ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2018 январь–март № 1 (38)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.814

О КОЛИЧЕСТВЕННОЙ МЕРЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ РОБАСТНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

Н.С. Хайло, А.Г. Вострецов
Новосибирский государственный технический университет

Во многих реальных задачах обнаружения и различения сигналов априорно неопределенными являются как форма распределения шума, так и ряд параметров сигналов и помех. Поэтому в настоящее время практическое применение находят те алгоритмы, у которых показатели качества оказываются устойчивыми к изменению сигнально-помеховой обстановки. Устойчивость алгоритма к ряду дестабилизирующих факторов может быть обеспечена на этапе синтеза. Однако в большинстве случаев на этапе синтеза алгоритма не удается обеспечить независимость средних потерь от распределения шума, вследствие чего возникает необходимость оценки устойчивости средних потерь алгоритмов в условиях непараметрической априорной неопределенности. Такую устойчивость принято называть робастностью. В настоящей работе предлагается коэффициент асимптотической робастности, с помощью которого можно оценить устойчивость асимптотических алгоритмов к изменению плотности распределения вероятностей шума. Данный коэффициент представляет собой относительную меру помехоустойчивости алгоритма при некотором распределении p_1 по сравнению с помехоустойчивостью при распределении p_2 и может быть использован для обоснования выбора алгоритма при решении конкретных задач.

Ключевые слова: робастность, помехоустойчивость, коэффициент асимптотической робастности, робастные алгоритмы демодуляции, априорная неопределенность, фазовая манипуляция.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-1-94-105

Введение

Качество обработки сигналов зачастую определяется не только собственными шумами приемного устройства системы, но и внешними помехами. Например, помехами множественного доступа в многопользовательских системах связи, общими и селективными замираниями сигнала в канале передачи, мешающими сигналами от сторонних систем, умышленными помехами различного типа. В результате распределение наблюдаемых данных характеризуется высоким уровнем априорной неопределенности.

Для решения проблемы априорной неопределенности многими авторами предложены самые различные параметрические и непараметрические подходы. Чаще всего априорная неопределенность преодолевается не на этапе синтеза алгоритма обнаружения и различения сигналов, а эвристически. Особое внимание в литературе в последнее время уделяется построению робастных алгоритмов, эффективность которых остается приемлемой при отклонении распределения наблюдаемых данных от использованного на этапе синтеза. Под робастностью алгоритма понимается его свойство сохранять в определенных пределах показатели качества в условиях априорной неопределенности сигнально-помеховой обстановки. В основу робастных алгоритмов положена, как правило, идея нелинейного безынерционного преобразования наблюдаемых данных [1]. Так как современные радиотехнические и телекоммуникационные системы используют сигналы с большой базой, то зачастую при синтезе алгоритмов обнаружения и различения сигналов используют асимптотический подход [2, 3]. Во всех случаях для оценки эффективности предложенных алгоритмов требуется их сравнение друг с другом и с оптимальным при различных распределениях наблюдаемых данных. Для этого авторы обычно используют два подхода: статистические испытания алгоритма (моделирование на ЭВМ) и асимптотический анализ. При первом подходе из-за ограничений вычислительной мощности современных компьютеров практически невозможно получить характеристики алгоритмов при малых уровнях значимости или вероятностях ошибочных решений. При втором подходе, хотя он и оправдан при использовании сигналов с большой базой, часто возникают непреодолимые математические трудности. Кроме того, в работах [2, 3] для оценки эффективности алгоритмов предложено использовать коэффициент асимптотической относительной эффективности, с помощью которого оценивается своего рода «расстояние» между характеристиками помехоустойчивости двух алгоритмов, имеющих одинаковый уровень значимости. Один из этих алгоритмов выступает в роли базового алгоритма, с которым сравнивается исследуемый алгоритм. Но все перечисленные подходы не дают ответа на вопрос: какова степень робастности предложенного алгоритма? Насколько он устойчив к изменению вида распределения шума? В настоящей работе предлагается количественная мера асимптотической робастности алгоритмов с безынерционным преобразованием наблюдаемых данных – коэффициент асимптотической робастности. Данный коэффициент может быть использован для обоснованного выбора алгоритма при решении конкретных задач. В качестве примера приводится анализ робастности предложенных авторами ранее в работах [4, 5] асимптотически робастных инвариантных алгоритмов обнаружения сигналов.

