили и другие имеют большую степень универсальности и встречаются в самых разнообразных областях физики. В целом, нелинейные интегрируемые уравнения и их локализованные солитонные решения имеют широкую область применения: от теории гравитации и квантовой теории поля, физики плазмы и нелинейной оптики до гидродинамики и физики твердого тела.

В данной работе на примере уравнения Дэви–Стюардсона продемонстрирована принципиальная возможность построения точных периодических решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений в рамках метода дибар-одевания Захарова–Манакова.

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные уравнения, метод дибар-одевания, двумерное интегрируемое нелинейное уравнения Дэви–Стюардсона, периодические решения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-4-14-30

Введение

Первоначально метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был применен к интегрированию одномерных нелинейных эволюционных уравнений с временной и одной пространственными переменными. Сфера применимости МОЗР стремительно расширялась. За последние тридцать пять лет метод обратной задачи рассеяния был обобщен и успешно применен к различным 2+1-мерным нелинейным эволюционным уравнениям с временной и двумя пространственными переменными, таким как уравнения Кадомцева–Петвиашвили [1, 2], Дэви–Стюардсона [3], уравнение Ишимори [4], уравнения Нижника–Веселова–Новикова [5, 6], система Захарова–Манакова, двумерное обобщение уравнения синус-Гордон и т. д. (смотри, например, [7–9]).

В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [10], $\bar{\partial}$-проблема [11] и более общий метод $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова [12–17] являются основными инструментами для построения различных классов точных локализованных решений (2+1)-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

В данной статье, метод $\bar{\partial}$-одевания применяется к построению новых периодических решений системы двумерных интегрируемых уравнений Дэви–Стюардсона (2DДС) [3],

$$
\begin{aligned}
&q_t + \alpha q_{\xi\xi} - \beta q_{\eta\eta} - 2\alpha q \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi + 2\beta q \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta = 0,\\
&p_t - \alpha p_{\xi\xi} + \beta p_{\eta\eta} + 2\alpha p \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi - 2\beta p \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\xi = x - \sigma y, \eta = x + \sigma y$, Здесь и ниже $\partial_\eta \equiv \partial / \partial_\eta$, $\partial_\xi \equiv \partial / \partial_\xi \ldots$ и ∂_η^{-1} – оператор обратный ∂_η. Система 2DДС была установлена в статье Дэви и Стюардсона [18].

Хорошо известны и широко применяются к построению различных классов точных решений уравнения 2DДС $2 \times 2 -$ матричные представления $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = 0$ в форме Лакса различных типов систем уравнений 2DДС. Уравнения 2DДС (1) могут быть представлены также как условие совместности линейных операторов L_1 и L_2 некоторых скалярных вспомогательных задач $L_1\psi = 0$, $L_2\psi = 0$ в форме триадного представления Манакова (с тройкой (L_1, L_2, B)):

$$
[L_1, L_2] = BL_1, \tag{2}
$$

обобщающей представление Лакса $[L_1, L_2] = 0$ условия совместности линейных задач на случай двумерных интегрируемых нелинейных уравнений. Такое представление системы уравнений 2DДС (1) следует из работы [18], в которой было показано, что условие совместности (2) следующих двух линейных вспомогательных задач

$$
\begin{aligned}
L_1\psi &= \psi_{\xi\eta} + V\psi_\eta + U\psi,\\
L_2\psi &= \psi_t + \alpha\psi_{\xi\xi} + \beta\psi_{\eta\eta} + W_1\psi_\eta + W_2\psi_\xi = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $W_1 = 2\beta\partial_\xi^{-1}V_\eta$, $W_2 = 2\alpha\partial_\eta^{-1}U_\xi$ и $B = 2(\beta\partial_\xi^{-1}V_{\eta\eta} - \alpha V_\xi)$ приводит к системе уравнений на полевые переменные U, V:

$$
\begin{aligned}
&U_t - \alpha U_{\xi\xi} + \beta U_{\eta\eta} - 2\alpha(UV)_\xi + 2\beta\left(U\partial_\xi^{-1}V_\eta\right)_\eta = 0,\\
&V_t + \alpha V_{\xi\xi} - \beta V_{\eta\eta} + 2\beta U_\eta - \alpha(V^2)_\xi - 2\alpha\partial_\eta^{-1}U_{\xi\xi} + 2\beta V_\eta \partial_\xi^{-1}V_\eta = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Система (4) при замене зависимых переменных [19]:

$$
V = \frac{-q_\xi}{q}, \quad U = -pq \tag{5}
$$

сводится к системе уравнений Дэви–Стюардсона (1).

Известно несколько типов систем уравнений 2DДС, записываемых в терминах как вещественных $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ $(\sigma = 1)$, так и комплексных $\bar{z} = x - iy$, $z = x + iy$ $(\sigma = i)$ пространственных переменных. Например, при $\sigma = +1$ и вещественных α, β система (1) представляет собой некоторое интегрируемое (2+1)-мерное обощение нелинейного уравнения теплопроводности; при $\sigma = 1$ и мнимых константах $\alpha = -i\alpha_0$, $\beta = i\beta_0$ система (1) сводится к системе уравнений, известных как система уравнений ДС-1:

$$
\begin{aligned}
&iq_t + \alpha_0 q_{\xi\xi} + \beta_0 q_{\eta\eta} - 2\alpha_0 q \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi - 2\beta_0 q \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta = 0, \\
&ip_t - \alpha_0 p_{\xi\xi} - \beta_0 p_{\eta\eta} + 2\alpha_0 p \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi + 2\beta_0 p \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Очевидно, последняя система допускает редукцию $p = \varepsilon\overline{q}$ к одному уравнению ДС-2 для комплексного поля q

$$
iq_t + \alpha_0 q_{\xi\xi} + \beta_0 q_{\eta\eta} - 2\alpha_0 \varepsilon q \partial_\eta^{-1}(\overline{q}q)_\xi - 2\beta_0 \varepsilon q \partial_\xi^{-1}(\overline{q}q)_\eta = 0, \tag{7}
$$

являющемуся некоторым (2+1)-мерным интегрируемым обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера.

Отметим, что в переменных q и p линейные вспомогательные задачи (3) принимают следующий вид:

$$
L_1 = \psi_{\xi\eta} - \frac{q_\xi}{q}\psi_\eta - pq\psi = 0,
$$

$$
L_2 = \psi_t + \alpha\psi_{\xi\xi} + \beta\psi_{\eta\eta} - 2\beta\frac{q_\eta}{q}\psi_\eta - 2\alpha\left(\partial_\eta^{-1}(pq)_\xi\right)\psi_\xi = 0. \tag{8}
$$

Условие совместности этих линейных задач, записанное в форме триадного представления (2) Манакова, имеет вид

$$
[L_1, L_2] = BL_1 = 2\left(\alpha(\ln(q))_{\xi\xi} - \beta\left(\ln(q)_{\eta\eta}\right)\right)L_1. \tag{9}
$$

В настоящей работе строятся новые точные периодические решения уравнений (1) и (6), (7). Статья организована следующим образом. Во втором разделе приводятся для удобства основные формулы метода $\overline{\partial}$-одевания для уравнения 2ДДС (1). В третьем и четвертом разделах представлены новые периодические точные решения различных типов уравнений 2ДДС.

