ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2018 октябрь–декабрь № 4 (41)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 530.182; 517.957

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ (КП-2) С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ ДИБАР-ОДЕВАНИЯ

В.Г. Дубровский, А.В. Топовский, Г.М. Остреинов
Новосибирский государственный технический университет

В данной работе в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова развита новая схема точного интегрирования нелинейных двумерных дифференциальных уравнений с интегрируемыми граничными условиями. Получены новые точные солитонные и периодические решения уравнения КП-2 на полуплоскости.

Продемонстрирована принципиальная возможность применения метода $\bar{\partial}$-одевания для построения классов точных солитонных и периодических решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями.

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные уравнения, метод дибар-одевания, двумерное интегрируемое нелинейное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, интегрируемые граничные условия, солитонные и периодические решения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29

Введение

Пятьдесят лет назад был открыт метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений: метод обратной задачи рассеяния. Интегрируемое нелинейное уравнение при этом представляется как условие совместности соответствующих линейных вспомогательных задач. Ключевая идея, лежащая в основе этого метода – сведение задачи точного интегрирования нелинейных уравнений к решению ряда вспомогательных линейных задач, оказалась необычайно плодотворной. Как оказалось, метод обратной задачи рассеяния применим к широким классам обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, разностных, интегро-дифференциальных и других уравнений.

Многие из нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, такие как уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение синус-Гордон, уравнение одномерного ферромагнетика Гейзенберга, уравнение резонансного волнового взаимодействия, уравнение Кадомцева–Петвиашвили и другие имеют большую степень универсальности и встречаются в самых разнообразных областях физики. В целом нелинейные интегрируемые уравнения и их локализованные солитонные решения имеют широкую область применения: от теории гравитации и квантовой теории поля, физики плазмы и нелинейной оптики до гидродинамики и физики твердого тела.

Первоначально метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был применен к интегрированию одномерных нелинейных эволюционных уравнений с временной и одной пространственной переменной. Сфера применимости МОЗР стремительно расширялась. За последние тридцать пять лет метод обратной задачи рассеяния был обобщен и успешно применен к различным 2+1-мерным нелинейным эволюционным уравнениям с временной и двумя пространственными переменными, таким как уравнения Кадомцева–Петвиашвили [1, 2], Дэви–Стюардсона [4], уравнение Ишимори [5], уравнения Нижника–Веселова–Новикова [6], система Захарова–Манакова, двумерное обобщение уравнения синус-Гордон и т. д. [7–10].

В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [9], $\bar{\partial}$-проблема [10] и более общий метод $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова [11–17] являются основными инструментами для построения различных классов точных локализованных решений (2 + 1)-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений:

В данной статье метод $\bar{\partial}$ – одевания применяется к построению новых точных решений двумерного интегрируемого нелинейного уравнения Кадомцева–Петвиашвили

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x + 3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{yy} = 0 \tag{1}$$

с интегрируемым граничным условием вида

$$(u_{xx} + \sigma u_y)\Big|_{y=0} = 0\,. \tag{2}$$

Здесь значение параметра $\sigma = 1$ соответствует уравнению КП-2, случай $\sigma = i$ соответствует уравнению КП-1; приняты также обозначения: $\partial_x \equiv \partial/\partial_x$, $\partial_y \equiv \partial/\partial_y \ldots$ и ∂_x^{-1} – оператор, обратный к ∂_x. Впервые уравнение КП (1) было получено в работе Кадомцева-Петвиашвили [1] из простых физических соображений некоторой двумеризацией уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) – добавлением в одномерное уравнение малого поперечного возмущения. Хорошо известно, что уравнение КП-1 может быть представленно как условие совместности линейных вспомогательных задач $L_1\psi = 0$, $L_2\psi = 0$, в форме Лакса это условие имеет вид [2, 3]

$$[L_1, L_2] = 0\,, \tag{3}$$

линейные вспомогательные задачи для уравнения КП имеют вид

$$\begin{gathered} L_1\psi = \sigma\psi_y - \psi_{xx} + u\psi = 0, \\ L_2\psi = \psi_t + 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - (3u_x + \sigma\partial_x^{-1}u_y)\psi = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

В настоящей работе строятся новые точные решения уравнения (1) КП-2 $(\sigma = 1)$ с интегрируемым граничным условием (2). Данное интегрируемое граничное условие для уравнения КП было установлено в работе Хабибуллина [18]. Интегрируемый характер граничного условия (2) означает совместность этого условия с линейными вспомогательными задачами (4) и, следовательно, возможность применения того или иного варианта метода обратной задачи к построению точных решений с указанным граничным условием. В работах Хабибуллина с сотр. [19, 20] точные решения ряда интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями строились с использованием метода одевания Захарова–Шабата [3], основанного на применении уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко. В настоящей работе, на примере уравнения КП-2, продемонстрирована принципиальная возможность эффективного построения точных решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями в рамках современного варианта метода обратной задачи, метода $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова.

Статья организована следующим образом. В первом разделе приводятся основные формулы метода $\bar{\partial}$- одевания в применении к построению точных решений с интегрируемым граничным условием (2) уравнения КП (1). Во втором разделе построен класс солитонных решений уравнения КП-2 с интегрируемым граничным условием (2), приведены примеры новых решений из этого класса, отсутствующие среди построенных ранее методом одевания Захарова–Шабата решений в работах Хабибуллина [18]. В третьем разделе построен новый класс периодических решений уравнения КП-2 (1) с интегрируемым граничным условием (2), приведены явные простые примеры точных решений из этого класса. В заключении кратко обсуждаются полученные результаты и перспективы применения метода $\bar{\partial}$- одевания к построению точных решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями.

1. Основные формулы метода $\bar{\partial}$- одевания для уравнений КП

Приведем некоторые важные для построения точных решений уравнений КП (1) формулы метода $\bar{\partial}$- одевания для уравнений КП (1) (см. детали в [10, 11]).

Сначала для вспомогательной, зависящей от комплексных «спектральных» переменных $\lambda, \bar{\lambda}$, волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ постулируется нелокальная $\bar{\partial}$-проблема:

$$\frac{\partial\chi(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}, \tag{5}$$

$$d\mu \wedge d\bar{\mu} = -2i\, d\mu_R\, d\mu_I,$$

где $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ и ядро $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$ $\bar{\partial}$-проблемы являются комплексными скалярными функциями. Фактически, правая часть (5) задает меру отклонения $\frac{\partial\chi}{\partial\bar{\lambda}} \neq 0$ волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ от аналитичности в точке λ, причем это отклонение, посредством ядра $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$, определяется всей комплексной плоскостью, отсюда и происходит нелокальный характер $\bar{\partial}$-проблемы (5).

Решение $\bar{\partial}$- проблемы, т. е. определение $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ при заданном ядре $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$, в случае часто используемой канонической нормировки волновой функции

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda})\big|_{\lambda\to\infty} \to 1 \tag{6}$$

эквивалентно решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu}. \tag{7}$$

Зависимость ядра R $\bar{\partial}$-проблемы от пространственных переменных x, y и временной переменной t для уравнения КП-2 (1) имеет вид [10]

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}, \tag{8}$$

где

$$F(\mu) = i\mu x - \mu^2 y + 4i\mu^3 t. \tag{9}$$

Задание зависимости (8) для ядра от пространственно-временных переменных непосредственно связано с построением в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания линейных вспомогательных задач (4) для уравнений КП, причем волновая функция $\psi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$ задач (4) связана с волновой функцией $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$ $\bar{\partial}$- проблемы (5) следующим образом:

$$\psi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = \chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)e^{F(\lambda)}. \tag{10}$$

Решение нелинейных уравнений КП-2 (1), т. е. определение потенциала $u(x, y, t)$, входящего в вспомогательные линейные задачи (3), осуществляется с помощью формулы реконструкции потенциала:

$$u(x,y,t) = 2i\partial_x \chi_{-1}, \tag{11}$$

определяющей $u(x,y,t)$ через соответствующий коэффициент χ_{-1} разложения волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$ в ряд по обратным степеням спектрального параметра λ в окрестности бесконечно удаленной точки $\lambda = \infty$:

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = 1 + \frac{\chi_{-1}(x, y, t)}{\lambda} + \frac{\chi_{-2}(x, y, t)}{\lambda^2} + \ldots \tag{12}$$

Вычисление точных решений $u(x, y, t)$ уравнений КП производится посредством определения волновой функции, как решения интегрального уравнения (7) при заданном ядре $R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}$.