1. Исходные посылки для анализа алгоритма

Рассмотрим типичную для практики задачу обнаружения и различения сигналов на фоне аддитивного стационарного шума. Выборка из шума считается независимой с маргинальной (одномерной) плотностью распределения вероятности (ПРВ), отличной в общем случае от плотности распределения Гаусса. ПРВ наблюдаемой выборки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в отсутствие сигнала принадлежит семейству распределений

$$\mathbf{P}_{0,n} = \left\{ w_n\left(\mathbf{x}|\sigma\right) = \prod_{i=1}^{n} p(t),\ p(t) = \frac{1}{\sigma} w\left(\frac{x_i}{\sigma}\right),\ \sigma \in (0,\infty) \right\}, \tag{1}$$

а при наличии k-го сигнала, $k = 1, \ldots, m$, – семейству распределений

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{k,n} = \left\{ w_n\left(\mathbf{x}|\lambda,\boldsymbol{\theta},\sigma\right) = w_n\left[\mathbf{x} - \lambda_n \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})|\sigma\right],\right.\\ \left. w_n\left(\cdot|\sigma\right) \in \mathbf{P}_{0,n},\ \lambda \in (0,\infty),\ \boldsymbol{\theta} \in \Xi^{(k)} \right\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $p(t)$ – плотность распределения вероятностей шума; $w(t)$ – распределение с единичным масштабом, принадлежащее некоторому заданному множеству распределений; $\mathbf{W}$ – модели непараметрической априорной неопределенности; σ – параметр масштаба; $\lambda_n \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$ – сигнальный вектор; $\lambda_n = \lambda/\sqrt{n}$, $\lambda \in (0,\infty)$ – энергетический параметр сигнала; $\left\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\right\| = \sqrt{n}$, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu \mathbf{S}^{(\nu)}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ – неэнергетический параметр сигнала с нормой $\left\|\boldsymbol{\theta}\right\| = 1$;

$\Xi^{(k)}$, $k = 1, ..., m$, – непересекающиеся множества значений параметра $\boldsymbol{\theta}$, m – число альтернатив при наличии сигнала; $\left\{\mathbf{S}^{(\nu)} = \left(S_1^{(\nu)}, \ldots, S_n^{(\nu)}\right),\ \nu = 1, ..., N\right\}$ – ортогональный базис сигнала.

Априорно неопределенными могут быть вид ПРВ $w(t)$, а также значения параметров λ и σ. Задача обнаружения и различения сигнала формулируется как задача проверки следующих гипотез:

$$\begin{aligned} &H_0: \ \omega = 0,\ \sigma \in (0, \infty),\ \ \omega = \lambda/\sigma \ \ \text{(сигнала нет)};\\ &H_k: \ \omega > 0,\ \sigma \in (0, \infty),\ \theta \in \Xi^{(k)}, k = 1, ..., m \ \ \text{(присутствует } k\text{-й сигнал)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Алгоритм обнаружения и различения сигналов зададим решающими функциями $\varphi_n^{(k)}(\mathbf{x})$, которые представляют собой вероятности принятия решения в пользу гипотез H_k. В связи с тем, что совокупность всех выносимых решений образуют полную группу событий, вероятность принятия решения об отсутствии сигнала $\varphi_n^{(0)}(\mathbf{x}) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_n^{(k)}(\mathbf{x})$.

Будем полагать, что качество алгоритма оценивается суммарными средними потерями $\Pi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{m} \Pi_k(\omega)$ при заданном уровне α вероятности ложной тревоги, где $\Pi_k(\omega)$ – средние потери при справедливости гипотезы H_k, причем функция $\Pi(\omega)$ является монотонной функцией своих аргументов.

Пусть $\mathbf{F}$ – множество функций безынерционного преобразования наблюдаемой выборки. Решающие функции алгоритма выразим через векторные статистики $\boldsymbol{\xi}_n\left(\mathbf{x} \middle| f(t), \sigma\right) = \left\{\xi_{n,\nu}\left(\mathbf{x} \middle| f(t), \sigma\right),\ \nu = 1, \ldots, N\right\}$, $f(t) \in \mathbf{F}$, компоненты которых определены в форме

$$\xi_{n,\nu}\left(\mathbf{x} \middle| f(t), \sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} S_i^{(\nu)} f\left(\frac{x_i}{\sigma}\right),\ \ \nu = 1, ..., N, \tag{4}$$

причем в асимптотике при $n \to \infty$ статистика (4) имеет распределение Гаусса.

Будем полагать, что все функции $f(t)$ множества $\mathbf{F}$ удовлетворяют следующим условиям:

а) в отсутствие сигнала предельным распределением статистики (4) является N-мерное распределение Гаусса с конечным средним $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)$ и корреляционной матрицей $\mathbf{R} = \upsilon_w^2\left(f(t)\right)\mathbf{I}$, где дисперсия $\upsilon_w^2\left(f(t)\right) = \mathrm{M}\left\{\left[f(t) - m_w\left(f(t)\right)\right]^2 \middle| w(t)\right\}$, $m_w\left(f(t)\right) = \mathrm{M}\left\{f(t) \middle| w(t)\right\}$. Здесь и в дальнейшем $\mathbf{I}$ – единичная матрица размера $N \times N$, $\mathrm{M}\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания;

б) при наличии сигнала с параметрами λ и $\boldsymbol{\theta}$ у предельного распределения статистики (4) матрица $\mathbf{R}$ не изменяется, а векторное среднее $\mathbf{a}^{(1)}\left(f(t)\right) = \mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right) + \frac{\lambda}{\sigma}\alpha'_w\left(f(t)\right)\boldsymbol{\theta}$, где $\alpha'_w\left(f(t)\right) = \mathrm{M}\left\{f'(t) \middle| w(t)\right\}$.