1. Основные формулы метода $\overline{\partial}$- одевания для уравнений 2ДДС

В этом разделе приведены некоторые важные для дальнейшего изложения формулы метода $\overline{\partial}$-одевания для уравнений 2ДДС (1) (см. детали в [9]).

Сначала постулируется нелокальная $\overline{\partial}$-проблема [12–14] для волновой фунции χ:

$$
\frac{\partial\chi(\lambda, \overline{\lambda})}{\partial\overline{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda, \overline{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu, \overline{\mu}) R(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda}) d\mu \wedge d\overline{\mu}, \tag{10}
$$

где χ и R в рассматриваемом случае – скалярные комплексные функции.

Используется решение $\overline{\partial}$-проблемы с канонической нормировкой, $\chi \to 1$ при $\lambda \to \infty$, эквивалентное решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$
\chi(\lambda) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\overline{\lambda'}}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint_C \chi\left(\mu, \overline{\mu}\right) R\left(\mu, \overline{\mu}; \lambda', \overline{\lambda'}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu}. \tag{11}
$$

Зависимость ядра R $\overline{\partial}$-проблемы от пространственных и временных переменных x, y, t для уравнения 2ДДС (1) имеет вид [19]:

$$R(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}; \qquad (12)$$

$$F(\lambda) := i\left(\lambda\xi - \frac{\varepsilon}{\lambda}\eta\right) + \left(\alpha\lambda^2 + \frac{\beta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right)t. \qquad (13)$$

Далее с использованием операторов «удлиненных» производных $D_\xi = \partial_\xi + i\lambda$, $D_\eta = \partial_\eta + i\varepsilon/\lambda$, $D_t = \partial_t + \alpha\lambda^2 + \beta\varepsilon^2/\lambda^2$ рассматриваемым нелинейным уравнениям сопоставляются линейные вспомогательные задачи

$$L_1\chi = (D_\xi D_\eta + VD_\eta + U)\chi = 0,$$
$$L_2\chi = \left(D_t + \alpha D_\xi^2 + \beta D_\eta^2 + W_1 D_\eta + W_2 D_\xi\right)\chi = 0 \qquad (14)$$

для волновой функции χ, связанной с волновой функцией ψ соответствующих задач (3) соотношением $\psi := \chi e^{F(\lambda; x, y, t)}$.

Формулы реконструкции выражают полевые переменные вспомогательных задач (3), (14) через коэффициенты разложений волновой функции χ в ряды в окрестностях точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$:

$$\lambda = 0: \quad \chi = \chi_0 + \chi_1\lambda + \chi_2\lambda^2 + \ldots; \quad \lambda = \infty: \quad \chi = \tilde{\chi}_0 + \frac{\chi_{-1}}{\lambda} + \frac{\chi_{-2}}{\lambda^2} + \ldots, \qquad (15)$$

где коэффициенты χ_{-1} и $\tilde{\chi}_0$ разложений, даются выражениями:

$$\chi_{-1} = -\iint_C \frac{d\lambda \wedge d\overline{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \overline{\mu})R(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda})d\mu \wedge d\overline{\mu}; \qquad (16)$$

$$\tilde{\chi}_0 = 1 + \iint_C \frac{\lambda d\lambda \wedge d\overline{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \overline{\mu})R(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda})d\mu \wedge d\overline{\mu}. \qquad (17)$$

Нужные для построения решений V и U системы (4) формулы реконструкции потенциалов V, U линейных вспомогательных задач (3), (14) в силу (14), (15) имеют следующий вид [19]:

$$V = -\tilde{\chi}_{0\xi}/\tilde{\chi}_0, \quad U = -\varepsilon - i\chi_{-1\eta}. \qquad (18)$$

В терминах полевых переменных p, q, связанных с потенциалами V, U $V = -q_\xi/q$ первой вспомогательной задачи (3), формулы реконструкции (18) дают [21]:

$$q = \tilde{\chi}_0, \qquad p = -U/q = (\varepsilon + i\chi_{-1\eta})/\tilde{\chi}_0. \qquad (19)$$

Возможность построения периодических решений 2+1 мерных интегрируемых нелинейных уравнений с помощью метода $\overline{\partial}$- одевания была продемонстрирована в работах Дубровского, Топовского, Басалаева на примерах уравнения Нижника–Веселова–Новикова и двумерных обобщений уравнений Савады–Котера (2DСК) и Каупа–Купершмидта (2DКК) [20]. Развитую в указанных работах методику, как показано в настоящей работе, можно применить и для построения новых точных периодических решений двумерных интегрируемых уравнений Дэви–Стюардсона, в частности для уравнения ДС-2. В настоящей работе изложены результаты по периодическим решениям (2+1)-мерных интегрируемых нелинейных уравнений (4) и нескольких версий уравнений Дэви–Стюардсона 2DДС типа (1), (6) и (7). Показано, что метод $\bar{\partial}$-одевания с успехом может быть применен для построения не только локализованных, но и периодических решений двумерных интегрируемых уравнений, при этом выясняется, что используемые приемы являются достаточно общими и не зависят от конкретного уравнения.

2. Двумерное обобщение нелинейного уравнения Шрёдингера. Случай одного слагаемого в ядре $\bar{\partial}$-проблемы

В данном разделе приводятся результаты вычислений периодических решений для систем уравнений (4), (6) и (7) для случая уравнений ДС-1, соответствующих выбору $\sigma = 1$ и мнимым константам $\alpha = -i\alpha_0$, $\beta = i\beta_0$. Уравнение (7) при этом можно рассматривать как некоторое двумерное обобщение нелинейного уравнения Шрёдингера.