Необходимый для вычисления u коэффициент χ_{-1} определяется из интегрального уравнения (7):

$$\chi_{-1} = -\iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \tag{13}$$

Широкие классы точных решений КП: солитонных, ламповых и периодических получаются при использовании следующих факторизованных дельта-образных ядер $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$ $\bar{\partial}$-проблемы (5)–(9):

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(\mu - \mu_k)\delta(\lambda - \lambda_k), \tag{14}$$

здесь (A_k, μ_k, λ_k), $(k = 1, \ldots, N)$ – некоторые фиксированные, вообще говоря, комплексные константы-параметры.

Подстановка (14) в уравнение (7) дает волновую функцию

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = 1 + \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\lambda_k - \lambda} \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)} \tag{15}$$

и соответствующий коэффициент разложения χ_{-1}:

$$\chi_{-1}(x, y, t) = -\frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{N} A_k \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)}. \tag{16}$$

Выбор ядра R_0 в форме (14) приводит к простой полюсной зависимости (15) волновой функции по спектральной переменной λ, полюсы волновой функции задаются набором $(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. Таким образом, строящиеся по формуле реконструкции $u(x, y, t) = 2i\partial_x \chi_{-1}$ решения, соответствующие выбору ядра R_0 в виде (14), характеризуются полюсами волновой функции, а также соответствующими вычетами функции в указанных полюсах. Набор (A_k, μ_k, λ_k) $(k = 1, ..., N)$ задает, как говорят, спектральную характеризацию строящихся решений.

Из (11), (15) и (16) получаем известную детерминантную формулу для точных решений уравнений КП:

$$u = 2i\frac{\partial}{\partial x}\chi_{-1} = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln\det B). \tag{17}$$

Вывод формулы (17) приведен в приложении.

При вычислении точных решений уравнения КП необходимо удовлетворить следующим условиям.

1. Условию вещественности

$$\overline{u(x, y, t)} = u(x, y, t). \tag{18}$$

2. Граничному условию

$$(u_{xx} + \sigma u_y)\Big|_{y=0} = 2i(\chi_{-1xxx} + \sigma\chi_{-1xy})\Big|_{y=0} = 0. \tag{19}$$

3. При вычислении периодических решений необходимо удовлетворить и условию мнимости фазы $F(\mu) - F(\lambda)$ входящей в определение ядра $\bar{\partial}$-проблемы , т. е. условию

$$\overline{F(\mu) - F(\lambda)} = -(F(\mu) - F(\lambda)). \tag{20}$$

Последнее условие означает использование осциллирующих экспонент $e^{F(\mu)-F(\lambda)}$ в ядре $\bar{\partial}$- проблемы, что, следовательно, приводит к возможности построения периодических решений в рамках метода $\bar{\partial}$- одевания.

Условие вещественности для решений уравнений КП приводит к следующим ограничениям на ядро R_0 [10]:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(\bar{\lambda}, \lambda; \bar{\mu}, \mu)} \text{ КП-1}, \tag{21}$$

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}. \tag{22}$$

Условие мнимости фазы $F(\mu) - F(\lambda)$ в случае КП-2 имеет вид

$$-i(\bar{\mu} - \bar{\lambda})x - y(\bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}^2) - 4i(\bar{\mu}^3 - \bar{\lambda}^3)t =$$

$$= -i(\mu - \lambda)x + y(\mu^2 - \lambda^2) - 4i(\mu^3 - \lambda^3)t,$$

последнее равенство удовлетворяется, например, при выборе

$$\mu = -\bar{\lambda}\,. \tag{23}$$

В последующих разделах будет показано, как перечисленным выше условиям можно удовлетворить при соответствующем выборе ядра $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$ при построении различных классов точных решений (солитонных и периодических) уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условиями (24).

Граничное условие (19) с учетом (13) в пределе слабых полей $(\chi \approx 1)$ приводит к соотношению

$$(u_{xx} + \sigma u_y)\Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{8i}{\pi}\partial_x^2\left(\iint\limits_C d\lambda_R d\lambda_I \iint\limits_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I\right)\Bigg|_{y=0} = 0, \tag{24}$$

которое следует удовлетворить подходящим выбором ядра R_0. Условие вещественности дает дополнительное ограничение на ядро $\bar{\partial}$-проблемы , в случае КП-2 оно имеет вид

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}\,. \tag{25}$$

Ниже будет показано, что оба условия (11) и (12) или (14) и (13) для уравнения КП-2 с $F(\mu) = i\mu x + y\mu^2 + 4i\mu^3 t$ можно удовлетворить для ядер R_0 вида:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_i \left(\pi a_{1i}\delta(\mu - \mu_{1i})\delta(\lambda - \lambda_{1i}) + \pi a_{2i}\delta(\mu - \mu_{2i})\delta(\lambda - \lambda_{2i})\right), \tag{26}$$

содержащих пары согласованных друг с другом слагаемых с соответствующим образом подобранными параметрами $(a_{1i}, \mu_{1i}, \lambda_{1i})$ и $(a_{2i}, \mu_{2i}, \lambda_{2i})$.Таким образом, условие вещественности и интегрируемое граничное условие удовлетворяются подходящим выбором констант.

Сформулированная процедура может быть с успехом применена в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания и для других двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями (совместимыми со вспомогательными линейными задачами), что является предметом дальнейших исследований.

2. Солитонные решения уравнения КП-2 с интегрируемыми граничным условием

2.1. Первый пример точного решения с интегрируемыми границами

При построении точных решений уравнения КП-2 необходимо удовлетворить условию вещественности $\overline{u(x,y,t)} = u(x,y,t)$ или в терминах ядра $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda)$ условию

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)} \tag{27}$$

и интегрируемому граничному условию $(u_{xx}+\sigma u_y)\big|_{y=0}=0$, или в терминах ядра $R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda)$ $\overline{\partial}$-проблемы , условию:

$$\left(\iint\limits_C d\lambda_R d\lambda_I \iint\limits_C R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\overline{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I\right)\Big|_{y=0}=0\,. \tag{28}$$

Покажем, как этого можно достичь, используя факторизованные, дельта-функционные ядра R_0:

$$R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda)=\sum_{k=1}^{N} a_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\lambda_k)\,. \tag{29}$$

Начнем с простейшего ядра с одним слагаемым

$$R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda)=a_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\lambda_k)\,. \tag{30}$$

Очевидно, для такого слагаемого

$$\overline{R_0(-\overline{\mu},-\mu;-\overline{\lambda},-\lambda)}=\overline{a}_k\delta(-\overline{\mu}-\mu_k)\delta(-\overline{\lambda}-\lambda_k)=$$
$$=\overline{a}_k\delta(\mu+\overline{\mu}_k)\delta(\lambda+\overline{\lambda}_k)\,. \tag{31}$$