Дополнительно считаем также, что выполнены условия, обеспечивающие следующие сходимости по вероятности:

$$\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t),\,\sigma\right)-\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\xrightarrow{\mathrm{P}}0\ \forall f(t)\in\mathbf{F}\,, \tag{5}$$

где статистика $\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)=\xi_n\left[\mathbf{x}\middle|f(t),\ \hat{\sigma}_n(\mathbf{x})\right]$.

В общем случае $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)\neq 0$, что приводит к смещению распределения статистики (4). Тем самым необходимы специальные меры для обеспечения равенства $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)=0$ при всех $f(t)\in\mathbf{F}$.

В соответствии с (4) и (5) компоненты вектора $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)$ имеют вид $a_\nu\left(f(t)\right)=\left(1/\sqrt{n}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}S_i^{(\nu)}m_w\left(f(t)\right)$, где в общем случае среднее $m_w\left(f(t)\right)\neq 0$. Поэтому для выполнения условия $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)=0\ \forall f(t)\in\mathbf{F}$ требуется, чтобы $\left(1/\sqrt{n}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}S_i^{(\nu)}=0\ \forall\nu=1,\,\dots,\,N$.

При произвольной функции $f(t)\in\mathbf{F}$ величина $\alpha'_w\left(f(t)\right)=\mathrm{M}\left\{f'(t)\middle|w(t)\right\}$ может быть как положительной, так и отрицательной. В связи с этим величина $\alpha'_w\left(f(t)\right)$ при всех $f(t)\in\mathbf{F}$ представляется в форме $\alpha'_w\left(f(t)\right)=$ $=\mathrm{sgn}\left[\alpha'_w\left(f(t)\right)\right]\left|\alpha'_w\left(f(t)\right)\right|$, где $\mathrm{sgn}(t)$ – знаковая функция. В случае $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)=$ $=0\ \forall f(t)\in\mathbf{F}$ среднее предельного распределения статистики (4) выражается в виде $\mathbf{a}\left(f(t)\right)=\dfrac{\lambda}{\sigma}\left|\alpha'_w\left(f(t)\right)\right|\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\theta}}=\mathrm{sgn}\left[\alpha'_w\left(f(t)\right)\right]\boldsymbol{\theta}$.

Множеству $\mathbf{F}$ принадлежат многие функции безынерционного преобразования наблюдаемой выборки, в частности логарифмические производные распределений шума с конечной информацией Фишера.

Замечая, что компоненты базисных векторов $\mathbf{S}^{(\nu)}$ на практике всегда ограничены и принимая во внимание ортонормированность этих векторов, можно с помощью центральной предельной теоремы Линденберга и формулы Тейлора установить, что условия *a* и *b* выполняются при следующих посылках.

Функции $f(t)\in\mathbf{F}$ имеют непрерывные почти всюду производные $f'(t)$ и $f''(t)$. Производные $f'(t),\ f''(t)$ равномерно ограничены: $\left|f'(t)\right|\le C$, $\left|f''(t)\right|\le C$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$, $C<\infty$.

Функции $f(t)\in\mathbf{F}$ удовлетворяют условию $0<\mathrm{M}\left\{f^2(t)\middle|w(t)\right\}<\infty$. Перечисленные посылки достаточны также для сходимости (4), если смещение $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)$ устраняется.

Благодаря сходимости (5) статистики $\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t),\sigma\right)$ и $\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)$ имеют общее предельное распределение. Поэтому в случае $\mathbf{a}^{(0)}\left(f(t)\right)=0$ предельным распределением статистики $\xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)$ является N-мерное распределение Гаусса с корреляционной матрицей $\mathbf{R} = \upsilon_w^2\left(f(t)\right)\mathbf{I}$ и векторным средним $\mathbf{a}\left(f(t)\right) = = \omega\left|\alpha'_w\left(f(t)\right)\right|\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, где $\omega = \lambda/\sigma$ и $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{sgn}\left[\alpha'_w\left(f(t)\right)\right]\boldsymbol{\theta}$.