Выпишем некоторые ключевые формулы, необходимые для вычислений точных решений, для случая одного факторизованного δ-образного слагаемого ядра R_0:

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\lambda) = \pi a_1 \delta(\mu - \mu_1)\delta(\lambda - \lambda_1). \tag{20}$$

Интегральное уравнение (11) соответствующей $\bar{\partial}$-проблемы для волновой функции χ с канонической нормировкой $\chi|_{\lambda\to\infty} \to 1$ и указанным ядром дает

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = 1 - 2i\frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}\chi(\mu_1, \overline{\mu_1})e^{F(\mu_1)-F(\lambda_1)}, \tag{21}$$

где

$$F(\mu_k) - F(\lambda_k) = \Delta F_k == i(\mu_k - \lambda_k)\xi - i\left(\frac{\varepsilon}{\mu_k} - \frac{\varepsilon}{\lambda_k}\right)\eta -$$

$$-i\alpha_0({\mu_k}^2 - {\lambda_k}^2)t + i\beta_0\left(\frac{\varepsilon^2}{{\mu_k}^2} - \frac{\varepsilon^2}{{\lambda_k}^2}\right)t. \tag{22}$$

Из (21) определяем волновую функцию $\chi(\mu_1, \bar{\mu}_1)$ в точке $(\mu_1, \bar{\mu}_1)$:

$$\chi(\mu_1, \bar{\mu}_1) = \frac{1}{1 - \frac{2ia_1}{\lambda_1 - \mu_1}e^{\Delta F_1}}. \tag{23}$$

Из (21), с учетом (23), определяем нужные для построения потенциалов V и U по формулам реконструкции (18) коэффициенты разложения $\tilde{\chi}_0$, χ_{-1} в ряды Тейлора в окрестностях точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ (15). Для указанных коэффициентов получаются следующие выражения:

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{1 - 2\dfrac{|a_1|\mu_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \mu_1)} e^{\Delta\tilde{F}_1}}{1 - 2\dfrac{|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1} e^{\Delta F_1}}, \quad \chi_{-1} = \frac{-2|a_1| e^{\Delta\tilde{F}_1}}{1 - 2\dfrac{|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1} e^{\Delta\tilde{F}_1}}, \tag{24}$$

здесь $\Delta\tilde{F}_1 \doteq \Delta F_1 + i\left(\arg(a_1) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Для построения периодических решений необходимо удовлетворить условиям мнимости фазы $\Delta\tilde{F}_1$ в экспоненте:

$$e^{\Delta\tilde{F}_1} = e^{i\varphi_1 + i\delta_1}, \quad \varphi_k \doteq (\mu_k - \lambda_k)\xi - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_k} - \frac{\varepsilon}{\lambda_k}\right)\eta + \arg(a_1) + \frac{\pi}{2},$$

$$\delta_k = -\alpha_0\left(\mu_k^2 - \lambda_k^2\right)t + \beta_0\left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_k^2} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_k^2}\right)t, \tag{25}$$

т. е. условиям $\overline{\varphi}_1 = \varphi_1$ и $\overline{\delta}_1 = \delta_1$. Условие $\overline{\varphi}_1 = \varphi_1$ приводит к соотношениям:

$$\mu_1 - \lambda_1 = \overline{\mu}_1 - \overline{\lambda}_1, \quad \frac{\varepsilon}{\mu_1} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon}{\overline{\mu}_1} - \frac{\varepsilon}{\overline{\lambda}_1}. \tag{26}$$

Условия (26) выполняются, в частности, при выборе чисто вещественных значений $\mu_1 = \overline{\mu}_1$ и $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$. При этом выборе (μ_1, λ_1), что очевидно, второе условие $\overline{\delta} = \delta$ также удовлетворяется.

С помощью формулы реконструкции (18) находим для потенциала U, с учетом соотношений (24) и (26), следующее выражение:

$$U = -\varepsilon - i\chi_{-1\eta} = -\varepsilon + \frac{2|a_1|\left(\dfrac{\varepsilon}{\mu_1} - \dfrac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)e^{-i\varphi_1 - i\delta_1}}{\left(e^{-i\varphi_1 - i\delta_1} - \dfrac{2|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1}\right)^2}. \tag{27}$$

Условие вещественности для потенциала $U = \overline{U}$ с учетом вещественности $\mu_1 = \overline{\mu}_1$ и $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$ приводит к соотношению

$$|a_1| = \frac{|\lambda_1 - \mu_1|}{2} = \pm\frac{\lambda_1 - \mu_1}{2}. \tag{28}$$

Для коэффициентов разложения $\tilde{\chi}_0$, χ_{-1} с учетом условий (22), (24) получаются следующие выражения:

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{1 - \dfrac{|\lambda_1 - \mu_1|\mu_1}{(\lambda_1 - \mu_1)\lambda_1} e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 - \dfrac{|\lambda_1 - \mu_1|}{\lambda_1 - \mu_1} e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}, \qquad \chi_{-1} = \frac{-|\lambda_1 - \mu_1| e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 - \dfrac{|\lambda_1 - \mu_1|}{\lambda_1 - \mu_1} e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}. \tag{29}$$

Для потенциала U из (27) получаем выражение

$$U=-\varepsilon+\frac{|\lambda_1-\mu_1|\left(\frac{\varepsilon}{\mu_1}-\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)e^{-i\varphi_1-i\delta_1}}{\left(e^{-i\varphi_1-i\delta_1}-\frac{|\lambda_1-\mu_1|}{\lambda_1-\mu_1}\right)^2}. \tag{30}$$

Из (30) при $\lambda_1>\mu_1$ и $\lambda_1<\mu_1$ находим:

$$U\big|_{\lambda_1>\mu_1}=-\varepsilon-\frac{\varepsilon(\lambda_1-\mu_1)^2}{4\lambda_1\mu_1\sin^2\frac{\varphi_1+\delta_1}{2}},\quad U\big|_{\lambda_1<\mu_1}=-\varepsilon-\frac{\varepsilon(\lambda_1-\mu_1)^2}{4\lambda_1\mu_1\cos^2\frac{\varphi_1+\delta_1}{2}}. \tag{31}$$

Для полевой переменной q, используя (19), (29), получаем

$$q\big|_{\lambda_1>\mu_1}=\frac{1-\frac{\mu_1}{\lambda_1}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1-e^{i\varphi_1+i\delta_1}},\quad q\big|_{\lambda_1<\mu_1}=\frac{1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1+e^{i\varphi_1+i\delta_1}}. \tag{32}$$

Для переменной $p=-U/q$ из (31), (32) находим:

$$p\big|_{\lambda_1>\mu_1}=\varepsilon\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{1-\frac{\mu_1}{\lambda_1}e^{-i\varphi_1-i\delta_1}}{1-e^{-i\varphi_1-i\delta_1}}=\varepsilon\frac{\lambda_1}{\mu_1}\overline{q}\big|_{\lambda_1>\mu_1}, \tag{33}$$

$$p\big|_{\lambda_1<\mu_1}=\varepsilon\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}e^{-i\varphi_1-i\delta_1}}{1+e^{-i\varphi_1-i\delta_1}}=\varepsilon\frac{\lambda_1}{\mu_1}\overline{q}\big|_{\lambda_1<\mu_1}.$$

Полученные периодические решения для полей U, q и p, что очевидно, являются сингулярными.