Условию вещественности (27) можно для ядра (30) удовлетворить, потребовав, чтобы

$$\begin{aligned}\overline{a}_k&=a_k,\\ \mu_k&=-\overline{\mu}_k=i\mu_{k0},\ \ \overline{\mu}_{k0}=\mu_{k0},\\ \lambda_k&=-\overline{\lambda}_k=i\lambda_{k0},\ \ \overline{\lambda}_{k0}=\lambda_{k0}.\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, ядра вида (29) с вещественными $\overline{a}_k=a_k$ и чисто мнимыми $\mu_k=i\mu_{k0}$, $\lambda_k=i\lambda_{k0}$, т. е. ядра

$$R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda)=\sum_{k=1}^{N} a_k\delta(\mu-i\mu_{k0})\delta(\lambda-i\lambda_{k0}) \tag{33}$$

удовлетворяют условию (27), при выполнении которого решение u вещественно. Для удовлетворения второго условия (28) воспользуемся следующим наблюдением. Фаза $F(\mu)-F(\lambda)$ в экспоненте условия (28) имеет вид

$$\left(F(\mu)-F(\lambda)\right)\big|_{y=0}=i(\mu-\lambda)x+4i(\mu^3-\lambda^3)t \tag{34}$$

и не изменяется при замене переменных в интегралах (28) типа инволюции

$$\mu\to-\lambda,\ \lambda\to-\mu. \tag{35}$$

При такой замене подынтегральное выражение (28) переводит в следующее:

$$\left(R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\overline{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)}\right)\Big|_{y=0}\xrightarrow[\mu\to-\lambda]{\lambda\to-\mu}$$
$$\to(R_0\left(-\lambda,\overline{-\lambda};-\mu,\overline{-\mu})(-\lambda)e^{F(\mu)-F(\lambda)}\right)\Big|_{y=0}, \tag{36}$$

поэтому каждому слагаемому ядра (33)

$$a_k\delta(\mu - i\mu_{k0})\delta(\lambda - i\lambda_{k0}) \to b_k\delta(-\lambda - i\lambda_{k0})\delta(-\mu - i\lambda_{ko})$$

можно сопоставить еще дополнительное слагаемое типа

$$b_k\delta(\mu + i\lambda_{k0})\delta(\lambda + i\mu_{k0}),\ \overline{b_k} = b_k \tag{37}$$

и удвоить число слагаемых в ядре (33), рассматривая более общее ядро вида

$$R_0(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{N}\left((a_k\delta(\mu - i\mu_{k0})\delta(\lambda - i\lambda_{k0}) + b_k\delta(\mu + i\lambda_{k0})\delta(\lambda + i\mu_{k0})\right). \tag{38}$$

В силу указанного наблюдения (36) каждой паре слагаемых с амплитудами a_k и b_k при подстановке (38) в (28) будет соответствовать одна и та же экспонента в обоих слагаемых пары

$$e^{F(i\mu_{k0}) - F(i\lambda_{k0})}\Big|_{y=0} = e^{F(-i\lambda_{k0}) - F(-i\mu_{k0})}\Big|_{y=0} \tag{39}$$

с показателем

$$F(i\mu_{k0}) - F(i\lambda_{k0}) = F(-i\lambda_{k0}) - F(-i\mu_{k0}) =$$

$$= (\lambda_{k0} - \mu_{k0})x - 4(\lambda_{k0}^3 - \mu_{k0}^3)t = \Phi_k(x,t), \tag{40}$$

тогда условие (28) можно удовлетворить при следующем выборе амплитуд a_κ и b_k:

$$b_k = \frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}} a_k. \tag{41}$$

Итак, в силу (32) и (41) условие вещественности и интегрируемое граничное условие удовлетворяются для ядер вида

$$R_0(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\delta(\mu - i\mu_{k0})\delta(\lambda - i\lambda_{k0}) + a_k\frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}}\delta(\mu + i\lambda_{k0})\delta(\lambda + i\mu_{k0})\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} A_k\delta(\mu - iM_{k0})\delta(\lambda - i\Lambda_{k0}). \tag{42}$$

В последнем выражении введены наборы амплитуд

$$(A_1, ..., A_N;\ A_{N+1}, ..., A_{2N}) = \left(a_1, ..., a_N;\ a_1\frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}}, ..., a_N\frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}}\right) \tag{43}$$

и соответствующие этим амплитудам наборы точек комплексной плоскости:

$$\begin{aligned}(M) &: (M_1, ..., M_N;\ M_{N+1}, ..., M_{2N}) = (i\mu_{10}, ..., i\mu_{N0};\ -i\lambda_{10}, ..., -i\lambda_{N0}),\\ (\Lambda) &: (\Lambda_1, ..., \Lambda_N;\ \Lambda_{N+1}, ..., \Lambda_{2N}) = (i\lambda_{10}, ..., i\lambda_{N0};\ -i\mu_{10}, ..., -i\mu_{N0}).\end{aligned} \tag{44}$$

Для решения $u(x, y, t)$ справедлива детерминантная формула, доказанная во втором разделе:

$$u(x,\ y,\ t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln(\det B)\right), \tag{45}$$

с очевидной заменой набора амплитуд $(A_1, ..., A_N) \to (A_1, ..., A_{2N})$ и точек $(\mu_1, ..., \mu_N) \to (M_1, ..., M_{2N})$, $(\lambda_1, ..., \lambda_N) \to (\Lambda_1, ..., \Lambda_{2N})$. В точках M_k берутся волновые функции $\chi(M_k, \bar{M}_k)$, нужные для вычисления χ_{-1}, точки же $\Lambda_к$ соответствуют полюсам $\frac{1}{\Lambda_к - \lambda}$ волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$.

В простейшем случае $N = 1$ двух слагаемых ядра R_0 (42):

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) = a_1\delta(\mu - i\mu_{10})\delta(\lambda - i\lambda_{10}) + a_1\frac{\mu_{10}}{\lambda_{10}}\delta(\mu + i\lambda_{10})\delta(\lambda + i\mu_{10}) \tag{46}$$

вычисления по формулам раздела 2 дают следующее выражение для $\det B$:

$$\det B = 1 - 2e^{\Phi(x,\ y)}\frac{a_1(\lambda_{10}e^{\Theta(y)} + \mu_{10}e^{-\Theta(y)})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})} +$$

$$+e^{2\Phi(x,\ y)}\frac{a_1^2(\lambda_{10} + \mu_{10})^2}{\pi^2\lambda_{10}^2(\lambda_{10} - \mu_{10})^2}. \tag{47}$$

Здесь

$$\Phi(x,t) = (\lambda_{10} - \mu_{10})x - 4\left(\lambda_{10}^3 - \mu_{10}^3\right)t,$$
$$\Theta(y) = -\left(\lambda_{10}^2 - \mu_{10}^2\right)y \tag{48}$$

Соответствующее решение $u(x, y, t)$ уравнения КП-2 имеет вид

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{4(\lambda_{10} - \mu_{10})^2\left(d_\Theta\left(1 + d_0^2e^{2\Phi}\right) - 2d_0^2e^{\Phi}\right)e^{\Phi}}{\left(1 + d_0^2e^{2\Phi} - 2e^{\Phi}d_\Theta\right)^2}, \tag{49}$$

где введены параметры

$$d_0 = \frac{a_1(\lambda_{10} + \mu_{10})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})}, \quad d_\Theta = \frac{a_1\left(\lambda_{10}e^{\Theta} + \mu_{10}e^{-\Theta}\right)}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})}. \tag{50}$$