В работе [6] показано, что решающие функции алгоритма обнаружения и различения сигналов с функцией преобразования наблюдаемых данных $f(t) \in \mathbf{F}$ представляются в форме

$$\varphi_n^{(0)}\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right) = \begin{cases} 1, & \max\limits_{\nu=1,\ldots,m}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_\nu(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle < C\left(\alpha,\ f(t)\right), \\ 0, & \max\limits_{\nu=1,\ldots,m}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_\nu(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle \ge C\left(\alpha,\ f(t)\right). \end{cases} \tag{6}$$

$$\underset{k=1,\ldots,m}{\varphi_n^{(k)}\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)} =$$

$$= \begin{cases} 1, \ \max\limits_{\nu=1,\ldots,m}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_\nu(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle = \left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle \ge C\left(\alpha, f(t)\right), \\ 0, \ \max\limits_{\nu=1,\ldots,m}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_\nu(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle > \left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle \vee \\ \vee \max\limits_{\nu=1,\ldots,m}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}_\nu(\mathbf{x}),\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f^*(t)\right)\right\rangle < C\left(\alpha,\ f(t)\right), \end{cases} \tag{7}$$

где оценка сигнального параметра

$$\underset{k=1,\ldots,m}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(\mathbf{x})} = \begin{cases} \arg\max\limits_{\hat{\theta}\in\Xi^{(k)}}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}},\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle & \text{при } \alpha'_w\left(f(t)\right) \ge 0, \\ \arg\max\limits_{\hat{\theta}\in\tilde{\Xi}^{(k)}}\left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}},\ \xi_n\left(\mathbf{x}\middle|f(t)\right)\right\rangle & \text{при } \alpha'_w\left(f(t)\right) < 0, \end{cases}$$

множество $\tilde{\Xi}^{(k)} = \left\{\tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\theta} \in \Xi^{(k)}\right\}$; $C\left(\alpha,\ f(t)\right)$ – пороговая константа, обеспечивающая заданный уровень вероятности ложной тревоги. Причем асимптотические потери алгоритма монотонно убывают с ростом величины

$$h_w\left(\omega \mid f(t)\right) = \omega\left|\alpha'_w\left(f(t)\right)\right| / \upsilon_w\left(f(t)\right). \tag{8}$$

Таким образом, потери могут быть выражены как

$$\Pi\left(\omega \mid f(t)\right) = Q\left[h_w\left(\omega \mid f(t)\right)\right], \tag{9}$$

где $Q(\cdot)$ – единая для всех алгоритмов монотонно убывающая функция. Этот факт позволяет оценивать эффективность алгоритмов на основе сравнения величин $h_w\left(\omega \mid f(t)\right)$.

2. Количественная мера робастности алгоритмов обнаружения и различения сигналов

Выделим алгоритм с безынерционным преобразованием $f(t) \in \mathbf{F}$ наблюдаемой выборки и определим, каким должно быть соотношение значений энергетических параметров сигнала, чтобы обеспечить одинаковость асимптотических средних потерь при разных плотностях $p_1(t) = (1/\sigma)w_1(t/\sigma)$ и $p_2(t) = (1/\sigma)w_2(t/\sigma)$

распределения шума. Здесь $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – распределения с единичным масштабом, которые принадлежат некоторой модели $\mathbf{W}$. Пусть ω_1 и ω_2 – корни уравнений

$$Q\left[h_{w_1}\left(\omega,\, f(t)\right)\right] = \tilde{\Pi},$$
$$Q\left[h_{w_2}\left(\omega, f(t)\right)\right] = \tilde{\Pi}. \tag{10}$$

Тогда с учетом равенства $h_{w_1}\left(\omega_1, f\left(t\right)\right) = h_{w_2}\left(\omega_2, f\left(t\right)\right)$ и монотонности функции $Q(\cdot)$ получим

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left|\alpha'_{w_1}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_2}\left(f(t)\right)}{\left|\alpha'_{w_2}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_1}\left(f(t)\right)}. \tag{11}$$

Отношение ω_2/ω_1 показывает то изменение энергетического параметра ω, которое необходимо для поддержания заданного уровня асимптотических средних потерь при замене плотности w_1 на плотность w_2. В соответствии с (11) коэффициент асимптотической робастности (КАР) выражается в форме

$$K_{Rw_1,w_2} = \frac{\left|\alpha'_{w_1}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_2}\left(f(t)\right)}{\left|\alpha'_{w_2}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_1}\left(f(t)\right)}. \tag{12}$$