3. Двумерное обощение нелинейного уравнения теплопроводности. Случай одного слагаемого в ядре $\overline{\partial}$-проблемы

В данном разделе приводятся результаты вычислений периодических решений для систем уравнений (1), (4), соответствующих выбору $\sigma=1$ и вещественным константам $\alpha=-\alpha_0,\beta=\beta_0$. Систему (1) можно рассматривать как некоторое интегрируемое (2+1)-мерное обощение нелинейного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} &q_t-\alpha_0 q_{\xi\xi}-\beta_0 q_{\eta\eta}+2\alpha_0 q\partial_\eta^{-1}(pq)_\xi+2\beta_0 q\partial_\xi^{-1}(pq)_\eta=0,\\ &p_t+\alpha_0 p_{\xi\xi}+\beta_0 p_{\eta\eta}-2\alpha_0 p\partial_\eta^{-1}(pq)_\xi-2\beta_0 p\partial_\xi^{-1}(pq)_\eta=0.\end{aligned} \tag{34}$$

Выпишем некоторые ключевые формулы, необходимые для вычислений точных решений системы (34), для случая одного факторизованного δ-образного слагаемого ядра R_0:

$$R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda)=\pi a_1\delta(\mu-\mu_1)\delta(\lambda-\lambda_1). \tag{35}$$

Интегральное уравнение (11) соответствующей $\bar{\partial}$-проблемы для волновой функции χ с канонической нормировкой $\chi|_{\lambda\to\infty} \to 1$ и указанным ядром дает

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = 1 - 2i\frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}\chi\left(\mu_1, \overline{\mu_1}\right)e^{F(\mu_1) - F(\lambda_1)}, \tag{36}$$

где

$$F(\mu_k) - F(\lambda_k) = \Delta F_k = i(\mu_k - \lambda_k)\xi - i\left(\frac{\varepsilon}{\mu_k} - \frac{\varepsilon}{\lambda_k}\right)\eta -$$

$$- \alpha_0\left(\mu_k^2 - \lambda_k^2\right)t + \beta_0\left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_k^2} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_k^2}\right)t. \tag{37}$$

Из (36) определяем волновую функцию $\chi(\mu_1, \bar{\mu}_1)$ в точке $(\mu_1, \bar{\mu}_1)$:

$$\chi(\mu_1, \bar{\mu}_1) = \frac{1}{1 - \dfrac{2ia_1}{\lambda_1 - \mu_1}e^{\Delta F_1}}. \tag{38}$$

Из (16), (17), с учетом (38), определяем нужные для построения потенциалов V и U по формулам реконструкции (18) коэффициенты разложения $\tilde{\chi}_0$, χ_{-1} в ряды Тейлора в окрестностях точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ (15). Для указанных коэффициентов получаются следующие выражения:

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{1 - 2\dfrac{|a_1|\mu_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \mu_1)}e^{\Delta\tilde{F}_1}}{1 - 2\dfrac{|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1}e^{\Delta\tilde{F}_1}}, \quad \chi_{-1} = \frac{-2|a_1|}{e^{-\Delta\tilde{F}_1} - 2\dfrac{|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1}}, \tag{39}$$

где

$$\Delta\tilde{F}_1 = \Delta F_1 + i\left(\arg(a_1) + \pi/2\right). \tag{40}$$

Для построения периодических решений необходимо удовлетворить условиям мнимости фазы $\Delta\tilde{F}_1$ в экспоненте:

$$e^{\Delta\tilde{F}_1} = e^{i\varphi_1 + i\delta_1}, \quad \varphi_k \doteq (\mu_k - \lambda_k)\xi - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_k} - \frac{\varepsilon}{\lambda_k}\right)\eta + \arg(a_1) + \frac{\pi}{2},$$
$$\delta_k = -i\left(-\alpha_0\left(\mu_k^2 - \lambda_k^2\right)t + \beta_0\left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_k^2} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_k^2}\right)t\right), \tag{41}$$

т. е. условиям $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1$ и $\bar{\delta}_1 = \delta_1$, при которых должны выполняться соотношения:

$$\mu_1 - \lambda_1 = \bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1, \quad \frac{\varepsilon}{\mu_1} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}_1} - \frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}_1},$$
$$\mu_1^2 - \lambda_1^2 = -\left(\bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_1^2\right), \quad \frac{\varepsilon^2}{\mu_1^2} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_1^2} = -\frac{\varepsilon^2}{\bar{\mu}_1^2} + \frac{\varepsilon^2}{\bar{\lambda}_1^2}. \tag{42}$$

Соотношения (42) выполняются, в частности, при выборе:

$$\lambda_1 = -\bar{\mu}_1. \tag{43}$$

С помощью формулы реконструкции (18) находим для потенциала U, с учетом соотношений (39) и (43), следующее выражение:

$$U = -\varepsilon - i\frac{\partial\chi_{-1}}{\partial\eta} = -\varepsilon + \frac{2|a_1|\left(\frac{\varepsilon}{\mu_1} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)e^{-i\varphi_1 - i\delta_1}}{\left(e^{-i\varphi_1 - i\delta_1} - \frac{2|a_1|}{\lambda_1 - \mu_1}\right)^2}. \tag{44}$$

Условие вещественности для потенциала $U = \bar{U}$, с учетом (44) приводит к соотношению

$$|a_1| = |\mu_{1R}|. \tag{45}$$

Для коэффициентов разложения $\tilde{\chi}_0$, χ_{-1} из формул (39), (40), с учетом формул (41), (45), получаются следующие выражения:

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{1 - \frac{|\mu_{1R}|\mu_1}{\mu_{1R}\bar{\mu}_1}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 + \frac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}, \quad \chi_{-1} = \frac{-|\mu_{1R}|e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 + \frac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}. \tag{46}$$

Для потенциала U из (44) получаем выражение

$$U = -\varepsilon + \varepsilon\frac{4|\mu_{1R}|\mu_{1R}e^{-i\varphi_1 - i\delta_1}}{|\mu_1|^2\left(e^{-i\varphi_1 - i\delta_1} + \frac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}\right)^2}. \tag{47}$$

Из (47) при $\mu_{1R} > 0$ и $\mu_{1R} < 0$ находим:

$$U\big|_{\mu_{1R}>0} = -\varepsilon + \frac{\varepsilon(\mu_{1R})^2}{|\mu_1|^2\cos^2\frac{\varphi_1 + \delta_1}{2}}, \quad U\big|_{\mu_{1R}<0} = -\varepsilon + \frac{\varepsilon(\mu_{1R})^2}{|\mu_1|^2\sin^2\frac{\varphi_1 + \delta_1}{2}}. \tag{48}$$

Для полевой переменной $q = \tilde{\chi}_0$, используя (39), получаем

$$q = \frac{1 - \frac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}\frac{\mu_1}{\bar{\mu}_1}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 + \frac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}. \tag{49}$$