Очевидно, что $d_\Theta\big|_{y=0} = d_0$, при этом решение уравнения КП-2 в полуплоскости $y \geq 0$, на границе $y = 0$ этой области удовлетворяет интегрируемому граничному условию

$$(u_{xx} + \sigma u_y)\big|_{y=0} = 0, \tag{51}$$

двумерное солитонное решение (50) при этом превращается в одномерный солитон

$$u(x,\,y,\,t)\big|_{y=0}=\frac{4(\lambda_{10}-\mu_{10})^2e^{\Phi}d_0}{\left(1-d_0e^{\Phi}\right)^2}=-\frac{(\lambda_{10}-\mu_{10})^2}{\mathrm{ch}^2\,\frac{\Phi+\varphi_0}{2}}\,, \tag{52}$$

$$d_0=\frac{a_1(\lambda_{10}+\mu_{10})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10}-\mu_{10})}\doteq -e^{\varphi_0}\,. \tag{53}$$

Полученное солитонное решение (49), очевидно, несингулярно при следующем выборе параметров $a_{10},\mu_{10},\lambda_{10}$:

$$\begin{array}{lcl} a_1\lambda_{10}<0,\ a_1\mu_{10}<0, & \text{или} & a_1\lambda_{10}>0,\ a_1\mu_{10}>0, \\ \lambda_{10}(\lambda_{10}-\mu_{10})>0 & & \lambda_{10}(\lambda_{10}-\mu_{10})<0. \end{array} \tag{54}$$

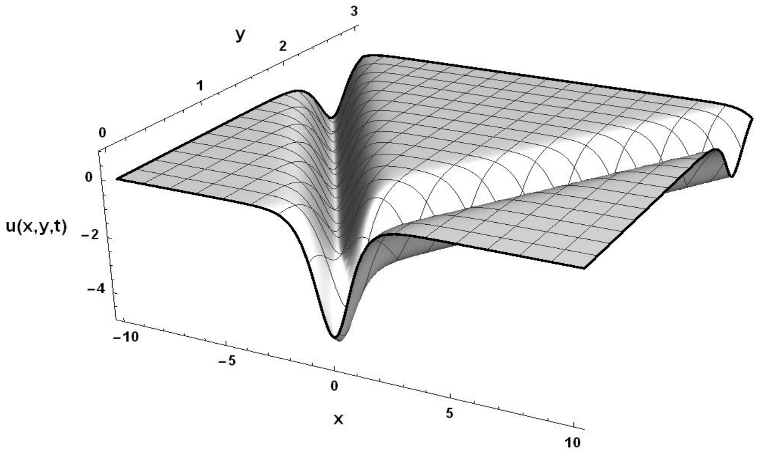


Рис. 1. – Решение (49). Значения параметров:

$\lambda_{10}=1$, $\mu_{10}=3$, $a_1=1$

Fig. 1 – Solution (49). Parameter values:

$\lambda_{10}=1$, $\mu_{10}=3$, $a_1=1$

Для обоих указанных выборов (54) $d_0\doteq -e^{\varphi_0}<0$ и одномерный солитон (52) также несингулярен.

2.2. Второй пример точного решения КП-2 с интегрируемыми границами.

Второй пример точного многосолитонного решения КП-2 с интегрируемым граничным условием (58) построим для ядра вида

$$R_0(\mu,\,\overline{\mu};\,\lambda,\,\lambda)=$$
$$=\sum_k\left(a_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\overline{\mu}_k)+\overline{a}_k\delta(\mu+\overline{\mu}_k)\delta(\lambda+\mu_k)\right), \tag{55}$$

состоящего из пар слагаемых типа (29) и (31) с $\lambda_k=\overline{\mu}_k$. Такое ядро, очевидно, по построению, проведенному в начале раздела, удовлетворяет условию вещественности

$$R_0(\mu,\,\overline{\mu};\,\lambda,\,\overline{\lambda})=\overline{R_0(-\overline{\mu},\,-\mu;\,-\overline{\lambda},\,-\lambda)}. \tag{56}$$

Интегрируемое граничное условие, как было показано в разделе 1, выполняется при условии

$$(u_{xx}+\sigma u_y)\Big|_{y=0}=$$

$$=\frac{8i}{\pi}\partial_x^2\left(\iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)}d\mu_R d\mu_I\right)\Bigg|_{y=0}=0 \tag{57}$$

и может быть удовлетворено при следующем требовании:

$$\iint_C d\mu_R d\mu_I \iint_C d\lambda_R d\lambda_I R_0(\mu,\,\bar{\mu};\,\lambda,\,\bar{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)}\Bigg|_{y=0}=0. \tag{58}$$

Для любой пары слагаемых ядра R_0 вида

$$a_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\bar{\mu}_k)+\bar{a}_k\delta(\mu+\bar{\mu}_k)\delta(\lambda+\mu_k) \tag{59}$$

подстановка (59) в (58) приводит к соотношению

$$a_k\mu_k e^{F(\mu_k)-F(\bar{\mu}_k)}-\bar{a}_k\bar{\mu}_k e^{F(-\bar{\mu}_k)-F(-\mu_k)}\Big|_{y=0}=$$

$$=(a_k\mu_k-\bar{a}_k\bar{\mu}_k)e^{\Phi_k(x,t)+i\Theta_k(y)}\Big|_{y=0}=(a_k\mu_k-\bar{a}_k\bar{\mu}_k)e^{\Phi_k(x,t)}, \tag{60}$$

здесь

$$\Phi_k(x,t)+i\Theta_k(y)=i(\mu_k-\bar{\mu}_k)x+4i\left(\mu_k^3-\bar{\mu}_k^3\right)t-\left(\mu_k^2-\bar{\mu}_k^2\right)y=$$

$$=-2\mu_{kI}x-8\mu_{kI}\left(3\mu_{kR}^2-\mu_{kI}^2\right)t-4i\mu_{kI}\mu_{kR}y,$$

т. е.

$$\Phi_k(x,\,t)=-2\mu_{kI}x-8\mu_{kI}\left(3\mu_{kR}^2-\mu_{kI}^2\right)t,\quad \Theta_k(y)=-4\mu_{kI}\mu_{kR}y. \tag{61}$$

Из (60) заключаем, что интегрируемое граничное условие удовлетворяется при

$$a_k\mu_k-\bar{a}_k\bar{\mu}_k=0\Rightarrow\frac{a_k}{\bar{\mu}_k}=\frac{\bar{a}_k}{\mu_k}=b_k=\bar{b}_k\,, \tag{62}$$

или $a_k=b_k\bar{\mu}_k$, $\bar{a}_k=b_k\mu_k$ $(k=1,\ldots N)$, т. е. для ядер R_0 вида (55) с вещественными амплитудами $\bar{b}_k=b_k$

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})=\sum_k(b_k\bar{\mu}_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\bar{\mu}_k)+b_k\mu_k\delta(\mu+\bar{\mu}_k)\delta(\lambda+\mu_k)). \tag{63}$$

Для применения общей детерминантной формулы $u(x,y,t)=-2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln(\det B)\right)$ вводим очевидным образом наборы точек комплесной плоскости λ, набор (Λ), соответствующий полюсам $\lambda=\Lambda_k$ строящейся волновой функции $\chi(\lambda,\,\bar{\lambda})$:

$$(\Lambda):(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{2N})=(\bar\mu_1,\ldots,\bar\mu_N,-\mu_1,\ldots,-\mu_N) \quad (64)$$

и точек

$$(M):(M_1,\ldots,M_{2N})=(\mu_1,\ldots,\mu_N,-\bar\mu_1,\ldots,-\bar\mu_N), \quad (65)$$

в которых в методе $\bar\partial$-одевания вычисляются волновые функции $\chi(M_k,\bar M_k)$. Наборам точек (64) и (65), в силу (63), соответствует ядро R_0:

$$R_0(\mu,\bar\mu;\lambda,\bar\lambda)=\sum_{k=1}^{2N}A_k\delta(\mu-M_k)\delta(\lambda-\Lambda_k). \quad (66)$$

Многосолитонное решение, соответствующее ядру (72), как было показано в первом разделе, дается простой детерминатной формулой (17) с матрицей B, задаваемой выражением

$$B_{lk}=e^{F(\mu_k)}\left(\delta_{lk}-\frac{2i}{\pi}\frac{A_k}{\lambda_k-\mu_l}e^{F(\mu_l)-F(\lambda_k)}\right)e^{-F(\mu_l)}=$$

$$=e^{F(\mu_k)}C_{lk}e^{-F(\mu_l)}. \quad (67)$$

Строящееся точное решение, как было показано, удовлетворяет условию вещественности и интегрируемому граничному условию.