Пусть $\mathbf{W}$ – множество плотностей распределения шума, в пределах которого требуется исследовать робастность алгоритма, оптимального для распределения $w_1(t)$. В соответствии с (12) алгоритм считается робастным в пределах данного множества, если $K_{Rw_1,w_2} \le 1 \; \forall w_2(t) \in \mathbf{W}$, т. е. его характеристики для всех распределений из класса $\mathbf{W}$ будут не хуже, чем для распределения $w_1(t)$. Учитывая, что минимальные асимптотические потери при распределении шума $w(t)$ имеют место при функции нелинейного преобразования $f(t) = \psi_w(t)$ [6], где $\psi_w(t) = -\dfrac{d}{dt}\ln w(t) = -\dfrac{w'(t)}{w(t)}$ и что $\alpha'_w\left(\psi_w(t)\right)/\upsilon_w\left(\psi_w(t)\right) = \sqrt{I_w}$, $I_w =$ $= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_w^2(t) w(t)\,dt$ – информация Фишера, получим

$$K_{Rw_1,w_2} \ge \frac{\sqrt{I_{w1}}}{\sqrt{I_{w_2}}}.$$

Таким образом, алгоритм, оптимальный для распределения $w_1(t)$, является робастным для тех распределений шума, у которых информация Фишера $I_{w2} > I_{w1}$, причем с увеличением значения I_{w2} его коэффициент робастности уменьшается.

Предложенная количественная мера робастности алгоритмов – коэффициент асимптотической робастности позволяет оценить степень робастности практически любых асимптотических алгоритмов и выявить возможности их оптимизации.

3. Пример использования коэффициента асимптотической робастности для оценки робастности алгоритмов

В качестве примера оценим степень робастности предложенного авторами ранее в [6] асимптотически робастного инвариантного (АРИ) алгоритма. По методу синтеза данный алгоритм является асимптотически оптимальным инвариантным алгоритмом, оптимальным для плотности $w_0(t)$ наименее благоприятного распределения с минимальной информацией Фишера I_{w0} на множестве приближенно конечных распределений $\mathbf{W}_q$, которое представляет собой модель непараметрической априорной неопределенности шума, q – параметр модели. В связи с этим КАР АРИ-алгоритма выражается в виде

$$K_{Rw_0,w} = \frac{\upsilon_w\left(\psi_{w_0}(t)\right)\sqrt{I_{w_0}}}{\left|\alpha'_w\left(\psi_{w_0}(t)\right)\right|},\ \forall w(t) \in \mathbf{W}_q\,. \tag{13}$$

В соответствии с неравенством $\left|\alpha'_w\left(\psi_{w_0}(t)\right)\right| \Big/ \upsilon_w\left(\psi_{w_0}(t)\right) \ge \sqrt{I_{w_0}}\ \ \forall w(t) \in \mathbf{W}$ из выражения (13) следует, что

$$K_{Rw_0,w} \le 1\ \forall w(t) \in \mathbf{W}_q\,. \tag{14}$$

Согласно неравенству (14) АРИ-алгоритм обладает свойством робастности на всем множестве $\mathbf{W}_q$. Причем характеристика помехоустойчивости $\Pi\left(\omega \mid w_0(t)\right)$ алгоритма является при всех значениях $\omega \in (0,\infty)$ верхней границей характеристики помехоустойчивости $\Pi\left(\omega \mid w(t)\right)$ при каждой плотности $w(t) \in \mathbf{W}_q$. Это ожидаемый результат ввиду оптимальности АРИ-алгоритма по минимаксному критерию.

Найдем численные значения коэффициента робастности АРИ-алгоритма, параметр модели $\mathbf{W}_q$ примем равным $q = 0.8$. Распределения шума представим классами обобщенных распределений Гаусса и ε-загрязненных распределений.

Плотность распределения вероятностей обобщенного распределения Гаусса имеет вид

$$w(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(3/\alpha)}\Gamma\left(1/\alpha\right)} \exp\left\{ -\left[\frac{|t|}{\sqrt{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(3/\alpha)}} \right]^{\alpha} \right\}. \tag{15}$$

Варьируя параметр α, можно в достаточно широких пределах изменять форму распределения. Например, при $\alpha = 2$ выражение (15) задает гауссовское распределение, при $\alpha = 1$ – двустороннее распределение Лапласа. При $\alpha < 2$ распределение (15) имеет более тяжелые хвосты, чем гауссовское распределение.

ε-загрязненное распределение представляет собой смешанную модель шума с ПРВ:

$$p_{\varepsilon c}(t) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}\exp\left\{-\frac{1}{2\kappa}t^2\right\}, \tag{16}$$

его дисперсия зависит от параметров ε и κ и равна $\sigma^2_{\varepsilon c} = 1 - \varepsilon + \varepsilon\kappa$.

В табл. 1 приведены результаты расчета $K_{Rw_0,w}$ для распределений (15) и (16) при различных значениях параметров α и ε.