При $\mu_{1R} > 0$ и $\mu_{1R} < 0$ получаем

$$q\big|_{\mu_{1R}>0} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\bar{\mu}_1}e^{i\varphi_1 + i\delta_1}}{1 + e^{i\varphi_1 + i\delta_1}} = -ie^{i\Delta}\frac{\sin\left(\frac{\varphi_1 + \delta_1 + 2\Delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_1 + \delta_1}{2}\right)} \doteq -ie^{i\Delta}\,\tilde{q}\big|_{\mu_{1R}>0},$$

$$q\Big|_{\mu_{1R}<0}=\frac{1+\dfrac{\mu_1}{\bar{\mu}_1}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1-e^{i\varphi_1+i\delta_1}}=ie^{i\Delta}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1+2\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)}\doteq ie^{i\Delta}\,\tilde{q}\Big|_{\mu_{1R}<0}, \tag{50}$$

где $\Delta\doteq\arg(\mu_1)$. Для полевой переменной $p=\dfrac{-U}{q}$ из (47) и (49), получаем

$$p=\varepsilon\frac{1-\dfrac{\bar{\mu}_1}{\mu_1}\dfrac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1+\dfrac{|\mu_{1R}|}{\mu_{1R}}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}. \tag{51}$$

При $\mu_{1R}>0$ и $\mu_{1R}<0$ получаем

$$p\Big|_{\mu_{1R}>0}=\varepsilon\frac{1-\dfrac{\bar{\mu}_1}{\mu_1}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1+e^{i\varphi_1+i\delta_1}}=-i\varepsilon e^{-i\Delta}\,\frac{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1-2\Delta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)}\doteq -i\varepsilon e^{-i\Delta}\,\tilde{p}\Big|_{\mu_{1R}>0},$$

$$p\Big|_{\mu_{1R}<0}=\varepsilon\frac{1+\dfrac{\bar{\mu}_1}{\mu_1}e^{i\varphi_1+i\delta_1}}{1-e^{i\varphi_1+i\delta_1}}=i\varepsilon e^{-i\Delta}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1-2\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)}\doteq i\varepsilon e^{-i\Delta}\,\tilde{p}\Big|_{\mu_{1R}<0}, \tag{52}$$

где $\Delta\doteq\arg(\mu_1)$.

В терминах вещественных полей $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ система уравнений (34) перепишется в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&\tilde{q}_t-\alpha_0\tilde{q}_{\xi\xi}-\beta_0\tilde{q}_{\eta\eta}-2\varepsilon\alpha_0\tilde{q}\partial_\eta^{-1}(\tilde{p}\tilde{q})_\xi-2\varepsilon\beta_0\tilde{q}\partial_\xi^{-1}(\tilde{p}\tilde{q})_\eta=0,\\
&\tilde{p}_t+\alpha_0\tilde{p}_{\xi\xi}+\beta_0\tilde{p}_{\eta\eta}+2\varepsilon\alpha_0\tilde{p}\partial_\eta^{-1}(\tilde{p}\tilde{q})_\xi+2\varepsilon\beta_0\tilde{p}\partial_\xi^{-1}(\tilde{p}\tilde{q})_\eta=0.
\end{aligned} \tag{53}$$

Согласно построениям данного раздела система уравнений (53) имеет вещественные периодические (сингулярные) решения:

$$\begin{aligned}
&\tilde{q}\Big\|_{\mu_{1R}>0}=\frac{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1+2\Delta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)},\quad \tilde{p}\Big|_{\mu_{1R}>0}=\frac{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1-2\Delta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)},\\
&\tilde{q}\Big\|_{\mu_{1R}<0}=\frac{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1+2\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)},\quad \tilde{p}\Big|_{\mu_{1R}<0}=\frac{\cos\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1-2\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_1+\delta_1}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{54}$$

4. Двумерное обощение нелинейного уравнения Шрёдингера. Случай двух слагаемых в ядре $\bar\partial$-проблемы

В данном разделе приводятся результаты вычислений периодических решений для систем уравнений (6) и (7), соответствующих выбору $\sigma = 1$ и мнимым константам $\alpha = -i\alpha_0$, $\beta = i\beta_0$. Уравнение (7) при этом можно рассматривать как некоторое двумерное обобщение нелинейного уравнения Шрёдингера.

Ядро $\bar\partial$- проблемы (задействованы точки $(\mu_1, -\bar\mu_1)$ и $(-\mu_1, \bar\mu_1)$) имеет вид

$$R_0(\mu, \bar\mu; \lambda, \bar\lambda) = \pi\left(a_1\delta(\mu - \mu_1)\delta(\lambda + \bar\mu_1) + \bar a_1\delta(\mu + \mu_1)\delta(\lambda - \bar\mu_1)\right).$$

Волновая функция $\chi(\lambda, \bar\lambda)$ имеет два простых полюса в точках $\lambda = -\bar\mu_1$ и $\lambda = \bar\mu_1$:

$$\chi(\lambda, \bar\lambda) = 1 -$$

$$-2i\left(\frac{a_1}{\lambda + \bar\mu_1}\chi(\mu_1, \overline{\mu_1})e^{F(\mu_1) - F(-\bar\mu_1)} + \frac{\bar a_1}{\lambda - \bar\mu_1}\chi(-\mu_1, -\bar\mu_1)e^{F(-\mu_1) - F(\bar\mu_1)}\right). \tag{55}$$

Для коэффициентов разложения χ_{-1} и $\tilde\chi_0$ волновой функции $\chi(\lambda, \bar\lambda)$ из (55) в ряды Тейлора (15) по степеням λ и λ^{-1}, в канонической нормировке $\chi|_{\lambda\to\infty} \to 1$, $\chi_0 = 1$, согласно (16), (17), следуют выражения:

$$\chi_{-1} = -2i\left(a_1\chi(\mu_1, \bar\mu_1)e^{\Delta F_1} + \bar a_1\chi(\mu_2, \bar\mu_2)e^{\Delta F_2}\right); \tag{56}$$

$$\tilde\chi_0 = 1 - 2i\frac{a_1}{\bar\mu_1}\chi(\mu_1, \bar\mu_1)e^{\Delta F_1} + 2i\frac{\bar a_1}{\bar\mu_1}\chi(\mu_2, \bar\mu_2)e^{\Delta F_2}, \tag{57}$$