В простейшем случае $N=1$ одной пары слагаемых в ядре (63), т. е. для ядра вида

$$R_0(\mu,\bar\mu;\lambda,\bar\lambda)=b_1\bar\mu_1\delta(\mu-\mu_1)\delta(\lambda-\bar\mu_1)+b_1\mu_1\delta(\mu+\bar\mu_1)\delta(\lambda+\mu_1)\quad(\bar b_1=b_1). \quad (68)$$

После простых вычислений получается следующее выражении для $\det B$:

$$\det B=1+\frac{2b_k e^{\Phi(x,t)}}{\pi\mu_I}\left(\mu_R\cos\Theta(y)+\mu_I\sin\Theta(y)\right)+\frac{b_1^2\mu_R^2e^{2\Phi(x,t)}}{\pi^2\mu_I^2}=$$

$$=1+d_0^2e^{2\Phi(x,t)}+2d_\Theta e^{\Phi(x,t)}, \quad (69)$$

где

$$\Phi_1(x,t)=-2\mu_{1I}x-8\mu_{1I}\left(3\mu_{1R}^2-\mu_{1I}^2\right)t,\ \Theta_1(y)=-4\mu_{1I}\mu_{1R}y$$

$$\text{и } d_0=\frac{b_1\mu_{1R}}{\pi\mu_{1I}},\ d_\Theta=\frac{b_1}{\pi\mu_{1I}}\left(\mu_{1R}\cos\Theta_1(y)+\mu_{1I}\sin\Theta_1(y)\right). \quad (70)$$

Из (17) и (69) определяем решение уравнения КП-2:

$$u(x,y,t)=\frac{-16\mu_I^2e^{\Phi}}{(\det B)^2}\left(d_\Theta+2d_0^2e^{\Phi}+d_0^2d_\Theta e^{2\Phi}\right)=$$

$$=\frac{-16\mu_I^2e^{\Phi}\left(d_\Theta+2d_0^2e^{\Phi}+d_0^2d_\Theta e^{2\Phi}\right)}{\left(1+d_0^2e^{2\Phi(x,t)}+2d_\Theta e^{\Phi(x,t)}\right)^2}. \quad (71)$$

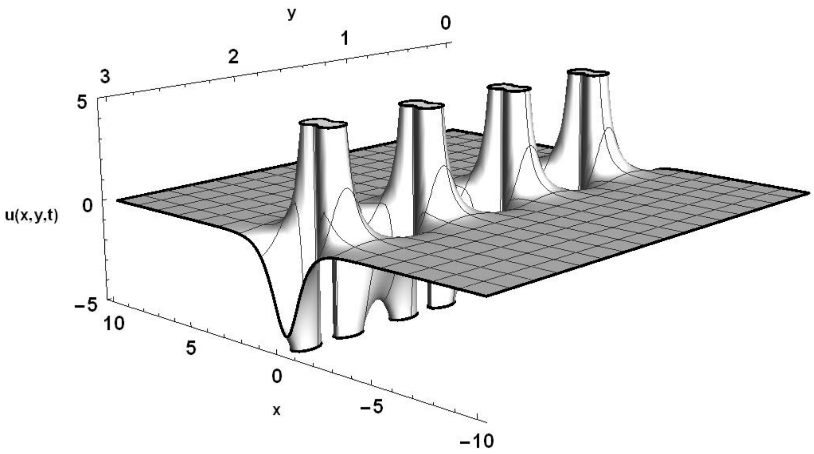


Рис. 2. – Сингулярное решение (71). Параметры:

$\mu_R = 2$, $\mu_I = 1$, $b_1 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Fig. 2 – Singular solution (71). Parameter values:

$\mu_R = 2$, $\mu_I = 1$, $b_1 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

При $y = 0$, т. е. на границе области $y \geq 0$, решение сводится к одномерному несингулярному солитону:

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{-16\mu_I^2 e^{\Phi} d_0}{\left(1 + d_0 e^{\Phi}\right)^2} = \frac{-4\mu_I^2}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\Phi + \varphi_0}{2}\right)}, \tag{72}$$

здесь для обеспечения несингулярности солитона (77) положено

$$d_0 = \frac{b_1 \mu_{1R}}{\pi \mu_{1I}} \doteq e^{\varphi_0} > 0. \tag{73}$$

Построенное решение (71), очевидно, является периодическим по y и распространяется вдоль оси x, сохраняя свою форму, со скоростью

$$V_x = 4\left(\mu_{1I}^2 - 3\mu_{1R}^2\right), \tag{74}$$

это решение является сингулярным и при выполнении условия (73) на границе $y = 0$ сводится к одномерному несингулярному солитону (72).

3. Периодические решения уравнений КП-2 с интегрируемыми граничными условиями

При построении периодических решений уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условиями удовлетворим сначала условию мнимости фазы $F(\mu) - F(\lambda)$, входящей в уравнение $\bar{\partial}$-проблемы для волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$. Учитывая определение $F(\mu, \lambda) = i\mu x - \mu^2 y + 4i\mu^3 t$, имеем:

$$\overline{\Delta F(\mu,\lambda)} = -i(\overline{\mu}-\overline{\lambda})x - (\overline{\mu}^2-\overline{\lambda}^2)y - 4i(\overline{\mu}^3-\overline{\lambda}^3)t =$$

$$= -\Delta F(\mu,\lambda) = -i(\mu-\lambda)x + (\mu^2-\lambda^2)y - 4i(\mu^3-\lambda^3)t, \tag{75}$$

$$\Rightarrow \overline{\mu}^2 = \lambda^2, \overline{\mu} = -\lambda. \tag{76}$$

При выполнении условия $\overline{\mu} = -\lambda$ имеем для фазы $F(\mu)-F(\lambda) = = F(-\overline{\lambda}) - F(\lambda)$ следующее выражение:

$$F(-\overline{\lambda}) - F(\lambda) = i(-\overline{\lambda} \;\; -\overline{\lambda})x - (\overline{\lambda}^2-\lambda^2)y + 4i(-\overline{\lambda}^3-\lambda^3)t =$$

$$= -2i\lambda_R x - 2\cdot 4i\lambda_R\left(\lambda_R^2 - 3\lambda_I^2\right)t + 4i\lambda_R\lambda_I y = i\Phi(x,t) + i\Theta(y). \tag{77}$$

Аналогично для фазы $F(-\lambda) - F(\overline{\lambda})$ получаем

$$F(-\lambda) - F(\overline{\lambda}) = i(-\lambda \;\; -\overline{\lambda})x - (\lambda^2-\overline{\lambda}^2)y + 4i(-\overline{\lambda}^3-\lambda^3)t =$$

$$= i\Phi(x,t) - i\Theta(y). \tag{78}$$

В (77) и (78) введены обозначения:

$$\Phi(x,t) \doteq -2\lambda_R x - 8\lambda_R\left(\lambda_R^2 - 3\lambda_I^2\right)t, \quad \Theta(y) = 4\lambda_R\lambda_I y. \tag{79}$$

Подчеркнем, что желая получить периодические решения, мы придерживаемся выполнения условия мнимости фазы $F(\mu)-F(\lambda)$, откуда и следует (76) и выражения (77) и (78).