Таблица 1 / Table 1

Обобщенное распределение Гаусса				
α	2	1.4	1	0.6
K_{Rw_0,w_α}, дБ	–4.49E-5	–2.1E-3	–0.01	–0.03
ε-загрязненное распределение				
ε	0	0.05	0.1	0.15
K_{Rw_0,w_ε}, дБ	–4.49E-5	–1.92E-4	–1.72E-3	–6.60E-3

Выполненное исследование показывает, что для АРИ-алгоритма $K_{Rw_0,w} \approx 0$ дБ, т. е. характеристики помехоустойчивости при различных плотностях $w(t) \in \mathbf{W}_q$ группируются около верхней границы. Это свидетельствует о высокой степени робастности АРИ-алгоритма на множестве $\mathbf{W}_q$.

На практике в коммуникационных приложениях эффективность алгоритмов обнаружения и различения сигналов оценивается в зависимости от отношения сигнал/шум. В связи с этим возникает необходимость оценить изменение отношения сигнал/шум, требуемое для поддержания заданного уровня средних потерь, при разных ПРВ шума.

Рассмотрим средние потери алгоритма с функцией преобразования $f(t) \in \mathbf{F}$ при двух ПРВ шума: $p_1(t) = (1/\sigma_1)w_1(t/\sigma_1)$ и $p_2(t) = (1/\sigma_2)w_2(t/\sigma_2)$. Следует отметить, что $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – распределения с единичным масштабом, которые принадлежат некоторому, заранее определенному классу распределений $\mathbf{W}$, однако дисперсии распределений $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в общем случае не равны единице и не равны между собой. Пусть параметры масштаба σ_1 и σ_2 выбраны так, чтобы дисперсии распределений $p_1(t)$ и $p_2(t)$ были одинаковы:

$$D_{p_1} = D_{w_1}\sigma_1^2 = D_{p_2} = D_{w_2}\sigma_2^2, \tag{17}$$

где D_{w_1} и D_{w_2} – дисперсии распределений $w_1(t)$ и $w_2(t)$.

Решив уравнения $Q\left[h_{p_1}\left(\omega,\ f(t)\right)\right] = \tilde{\Pi}$ и $Q\left[h_{p_2}\left(\omega,\ f(t)\right)\right] = \tilde{\Pi},$ получим

$$\frac{\lambda_2/\sigma_2}{\lambda_1/\sigma_1} = \frac{\left|\alpha'_{w_1}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_2}\left(f(t)\right)}{\left|\alpha'_{w_2}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_1}\left(f(t)\right)}. \tag{18}$$

Учитывая равенство (17), умножим левую часть равенства (18) на отношение $\sqrt{D_{p1}}\Big/\sqrt{D_{p2}}$:

$$\frac{\lambda_2\sigma_1\sqrt{D_{p1}}}{\lambda_1\sigma_2\sqrt{D_{p2}}} = \frac{\left|\alpha'_{w_1}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_2}\left(f(t)\right)}{\left|\alpha'_{w_2}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_1}\left(f(t)\right)}. \tag{19}$$

Умножив обе части (18) на отношение параметров масштаба σ_2/σ_1 , получим новое выражение для коэффициента асимптотической робастности

$$K_{Rp_1,p_2} = \frac{\lambda_2\Big/\sqrt{D_{p2}}}{\lambda_1\Big/\sqrt{D_{p1}}} = \frac{\left|\alpha'_{w_1}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_2}\left(f(t)\right)\sigma_2}{\left|\alpha'_{w_2}\left(f(t)\right)\right| \upsilon_{w_1}\left(f(t)\right)\sigma_1}. \tag{20}$$

По определению данный коэффициент характеризует то изменение отношения сигнал/шум, которое требуется для поддержания заданного уровня средних асимптотических потерь алгоритма при замене плотности $p_1(t)$ на плотность $p_2(t)$.

Оценим изменение эффективности АРИ-алгоритма при изменении ПРВ шума, на примере демодуляции широкополосного ФМ-2 сигнала, принимаемого на фоне аддитивного независимого шума. В случае двоичной фазовой манипуляции созвездие состоит из двух противоположных равновероятных сигналов $\mathbf{S}_n^{(1)} = -\mathbf{S}_n^{(2)}$, где $\mathbf{S}_n^{(\mathrm{k})} = \left(S_1^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор отсчетов комплексной огибающей *k*-го сигнала созвездия. Наблюдаемые данные представляют собой *n*-мерный вектор $\mathbf{X}_n = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, составленный из отсчетов комплексной огибающей наблюдаемого процесса, который в случае передачи *k*-го сигнала может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{X}_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \mathbf{S}_n^{(k)} + \xi_n, \; \mathbf{S}_n^{(k)} \in \mathbb{S}_n,$$

где $\xi_n = (\xi_1, ..., \xi_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор отсчетов комплексной огибающей шума $\lambda \in (0, \infty)$ – энергетический параметр сигнала. Квадратурные составляющие вектора отсчетов шума полагаются статистически независимыми с одинаковыми неизвестными маргинальными ПРВ вида (15) или (16). Размер выборки примем равным 1023.