где для указанных пар точек $(\mu_1, \lambda_1) \equiv (\mu_1, -\bar\mu_1)$, $(\mu_2, \lambda_2) \equiv (-\mu_1, \bar\mu_1)$ с учетом определений (22) величин $F(\lambda)$ с $\alpha = -i\alpha_0$, $\beta = i\beta_0$ имеют место выражения для ΔF_1 и ΔF_2:

$$\Delta F_1 \doteq F(\mu_1) - F(\lambda_1) = i\varphi + \delta, \ \Delta F_2 \doteq F(\mu_2) - F(\lambda_2) = -i\varphi + \delta;$$

$$\varphi \doteq 2\mu_{1R}\xi - 2\varepsilon\frac{\mu_{1R}}{|\mu_1|^2}\eta, \tag{58}$$

$$\delta \doteq i\alpha_0\left(\mu_1^2 - \bar\mu_1^2\right)t + i\beta_0\left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_1^2} - \frac{\varepsilon^2}{\bar\mu_1^2}\right)t = 4\left(-\alpha_0 + \beta_0\frac{\varepsilon^2}{|\mu_1|^4}\right)\mu_{1R}\mu_{1I}t.$$

Волновые функции $\chi(\mu_1, \bar\mu_1)$ и $\chi(\mu_2, \bar\mu_2)$ в силу (55) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \left[1 + \dfrac{2ia_1}{\mu_1 - \lambda_1}e^{\Delta F_1}\right]\chi(\mu_1, \bar\mu_1) + \dfrac{2i\bar a_1}{\mu_1 - \lambda_2}e^{\Delta F_2}\chi(\mu_2, \bar\mu_2) = 1, \\ +\dfrac{2ia_1}{\mu_2 - \lambda_1}e^{\Delta F_1}\chi(\mu_1, \bar\mu_1) + \left[1 + \dfrac{2i\bar a_1}{\mu_2 - \lambda_2}e^{\Delta F_2}\right]\chi(\mu_2, \bar\mu_2) = 1. \end{cases} \tag{59}$$

Система уравнений для $\chi(\mu_1,\bar{\mu}_1)$ и $\chi(\mu_2,\bar{\mu}_2)$ для указанных пар точек $(\mu_1,\lambda_1)\equiv(\mu_1,-\bar{\mu}_1)$, $(\mu_2,\lambda_2)\equiv(-\mu_1,\bar{\mu}_1)$, с учетом определений

$$a_1 e^{\Delta F_1}=|a_1|e^{i\tilde{\varphi}+\delta},\quad \bar{a}_1 e^{\Delta F_2}=|a_1|e^{-i\tilde{\varphi}+\delta},\qquad \tilde{\varphi}\doteq\varphi+i\arg(a_1) \tag{60}$$

принимает вид

$$\begin{cases}\left[1+\dfrac{i|a_1|}{\mu_{1R}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}\right]\chi(\mu_1,\bar{\mu}_1)+\dfrac{|a_1|}{\mu_{1I}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}\chi(\mu_2,\bar{\mu}_2)=1,\\ -\dfrac{|a_1|}{\mu_{1I}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}\chi(\mu_1,\bar{\mu}_1)+\left[1-\dfrac{i|a_1|}{\mu_{1R}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}\right]\chi(\mu_2,\bar{\mu}_2)=1.\end{cases} \tag{61}$$

Детерминант системы (61) для выбора пар точек $(\mu_1,\lambda_1)\equiv(\mu_1,-\bar{\mu}_1)$, $(\mu_2,\lambda_2)\equiv(-\mu_1,\bar{\mu}_1)$ имеет вид

$$\Delta=1+i\frac{|a_1|}{\mu_{1R}}\left(e^{i\tilde{\varphi}}-e^{-i\tilde{\varphi}}\right)e^{\delta}+\left(\frac{|a_1|^2}{\mu_{1R}^2}+\frac{|a_1|^2}{\mu_{1I}^2}\right)e^{2\delta}=$$

$$=1-\frac{2|a_1|}{\mu_{1R}}\sin\tilde{\varphi}e^{\delta}+\frac{|a_1|^2|\mu_1|^2}{\mu_{1R}^2\mu_{1I}^2}e^{2\delta}. \tag{62}$$

В силу неравенства

$$1+\frac{|a_1|^2|\mu_1|^2}{\mu_{1R}^2\mu_{1I}^2}e^{2\delta}>\frac{2|a_1||\mu_1|}{|\mu_{1R}||\mu_{1I}|}e^{\delta}>\frac{2|a_1|}{|\mu_{1R}|}e^{\delta} \tag{63}$$

очевидно, что $\Delta\neq 0$, т. е. указанный детерминант не может обращаться в нуль, вычисляемые потенциалы будут несингулярны.

Для волновых функций $\chi(\mu_1,\bar{\mu}_1)$ и $\chi(\mu_2,\bar{\mu}_2)$ из системы (61) получаем следующие выражения:

$$\chi(\mu_1,\overline{\mu_1})==\frac{1-\dfrac{i|a_1|}{\mu_{1R}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}-\dfrac{|a_1|}{\mu_{1I}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}}{\Delta}=\frac{1-\dfrac{\mu_1|a_1|}{\mu_{1R}\mu_{1I}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}}{\Delta}, \tag{64}$$

$$\chi(\mu_2,\overline{\mu_2})=\frac{1+\dfrac{i|a_1|}{\mu_{1R}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}+\dfrac{|a_1|}{\mu_{1I}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}}{\Delta}=\frac{1+\dfrac{\mu_1|a_1|}{\mu_{1R}\mu_{1I}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}}{\Delta}. \tag{65}$$

Подстановкой (64) и (65) в (56) находится χ_{-1}:

$$\chi_{-1}=-\frac{2i}{\Delta}\left[|a_1|e^{i\tilde{\varphi}+\delta}\left(1-\frac{\mu_1|a_1|}{\mu_{1R}\mu_{1I}}e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}\right)+|a_1|e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}\left(1+\frac{\mu_1|a_1|}{\mu_{1R}\mu_{1I}}e^{i\tilde{\varphi}+\delta}\right)\right]=$$

$$=-\frac{2i}{\Delta}\left(|a_1|e^{i\tilde{\varphi}+\delta}+|a_1|e^{-i\tilde{\varphi}+\delta}\right)=-\frac{4i|a_1|e^{\delta}}{\Delta}\cos\tilde{\varphi}. \tag{66}$$

Подставляя (64) и (65) в (57), получаем выражение для полевой переменной q :

$$q = \tilde{\chi}_0 = 1 + \frac{4\mu_1 |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} + i \frac{4|a_1|^2 \mu_1^2 e^{2\delta}}{|\mu_1|^2 \mu_{1R}\mu_{1I}\Delta} = \left(1 + \frac{4\mu_{1R} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} - \frac{8|a_1|^2 e^{2\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \right) +$$

$$+ i \left(\frac{4\mu_{1I} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} + \frac{4|a_1|^2 \left(\mu_{1R}^2 - \mu_{1I}^2\right) e^{2\delta}}{\mu_{1R}\mu_{1I}\Delta |\mu_1|^2} \right). \tag{67}$$