Удовлетворим теперь интегрируемому граничному условию

$$(u_{xx} + \sigma u_y)\Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{8i}{\pi}\partial_x^2\left(\iint\limits_C d\lambda_R d\lambda_{\mathrm{I}} \iint\limits_C R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\overline{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I\right)\Bigg|_{y=0} = 0. \tag{80}$$

Интегрируемое граничное условие $(u_{xx}+\sigma u_y)\Big|_{y=0}$, в силу (80), может быть удовлетворено при выполнении соотношения

$$\iint\limits_C d\lambda_R d\lambda_{\mathrm{I}} \iint\limits_C R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\overline{\lambda})\mu e^{F(\mu)-F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I\Bigg|_{y=0} = 0. \tag{81}$$

Как уже отмечалось в разделе 2, фаза $(F(\mu)-F(\lambda))\Big|_{y=0}$ не изменяется при инволюции $\mu \to -\lambda, \lambda \to -\mu$, поэтому требование (81) можно удовлетворить, выбирая ядро R_0 в виде суммы двух слагаемых:

$$R_0(\mu,\overline{\mu};\lambda,\lambda) = b_1\delta(\mu+\overline{\lambda}_1)\delta(\lambda-\lambda_1) + b_2\delta(\mu+\lambda_1)\delta(\lambda-\overline{\lambda}_1). \tag{82}$$

Каждое из слагаемых, в силу отмеченой инволюции, приводит к одной и той же экспоненте

$$e^{F(-\bar{\lambda}_1)-F(\lambda_1)}\Big|_{y=0} = e^{F(-\lambda_1)-F(\bar{\lambda}_1)}\Big|_{y=0} = e^{i\Phi(x,t)}. \tag{83}$$

Условие (81) при этом дает

$$(-b_1\bar{\lambda}_1 - b_2\lambda_1)e^{i\Phi(x,t)}\Big|_{y=0} = 0, \tag{84}$$

откуда получаем соотношение между константами b_1, b_2

$$b_2 = -b_1\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}. \tag{85}$$

Итак, для ядер R_0 вида

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\lambda) = \sum_k \left(b_k\delta(\mu+\bar{\lambda}_k)\delta(\lambda-\lambda_k) - b_k\frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda_k}\delta(\mu+\lambda_k)\delta(\lambda-\bar{\lambda}_k) \right) \tag{86}$$

интегрируемое граничное условие $(u_{xx}+\sigma u_y)\big|_{y=0}$, в силу выполнения условий (85), и, следовательно, условия (81) удовлетворяется. Вводя наборы точек комплексной плоскости λ

$$\begin{gathered}(\mathrm{M}):\ (M_1,\dots,M_N;\,M_{N+1},\dots,M_{2N}) = (-\bar{\lambda}_1,\dots,-\bar{\lambda}_N;\,-\lambda_1,\dots,\lambda_N),\\ (\Lambda):\ (\Lambda_1,\dots,\Lambda_N;\,\Lambda_{N+1},\dots,\Lambda_{2N}) = (\lambda_1,\dots,\lambda_N;\,\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_N)\end{gathered} \tag{87}$$

и набор соответствующих амплитуд

$$(A):\ (A_1,\dots,A_N;\,A_{N+1},\dots,A_{2N}) = \left(b_1,\dots,b_N;\,-b_1\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1},\dots,-b_N\frac{\bar{\lambda}_N}{\lambda_N}\right), \tag{88}$$

получаем класс точных периодических решений КП-2 в виде простой детерминантной формулы

$$u(x,y,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\ln(\det B)\big) \tag{89}$$

с матрицей B вида

$$B_{lk} = e^{F(\mu_k)}\left(\delta_{lk} - \frac{2i}{\pi}\frac{A_k}{\lambda_k-\mu_l}e^{F(\mu_l)-F(\lambda_k)}\right)e^{-F(\mu_l)},\ (k,l=1,\dots,2N). \tag{90}$$

Этот класс периодических решений уравнения КП, удовлетворяющих интегрируемому граничному условию $(u_{xx}+\sigma u_y)\big|_{y=0}=0$, соответствует по построению ядру (82) или в терминах (87), (88) ядру

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^{2N} A_k\delta(\mu-M_k)\delta(\lambda-\Lambda_k). \tag{91}$$

Строящиеся рассматриваемым способом решения являются пока комплексными, так как условие вещественности еще не удовлетворено.

Условию вещественности периодических решений $u(x, y, t)$ можно удовлетворить на заключительном этапе построения решений прямым требованием вещественности:

$$\overline{u(x,\ y,\ t)} = \overline{-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln(\det B)\right]} = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln(\det B)\right] = u(x,\ y,\ t). \qquad (92)$$

Продемонстрируем это на простом примере с одной парой слагаемых ($N = 1$) в ядре (86):

$$R_0(\mu,\ \overline{\mu};\ \lambda,\ \lambda) = b_1\delta(\mu + \overline{\lambda}_1)\delta(\lambda - \lambda_1) - b_1\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\delta(\mu + \lambda_1)\delta(\lambda - \overline{\lambda}_1) =$$

$$= A_1\delta(\mu - M_1)\delta(\lambda - \Lambda_1) + A_2\delta(\mu - M_2)\delta(\lambda - \Lambda_2). \qquad (93)$$

Вычисления по общим формулам раздела 2 дают следующее выражение для $\det B$:

$$\det(B) = 1 + \frac{b_1^2\overline{\lambda}_1\lambda_{1I}^2 e^{2i\Phi(x,\ t)}}{\pi^2\lambda_1\lambda_{1R}^2|\lambda_1|^2} - \frac{ib_1e^{i(\Phi+\Theta(y))}}{\pi\lambda_{1R}} + \frac{ib_1\overline{\lambda}_1e^{i(\Phi-\Theta(y))}}{\pi\lambda_{1R}\lambda_1}. \qquad (94)$$

Вводя обозначения

$$b_1 = |b_1|e^{i\phi_a} = ae^{i\phi_a},\ \lambda_1 = |\lambda_1|e^{i\phi_\lambda},\ \overline{\lambda}_1 = |\lambda_1|e^{-i\phi_\lambda}, \qquad (95)$$

перепишем (95) в следующей форме:

$$\det(B) = e^{i(\Phi-\phi_\lambda+\phi_a)}\times$$

$$\times\left\{e^{-i(\Phi-\phi_\lambda+\phi_a)} + \frac{a^2\lambda_{1I}^2e^{i(\Phi-\phi_\lambda+\phi_a)}}{\pi^2\lambda_{1R}^2|\lambda_1|^2} + \frac{2a\sin(\Theta(y)+\phi_\lambda)}{\pi\lambda_R}\right\}. \qquad (96)$$

Потребуем также, чтобы выполнялось соотношение

$$a^2 = \frac{\pi^2\lambda_{1R}^2|\lambda_1|^2}{\lambda_{1I}^2} \Rightarrow a = \pi|\lambda_1|\frac{\lambda_{1R}}{\lambda_{1I}}. \qquad (97)$$