В процессе исследования по 100 000 испытаний оценивались зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум (BER). Результаты моделирования представлены на рис. 1 и 2.

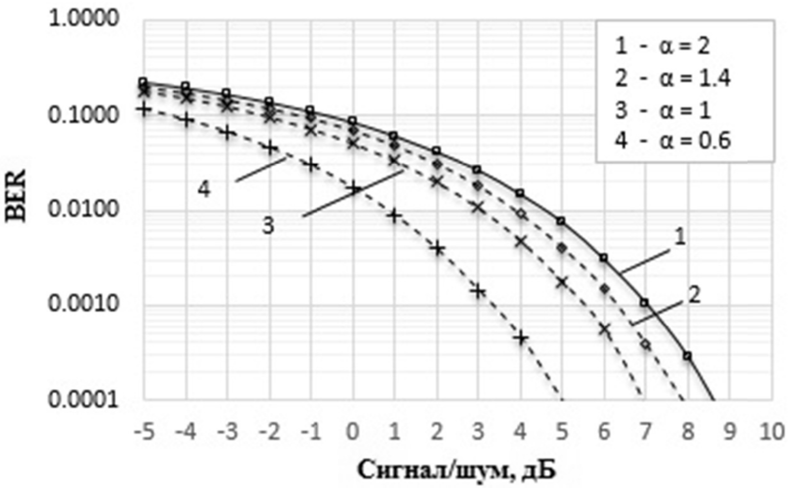

Рис. 1 – Зависимости вероятности ошибки на бит демодуляции от отношения сигнал/шум АРИ-алгоритма в случае обобщенного распределения Гаусса

Fig. 1 – Dependences of the erroneous demodulation probability on the signal/noise ratio of the ARI-algorithm in the case of generalized Gaussian noise distribution

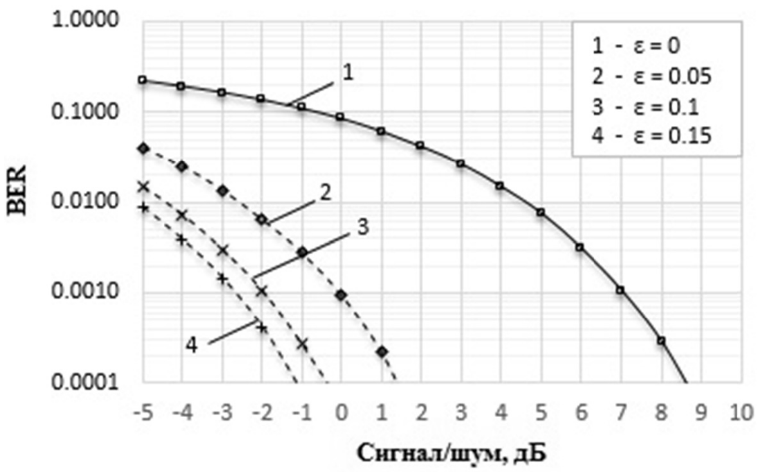

Рис. 2 – Зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум АРИ-алгоритма в случае ε-загрязненного распределения

Fig. 2 – Dependences of the erroneous demodulation probability on the signal/noise ratio of the ARI-algorithm in the case of ε-contaminated noise distribution

Также в табл. 2 приведены значения коэффициента робастности для АРИ-алгоритма, вычисленные по формуле (20). В качестве распределения $p_1(t)$ использовалось гауссовское распределение, а в качестве $p_2(t)$ – распределения (15) и (16) при различных значениях параметров α и ε. Значения указаны в дБ.

Таблица 2 / Table 2

Обобщенное распределение Гаусса				
α	2	1.4	1	0.6
$K_{Rp_{a=2},p_a}$, дБ	0	–0.396	– 1.041	–2.892
ε-загрязненное распределение				
ε	0	0.05	0.1	0.15
$K_{Rp_{\varepsilon=0},p_\varepsilon}$, дБ	0	–7.023	– 8.805	–9.385

Как видно из графиков, результаты моделирования хорошо согласуются с рассчитанными значениями коэффициента робастности АРИ-алгоритма. Например, для ε-загрязненного распределения с параметром $\varepsilon = 0.05$ коэффициент робастности равен –7.023 дБ. Это означает, что при данном распределении такой же уровень вероятности ошибки демодуляции, как и при гауссовом шуме, может быть достигнут при меньшем (на 7.023 дБ) отношении сигнал/шум.

Заключение

Предложен коэффициент асимптотической робастности для оценки устойчивости асимптотических алгоритмов обнаружения и различения сигналов к изменению формы ПРВ шума в некотором заранее определенном классе распределений $\mathbf{W}$. На практике интерес представляет оценка робастности алгоритмов при произвольных распределениях в зависимости от отношения сигнал/шум.