По формуле реконструкции (18) определяем потенциал U:

$$U = -\varepsilon - i\partial_{\eta}\chi_{-1} =$$

$$= -\varepsilon + 16\varepsilon \frac{|a_1|^2 e^{2\delta}}{\Delta^2 |\mu_1|^2} - 8\varepsilon \frac{|a_1| \mu_{1R} e^{\delta}}{\Delta^2 |\mu_1|^2} \left(1 + \frac{|a_1|^2 |\mu_1|^2 e^{2\delta}}{\mu_{1R}^2 \mu_{1I}^2} \right) \sin\tilde{\varphi}, \tag{68}$$

здесь согласно формулам (58), (60) и (62), (63)

$$\Delta = 1 + \frac{|a_1|^2 |\mu_1|^2 e^{2\delta}}{\mu_{1R}^2 \mu_{1I}^2} - \frac{2|a_2| e^{\delta}}{\mu_{1R}} \sin\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} \doteq 2\mu_{1R}\xi - 2\varepsilon \frac{\mu_{1R}}{|\mu_1|^2} \eta + \arg(a_1).$$

Легко проверяется также, что в соответствии с (67) и (68) выполняется соотношение $U = -\varepsilon \bar{q} q = -\varepsilon |q|^2$:

$$q\bar{q} = \left(1 + \frac{4\mu_{1R} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} - \frac{8|a_1|^2 e^{2\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{4\mu_{1I} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} + \frac{4|a_1|^2 \left(\mu_{1R}^2 - \mu_{1I}^2\right) e^{2\delta}}{\mu_{1R}\mu_{1I}\Delta |\mu_1|^2} \right)^2 =$$

$$= 1 - 16 \frac{|a_1|^2 e^{2\delta}}{\Delta^2 |\mu_1|^2} + 8\varepsilon \frac{|a_1| \mu_{1R} e^{\delta}}{\Delta^2 |\mu_1|^2} \left(1 + \frac{|a_1|^2 |\mu_1|^2 e^{2\delta}}{\mu_{1R}^2 \mu_{1I}^2} \right) \sin\tilde{\varphi} = -\frac{U}{\varepsilon}, \tag{69}$$

откуда для переменной $p \doteq -U/q$ получается выражение

$$p = \varepsilon\bar{q} = \varepsilon \left(1 + \frac{4\mu_{1R} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} - \frac{8|a_1|^2 e^{2\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \right) -$$

$$- i\varepsilon \left(\frac{4\mu_{1I} |a_1| e^{\delta}}{|\mu_1|^2 \Delta} \sin\tilde{\varphi} + \frac{4|a_1|^2 \left(\mu_{1R}^2 - \mu_{1I}^2\right) e^{2\delta}}{\mu_{1R}\mu_{1I}\Delta |\mu_1|^2} \right). \tag{70}$$

Формула (67) для q с учетом (62), (63) представляет собой несингулярное периодическое решение двумерного обобщения нелинейного уравнения Шрёдингера (7).

Заключение

Пара нелинейных уравнений Дэви и Стюардсона (2ДДС), полученая в их классической работе, описывает эволюцию трехмерного волнового пакета в бассейне конечной глубины. Система уравнений Дэви–Стюардсона (1) сводится в частных случаях специального выбора вещественных констант $\alpha = -\alpha_0$, $\beta = +\beta_0$ или мнимых констант $\alpha = -i\alpha_0$, $\beta = +i\beta_0$ соответственно к нелинейным двумерным обобщениям уравнений теплопроводности (34) и нелинейного уравнения Шрёдингера (7). Сейчас многочисленные эксперименты, подтверждающие существование локализованных и периодических структур в Бозе-конденсате, особым образом ставят задачу о построении новых периодических решений (несингулярных и локализованных) для двумерного обобщения НУШ. В разделе 4 получено периодическое несингулярное, но не локализованное решение НУШ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дрюма В.С.** Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега-Де Вриза (КДВ) // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19, вып. 12. – С. 753–755.
2. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 45–53.
3. **Davey A., Stewartson K.** On three-dimensional packet of surface waves // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1974. – Vol. 338, iss. 1613. – P. 101–110. doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
4. **Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G.** Coherent structures for Ishimori Equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1991. – Vol. 48, iss. 2–3. – P. 367–395.
5. **Веселов А.П., Новиков С.П.** Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 20–24.
6. Теория солитонов: метод обратной задачи / С.П. Новиков, В.Е. Захаров, С.В. Манаков, Л.В. Питаевский. – М.: Наука, 1980.
7. **Ablowitz M.J., Clarkson P.A.** Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
8. **Konopelchenko B.G.** Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. – New York: Plenum Press, 1992. – 292 p.
9. **Konopelchenko B.G.** Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Scientific, 1993. – 304 p.
10. **Manakov S.V.** The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1981. – Vol. 3, iss. 1–2. – P. 420–427. – doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
11. **Beals R., Coifman R.R.** The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1986. – Vol. 18, iss. 1–3. – P. 242–249. – doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
12. **Захаров В.Е., Манаков С.В.** Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19, вып. 2. – С. 11–25.
13. **Zakharov V.E.** Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$ – problem // Plasma theory and Nonlinear and turbulent processes in Physics / ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. – Kiev: Naukova Dumka, 1988. – Vol. 1. – P. 152–158.
14. **Bogdanov L.V., Manakov S.V.** The non-local $\bar{\partial}$ – problem and (2+1)-dimensional soliton equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1988. – Vol. 21, N 10. – P. L537–L544. – doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.

15. **Fokas A.S., Ablowitz M.J.** The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems // Nonlinear Phenomena / ed. by K.B. Wolf. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1983. – P. 137–183. – doi: https://doi.org/10.1007/3-540-12730-5_6. – (Lecture Notes in Physics; vol. 189).
16. **Beals R., Coifman R.R.** Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$ – method // Inverse Problems. – 1989. – Vol. 5, N 2. – P. 87–130. – doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
17. **Zakharov V.E.** On the dressing method // Inverse Methods in Action / ed. by P.C. Sabatier. – Berlin: Springer, 1990. – P. 602–623.
18. **Konopelchenko B.G.** The two-dimensional second-order differential spectral problem: compatibility conditions, general BTs and integrable equations // Inverse Problems. – 1988. – Vol. 4, N 1. – P. 151–163. – doi: 10.1088/0266-5611/4/1/013.
19. **Dubrovsky V.G.** The application of the $\bar{\partial}$-dressing method to some (2+1) dimensional nonlinear equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1996. – Vol. 29. – P. 3617–3630. – doi: 10.1016/S0034-4877(15)60006-4.
20. **Дубровский В.Г., Топовский А.В., Басалаев М.Ю.** Новые точные решения двумерных интегрируемых уравнений НВН, 2DКК и 2DСК полученные с помощью метода $\bar{\partial}$-одевания // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 167, № 3. – С. 377–393. – doi: 10.4213/tmf6648.