Кроме того, напомним, что согласно (77), (78) фазы Φ, Θ даются выражениями:

$$\Phi(x,\ t) = -2\lambda_{1R}x - 8\lambda_{1R}\left(\lambda_{1R}^2 - 3\lambda_{1I}^2\right)t, \quad \Theta(y) = 4\lambda_{1R}\lambda_{1I}y. \qquad (98)$$

В результате проведенных вычислений выражение для $\det(B)$ приобретает максимально овеществленный вид

$$\det(B) = 2e^{i(\Phi-\phi_\lambda+\phi_a)}\left\{\cos(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}}\sin(\Theta(y)+\phi_\lambda)\right\}, \qquad (99)$$

при этом

$$\ln\left(\det(B)\right) = i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \ln 2\left(\cos(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}}\sin\left(\Theta(y) + \phi_\lambda\right)\right) =$$

$$= i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \ln\left(\det(\tilde{B})\right). \qquad (100)$$

Первое слагаемое в (100) линейно по фазе Φ и в (98) не дает вклада в решение, второе же слагаемое после вычислений по формуле (89) приводит к следующему выражению для вещественного периодического решения $u(x, y, t)$ уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условием $(u_{xx} + \sigma u_y)\big|_{y=0} = 0$:

$$u(x, y, t) = \frac{8\lambda_{1R}^2\left(1 + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}}\sin\left(\Theta(y) + \phi_\lambda\right)\cos(\Phi(x,t) + \phi_a - \phi_\lambda)\right)}{\left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}}\sin\left(\Theta(y) + \phi_\lambda\right) + \cos\left(\Phi(x,t) + \phi_a - \phi_\lambda\right)\right)^2}. \qquad (101)$$

На границе $y = 0$ области $y \geq 0$ построенное решение (102) принимает вид одномерного периодического решения

$$u(x, t) \doteq u(x, y, t)\big|_{y=0} = \frac{8\lambda_R^2}{1 + \cos\left(\Phi(x, t) + \phi_a - \phi_\lambda\right)} =$$

$$= \frac{4\lambda_R^2}{\cos^2\left(\frac{\Phi(x,t) - \phi_\lambda + \phi_a}{2}\right)}. \qquad (102)$$

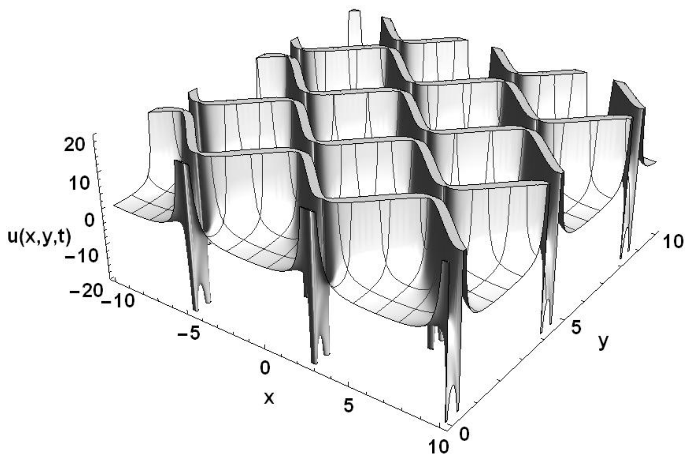


Рис. 3 – Периодическое решение (101). Значения параметров:

$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi_\lambda} = 1e^{2i}$, $\varphi_a = 3$

Fig. 3 – Periodic solution (101). Parameter values:

$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi_\lambda} = 1e^{2i}$, $\varphi_a = 3$

Построенное периодическое решение $u(x, y, t)$ уравнения КП-2 удовлетворяет граничному условию $(u_{xx} + \sigma u_y)\big|_{y=0} = 0$, является периодическим по y, а также по x, это решение сингулярно. В некотором смысле это решение напоминает солитонное периодическое решение, полученное в заключительной части раздела 2.

Заключение

Важную роль в квантовой теории поля, гидродинамике, теории динамических систем играют точные решения нелинейных уравнений с частными производными, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Метод обратной задачи рассеяния, как метод точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, названных интегрируемыми, был успешно применен в ряде работ различных авторов [18–22] (Е.К. Склянин, В.Л. Верещагин и др.) к построению точных решений интегрируемых нелинейных уравнений с так называемыми интегрируемыми граничными условиями, совместными с линейными вспомогательными задачами. Построение таких точных решений, после установления интегрируемых граничных условий, может быть осуществлено с использованием того или иного варианта метода обратной задачи, до сих пор для этого в основном использовался метод одевания Захарова–Шабата.

В настоящей работе, на примере уравнения КП-2, в рамках метода $\bar{\partial}$- одевания Захарова–Манакова, развита новая схема эффективного построения точных решений нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями. Получены новые точные солитонные и периодические решения уравнения КП-2 на полуплоскости с интегрируемым граничным условием. Предложенная схема может быть применена к построению точных решений с интегрируемыми краевыми условиями и других двумерных интегрируемых нелинейных уравнений. Работа авторов по данной теме продолжается, полученные результаты будут опубликованы.

Приложение. Вывод формулы (17)

Из (15) получается алгебраическая система уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} B_{lk}\chi(\mu_k) = 1, \quad B_{lk} = \delta_{lk} - \frac{2i}{\pi}\frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l} e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)} \quad (k, l = 1, ..., N) \tag{П1}$$

для вычисления волновых функций $\chi(\mu_k, \bar{\mu}_k) \equiv \chi(\mu_k)$ в точках $(\mu_1, ..., \mu_N)$. При этом необходимый для вычисления $u(x, y, t)$ коэфициент разложения χ_{-1} имеет вид

$$\chi_{-1}(x, y, t) = -\frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{N} A_k\chi(\mu_k)e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)} = -\frac{2i}{\pi}\sum_{k,l}^{N} A_k e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)} B_{kl}^{-1}. \tag{П2}$$

Матрицу B_{lk} удобно выразить, используя преобразование подобия, через матрицу C_{lk}:

$$B_{lk} = e^{F(\mu_k)}\left(\delta_{lk} - \frac{2i}{\pi}\frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l}e^{F(\mu_l)-F(\lambda_k)}\right)e^{-F(\mu_l)} =$$

$$= e^{F(\mu_k)}C_{lk}e^{-F(\mu_l)}. \qquad (\text{П}3)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial C_{lk}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi}A_k e^{F(\mu_l)-F(\lambda_k)}, \qquad (\text{П}4)$$

поэтому имеем, используя (П4), для χ_{-1} из (16):

$$\chi_{-1} = -\frac{2i}{\pi}\sum_{k,l}^{N} A_k e^{F(\mu_k)-F(\lambda_k)}e^{-F(\mu_k)}C_{kl}^{-1}e^{F(\mu_l)} = i\sum_{k,l}\frac{\partial C_{lk}}{\partial x}C_{kl}^{-1} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}\ln(\det C) = i\frac{\partial}{\partial x}\ln(\det B). \qquad (\text{П}5)$$

Из (11) и (П5) получаем известную детерминантную формулу для точных решений уравнений КП:

$$u = 2i\frac{\partial}{\partial x}\chi_{-1} = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln\det B) \qquad (\text{П}6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.** Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 4. – С. 753–756.
2. **Дрюма В.С.** Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Вриза (КДВ) // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19, вып. 12. – С. 753–755.
3. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 45–53.
4. **Davey A., Stewartson K.** On three-dimensional packet of surface waves // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. – 1974. – Vol. 338 (1613). – P. 101–110. – doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
5. **Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G.** Coherent structures for the Ishimori equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1991. – Vol. 48, iss. 2–3. – P. 367–395.
6. **Веселов А.П., Новиков С.П.** Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уранения // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 20–24.
7. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.В. Питаевский. – Москва: Наука, 1980.
8. **Ablowitz M.J., Clarkson P.A.** Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge: Cambridge university Press, 1991. – (London Mathematical Society lecture note series; 149).