На основе того, что практически любая ПРВ $p_1(t)$ может быть представлена в виде $p(t) = (1/\sigma)w(t/\sigma)$, $\sigma \in (0, \infty)$, $w(t) = \sigma p(\sigma t) \in \mathbf{W}$, предложенный коэффициент робастности (20) показывает, какое требуется изменение отношения сигнал/шум для сохранения характеристик помехоустойчивости при изменении функции распределения шума по отношению к исходной, для которой синтезирован алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Aazhang B., Poor H.V.** An analysis of nonlinear direct-sequence correlators // IEEE Transactions on Communications. – 1989. – Vol. 37 (7). – P. 723–731.
2. **Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 3. – М.: Советское радио, 1976. – 288 с.
3. **Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
4. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Применение принципов инвариантности и робастности при разработке алгоритмов демодуляции для широкополосных систем связи // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, № 11. – С. 1353–1362.
5. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Асимптотически робастные алгоритмы демодуляции сигналов с подавлением помех множественного доступа // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, № 8. – С. 953–960.
6. **Богданович В.А., Вострецов** А.Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. – Изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.

A QUANTITATIVE MEASURE OF ASYMPTOTIC ROBUSTNESS OF SIGNAL DETECTION ALGORITHMS

Khailo N.S., Vostretsov A.G.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

In many practical problems of signal detection, both the form of the noise distribution and a number of signal and interference parameters can be a priori uncertain. Therefore an algorithm's ability to maintain its performance in the case of noise environment changing is one of its key properties today. The stability of the algorithm performance to a number of factors can be ensured at the stage of its design. However, in most cases at this stage, it is not possible to ensure the independence of an algorithm's average losses of the noise distribution, which makes it necessary to estimate the stability of average losses of algorithms in the case of nonparametric a priori uncertainty. This property is usually called robustness. In this paper, we propose a coefficient of asymptotic robustness, which can be used for estimating the stability of asymptotic algorithms to changes in the noise probability density function.

Keywords: Demodulation algorithms, a priori uncertainty, robustness, noise immunity, BPSK.
DOI: 10.17212/1727-2769-2018-1-94-105

REFERENCES

1. Aazhang B., Poor H.V. An analysis of nonlinear direct-sequence correlators. *IEEE Transactions on Communications*, 1989, vol. 37 (7), pp. 723–731.
2. Levin B.R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical bases of statistical radio engineering]. In 3 bk. Bk. 3. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1976. 288 p.
3. Levin B.R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical bases of statistical radio engineering]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1989. 656 p.
4. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Primenenie printsipov invariantnosti i robastnosti pri razrabotke algoritmov demodulyatsii dlya shirokopolosnykh sistem svyazi [The application of

the principles of invariance and robustness in the development of demodulation algorithms for broadband communication systems]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 2009, vol. 54, no. 11, pp. 1353–1362. (In Russian).
5. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Asimptoticheski robastnye algoritmy demodulyatsii signalov s podavleniem pomekh mnozhestvennogo dostupa [Asymptotically robust signal demodulation algorithms with multiple-access suppression]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 2010, vol. 55, no. 8, pp. 953–960. (In Russian).
6. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. *Teoriya ustoichivogo obnaruzheniya, razlicheniya i otsenivaniya signalov* [Theory of stable detection, demodulation and estimation of signals]. 2nd ed. Moscow, 2004. 320 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Хайло Никита Сергеевич – родился в 1991 году, аспирант кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: статистическая теория обработки сигналов в условиях априорной неопределенности. Опубликовано более 10 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: xfront17@bk.ru.)

Khailo Nikita Sergeevich (b. 1991) – a postgraduate student at the department of construction and technology of radio electronic devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the statistical theory of signal processing in condition of a priori uncertainty. He is the author of 10 scientific papers. (Address: 20 Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: xfront17@bk.ru).

Вострецов Алексей Геннадьевич – родился в 1955 году, д-р техн. наук, профессор, проректор по научной работе Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: теория устойчивого обнаружения, различения, и оценки сигналов в условиях априорной неопределенности. Опубликовано более 150 научных работ, в том числе 3 монографии. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru.)

Vostretsov Aleksey Gennadevich (b. 1955) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, vice-rector for scientific work at the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the statistical theory of signal processing in condition of a priori uncertainty. He has more than 150 publications including 3 monographs. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru.).

Статья поступила 12 февраля 2018 г.
Received February 12, 2018

To Reference:

Khailo N.S., Vostretsov A.G. O kolichestvennoi mere asimptoticheskoi robastnosti algoritmov obnaruzheniya i razlicheniya signalov [A quantitative measure of asymptotic robustness of signal detection algorithms]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 1 (38), pp. 94–105. doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-94-105.