CONSTRUCTION OF EXACT PERIODIC SOLUTIONS OF THE NONLINEAR DAVEY-STEWARDSON EQUATION SYSTEM USING THE DIBAR-DRESSING METHOD

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov Yu.M.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Fifty years ago, a method for integrating nonlinear differential equations called the inverse scattering method was discovered. In this case an integrable nonlinear equation is treated as a consistency condition for the corresponding linear auxiliary problems. The main idea underlying this method, namely the reduction of the problem of the exact integration of nonlinear equations to the solution of a number of auxiliary linear problems, proved to be unusually fruitful. As it turned out, the method of the inverse scattering problem is applicable to wide classes of ordinary nonlinear differential equations, nonlinear partial differential equations, difference, integro-differential and other equations.

Many of nonlinear equations integrated by the inverse problem method, such as the Korteweg de Vries equation, the nonlinear Schrödinger equation, the sine-Gordon equation, the one-dimensional Heisenberg ferromagnet equation, the resonance wave interaction equation, the Kadomtsev-Petviashvili equation, and others have a high degree of universality and occur in the most diverse fields of physics. In general, non-linear integrable equations and their localized soliton solutions have a wide field of application from the theory of gravity and the quantum field theory, plasma physics and nonlinear optics to hydrodynamics and solid state physics.

On the example of the Davy-Stewardson equation this paper demonstrates the principal possibility of constructing exact periodic solutions of two-dimensional integrable nonlinear equations in the framework of the Zakharov-Manakov dressing method.

Keywords: Integrable nonlinear equation, method of $\bar{\partial}$ -dressing, two-dimensional integrable generalization of Davey-Stewardson equation (2DDS), solutions with functional parameters, periodic solutions.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-4-14-30

REFERENCES

1. Dryuma V.S. Ob analiticheskom reshenii dvumernogo uravneniya Kortevega-De Vriza (KDV) [Analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) equation]. *Pis'ma v Zhurnal teoreticheskoi i eksperimental'noi fiziki – Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1974, vol. 19, iss. 12, pp. 753–755. (In Russian).

2. Zakharov V.E., Shabat A.B. Skhema integrirovaniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki metodom obratnoi zadachi rasseyaniya [A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem]. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya – Functional Analysis and Its Applications*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 226–235. doi: 10.1007/BF01075696. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 45–53.
3. Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packet of surface waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1974, vol. 338, iss. 1613, pp. 101–110. doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
4. Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G. Coherent structures for Ishimori Equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, vol. 48, iss. 2–3, pp. 367–395.
5. Veselov A.P., Novikov S.P. Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1984, vol. 30, pp. 588–591. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1984, vol. 279, no. 1, pp. 20–24.
6. Novikov S.P., Zakharov V.E., Manakov S.V., Pitaevskii L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoi zadachi* [Theory of solitons: the inverse scattering method]. Moscow, Nauka Publ., 1980.
7. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge, Cambridge University Press, 1991. 516 p.
8. Konopelchenko B.G. *Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions*. New York, Plenum Press, 1992. 292 p.
9. Konopelchenko B.G. *Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method*. Singapore, World Scientific, 1993. 304 p.
10. Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1981, vol. 3, iss. 1–2, pp. 420–427. doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
11. Beals R., Coifman R.R. The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 18, iss. 1–3, pp. 242–249. doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
12. Zakharov V.E., Manakov S.V. Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 89–101. doi: 10.1007/BF01078388. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 11–25.
13. Zakharov V.E. Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$ – problem. *Plasma theory and Nonlinear and turbulent processes in Physics*. Ed. by Erokhin N.S., Sitenko A.G., Chernousenko V.M., Bar'yakhtar V.G., Zakharov V.E. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, vol. 1, pp. 152–158.
14. Bogdanov L.V., Manakov S.V. The non-local $\bar{\partial}$ – problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. L537–L544. doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
15. Fokas A.S., Ablowitz M.J. The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems. *Nonlinear Phenomena.* Ed. by K.B. Wolf. *Lecture Notes in Physics*, vol. 189. Berlin, Heidelberg, Springer, 1983, pp. 137–183. doi: https://doi.org/10.1007/3-540-12730-5_6.
16. Beals R., Coifman R.R. Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$ – method. *Inverse Problems*, 1989, vol. 5, no. 2, pp. 87–130. doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
17. Zakharov V.E. On the dressing method. *Inverse Methods in Action*. Ed. P.C. Sabatier. Berlin, Springer, 1990, pp. 602–623.
18. Konopelchenko B.G. The two-dimensional second-order differential spectral problem: compatibility conditions, general BTs and integrable equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 151–163. doi: 10.1088/0266-5611/4/1/013.
19. Dubrovsky V.G. The application of the $\bar{\partial}$ – dressing method to some (2+1) dimensional nonlinear equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1996, vol. 29, pp. 3617–3630. doi: 10.1016/S0034-4877(15)60006-4.

20. Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Basalaev M.Yu. New exact solutions of two-dimensional integrable equations using the $\bar{\partial}$-dressing method. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2011, vol. 167, iss. 3, pp. 725–739. doi: 10.1007/s11232-011-0057-3. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2011, vol. 167, no. 3, pp. 377–393.

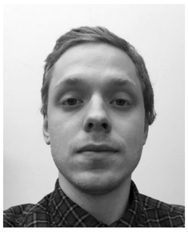
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дубровский Владислав Георгиевич – родился в 1948 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 48 научных работ. (Адрес: Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Dubrovsky Vladislav Georgievich (b. 1948) – Doctor of Sciences (Phys.&Math.), professor, head of the Applied and Theoretical Physics department, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is the author of 48 scientific papers. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Топовский Антон Валерьевич – родился в 1985 году, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 7 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса 20. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Topovsky Anton Valerevich (b. 1985) – Candidate of Sciences (Phys.&Math.), associate professor, Applied and Theoretical Physics department, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is the author of 7 scientific papers. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).



Остреинов Юрий Михайлович – родился в 1992 году, ассистент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов, задача рассеяния. Опубликовано 8 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса 20. E-mail: wtfsnoo@gmail.com).

Ostreinov Yury Mikhailovich (b. 1992) – assistant lecturer, department of Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations; the soliton theory, the and scattering problem. He is the author of 8 scientific papers. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: wtfsnoo@gmail.com).

Статья поступила 15 ноября 2017 г.
Received November 15, 2017

To Reference:

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov Yu.M. Postroenie periodicheskikh tochnykh reshenii sistemy nelineinykh uravnenii tipa Devi-Styuardsona metodom dibar-odevaniya [Construction of exact periodic solutions of the nonlinear Davey-Stewardson equation system using the dibar-dressing method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2017, no. 4 (37), pp. 14–30. doi: 10.17212/1727-2769-2017-4-14-30