9. **Konopelchenko B.G**. Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. – New York: Plenum Press, 1992.
10. **Konopelchenko B.G.** Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Scientific, 1993.
11. **Manakov S.V.** The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1981. – Vol. 3 (1–2). – P. 420–427. – doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
12. **Beals R., Coifman R.R.** The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1986. – Vol. 18 (1–3). – P. 242–249. – doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
13. **Захаров В.Е., Манаков С.В.** Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19, вып. 2. – С. 11–25.
14. **Zakharov V.E.** Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$-problem // Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics / ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. – Kiev: Naukova Dumka, 1988. – Vol. 1. – P. 152.
15. **Bogdanov L.V., Manakov S.V.** The non-local $\bar{\partial}-$problem and (2+1)-dimensional soliton equations // Journal of Physics A. – 1988. – Vol. 21, N 10. – P. 537–544. – doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
16. **Fokas A.S., Ablowitz M.J.** The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems // Nonlinear Phenomena / ed. by K.B. Wolf. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1983. – P. 137–183. – doi: 10.1007/3-540-12730-5_6. – (Lecture Notes in Physics; vol. 189).
17. **Beals R., Coifman R.R.** Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$-method // Inverse Problems. – 1989. – Vol. 5, N 2. – P. 87–130. – doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
18. **Гудкова Е.В., Хабибуллин И.Т.** Уравнение Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости // Теоретическая и математическая физика. – 2004. – Т. 140, № 2. – С. 230–240.
19. **Хабибуллин И.Т.** Начально-краевая задача на полуоси для уравнения МКдФ // Функциональный анализ и его приложения. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 65–75.
20. **Хабибуллин И.Т.** Уравнение sin-Гордон на полуоси // Теоретическая и математическая физика. – 1998. – Т. 114, № 1. – С. 115–125.
21. **Верещагин В.Л.** Интегрируемые граничные условия для 2+1 -мерных моделей математической физики // Теоретическая и математическая физика. –2012. –Т. 171, № 3. – С. 430–437.
22. **Склянин Е.К.** Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 1987. – Т. 21, вып. 2. – С. 86–87.

THE CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF KADOMTSEV-PETVIASHVILI (KP-2) EQUATION WITH INTEGRABLE BOUNDARY CONDITIONS VIA DIBAR-DRESSING METHOD

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

In this paper, in the framework of the Zakharov-Manakov method, a new scheme of exact integration of nonlinear two-dimensional differential equations with integrable boundary conditions is developed. New exact soliton and periodic solutions of the KP-2 equation on the half-plane are obtained.

The principal possibility of using the dressing method for constructing classes of exact soliton and periodic solutions of two-dimensional integrable nonlinear equations with integrable boundary conditions is demonstrated.

Key words: integrable nonlinear equations, method of $\bar{\partial}$-dressing , two-dimensional integrable Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation, solutions with integrable boundary conditions, solitons, periodic solutions.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29

REFERENCES

1. Kadomtsev B.B., Petviashvili V.I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, p. 539–541. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 4, pp. 753–756.
2. Dryuma V.S. Analytic solution of the two-dimensional Korteweg–de Vries (KdV) equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 1974, vol. 19, iss. 12, p. 387. Translated from *Pis'ma v Zhurnal teoreticheskoi i eksperimental'noi fiziki*, 1974, vol. 19, iss. 12, pp. 753–755.
3. Zakharov V.E., Shabat A.B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Functional Analysis and Its Applications*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 226–235. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 43–53.
4. Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packet of surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1974, vol. 338 (1613), pp. 101–110. doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
5. Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G. Coherent structures for the Ishimori equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, vol. 48, iss. 2–3, pp. 367–395.
6. Novikov S.P., Veselov A.P. Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations. *Soviet Mathematics Doklady*, 1980, vol. 30, pp. 588–591. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1984, vol. 279, no. 1, pp. 20–24.
7. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoi zadachi* [Theory of solitons: the Inverse Scattering Method]. Moscow, Nauka Publ., 1980.
8. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. London Mathematical Society lecture note series*, vol. 149. Cambridge, Cambridge university Press, 1991.
9. Konopelchenko B.G. Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. New York, Plenum Press, 1992.
10. Konopelchenko B.G. Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. Singapore, World Scientific, 1993.
11. Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1981, vol. 3 (1–2), pp. 420–427. doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
12. Beals R., Coifman R.R. The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 18 (1–3), pp. 242–249. doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
13. Zakharov V.E., Manakov S.V. Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 89–101. doi: 10.1007/BF01078388. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 11–25.
14. Zakharov V.E. Commutating operators and nonlocal problem. *Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics*. Ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, vol. 1, p. 152.

15. Bogdanov L.V., Manakov S.V. The non-local problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *Journal of Physics A*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. 537–544. doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
16. Fokas A.S., Ablowitz M.J. The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems. *Nonlinear Phenomena.* Ed. by K.B. Wolf. *Lecture Notes in Physics*, vol. 189. Berlin, Heidelberg, Springer, 1983, pp. 137–183. doi: 10.1007/3-540-12730-5_6.
17. Beals R., Coifman R.R. Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$-method. *Inverse Problems*, 1989, vol. 5, no. 2, pp. 87–130. doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
18. Gudkova E.V., Habibullin I.T. Kadomtsev–Petviashvili equation on the half-plane. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 140, iss. 2, pp. 1086–1094. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2004, vol. 140, no. 2, pp. 230–240.
19. Habibullin I.T. An initial-boundary value problem on the half-line for the MKdV equation. *Functional Analysis and Its Applications*, 2000, vol. 34, iss. 1, pp. 52–59. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 2000, vol. 34, iss. 1, pp. 65–75.
20. Habibullin I.T. Sine-Gordon equation on the semi-axis. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1998, vol. 114, iss. 1, pp. 90–98. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1998, vol. 114, no. 1, pp. 115–125.
21. Vereshagin V.L. Integrable boundary condition for 2+1 -dimensional models of math physics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 171, iss. 3, pp. 792–799. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2012, vol. 171, no. 3, pp. 430–437.
22. Skliyanin E.K. Boundary conditions for integrable equations. *Functional Analysis and Its Applications*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 164–166. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 86–87.

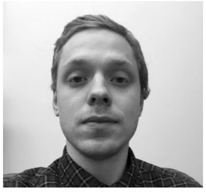
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дубровский Владислав Георгиевич – родился в 1948 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 49 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Dubrovsky Vladislav Georgievich (b. 1948) – Doctor of Sciences (Phys.&Math.), professor. Head of chair of Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 49 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Топовский Антон Валерьевич – родился в 1985 году, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 8 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Topovsky Anton Valerevich (b. 1985) – Candidate of Sciences (Phys.&Math.), associate professor of department of the Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 8 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).



Остреинов Георгий Михайлович – родился в 1992 году, ассистент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов, задача рассеяния. Опубликовано 10 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: wtfsnoo@gmail.com).

Ostreinov George Mikhailovich (b. 1992) – assistant of department of the Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations; soliton theory, scattering problem. He is author of 10 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: wtfsnoo@gmail.com).

Статья поступила 23 октября 2018 г.
Received October 23, 2018

To Reference:

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M. Postroenie tochnykh reshenii uravneniya Kadomtseva–Petviashvili (KP-2) s integriruemymi granichnymi usloviyami metodom dibar-odevaniya [The construction of exact solutions of Kadomtsev–Petviashvili (KP-2) equation with integrable boundary conditions via dibar-dressing method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 7–29. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29.