

УДК 550.837:517.958

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ОТ  
ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ КАТУШЕК****М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин,  
П.А. Домников, Ю.И. Кошкина***Новосибирский государственный технический университет*

В статье предлагается метод конечноэлементного моделирования электромагнитного поля от произвольно ориентированных катушек в задачах электромагнитного каротажа. Метод основан на использовании технологии выделения поля вмещающей горизонтально-слоистой среды для решения трехмерной задачи. При этом расчет нормального поля (т. е. поля во вмещающей горизонтально-слоистой среде), возбуждаемого произвольно ориентированной генераторной катушкой, предлагается выполнять через расчет полей для двух ориентаций катушек: первой – когда ось катушки перпендикулярна слоям, а второй – когда параллельна.

В работе предлагается и обосновывается математическая модель, позволяющая выполнять расчет электромагнитного поля во вмещающей горизонтально-слоистой среде для случая, когда ось генераторной катушки параллельна слоям, через решение двух осесимметричных задач. Рассматриваются различные способы вычисления соответствующих полей и анализируются проблемы, возникающие при их использовании. Приводится верификация вычислительных схем, разработанных и реализованных на базе предложенных математических моделей, путем сравнения с решением, полученным в трехмерной постановке. Полученные отличия, не превышающие 1...3 %, подтверждают корректность предложенных в данной работе математических моделей и правильность их программной реализации. Аналогичные подходы могут быть применены и для гармонического режима возбуждения поля, а также для соответствующих технологий наземной и морской электро-разведки.

*Ключевые слова:* программное обеспечение для сопровождения технологий электромагнитных зондирований, электромагнитный каротаж, метод конечных элементов, 3D-моделирование, произвольно ориентированная катушка

**Введение**

Для повышения эффективности разработки месторождений углеводородного сырья, снижения энергопотребления и финансовых затрат требуется создание новых высокоразрешающих технологий геофизических исследований околоскважинного пространства, позволяющих осуществлять каротаж в наклонных и горизонтальных нефтегазовых скважинах непосредственно в процессе бурения. Наиболее актуальными среди задач исследования околоскважинного пространства являются задачи геонавигации – определения направления бурения скважины с учетом морфологии продуктивного пласта. Очень перспективными для решения задач геонавигации при бурении скважин являются технологии, использующие для зондирования нестационарные поля [1–2], которые в отличие от более устоявшихся технологий, основанных на гармоническом возбуждении поля [3–4], позволяют «увидеть впереди» изменение структуры продуктивного пласта, что, в свою очередь, позволит обеспечить повышение качества принимае-

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», № ГК 14.515.11.0100 от 16 октября 2013 г., шифр 2013-1.5-14-515-0061-033.

мых решений в процессе бурения нефтегазовых скважин. При этом если для технологий электрокаротажа, использующих постоянный ток и гармоническое возбуждение, в принципе, существует специализированное программное обеспечение (ПО), которое хотя и недостаточно вычислительно эффективно, но все же позволяет выполнять 3D-моделирование, то для технологий зондирований, использующих нестационарные поля, такое ПО практически отсутствует и остается лишь возможность использования плохо приспособленных для решения такого рода задач универсальных пакетов.

В данной работе будут предложены математические модели и основанные на них конечноэлементные вычислительные схемы, которые могут составить основу ПО для сопровождения электромагнитных технологий каротажа, использующих для возбуждения и приема поля произвольно ориентированные катушки.

### 1. Математический аппарат

Одним из важнейших критериев качества ПО, используемого для сопровождения электромагнитных технологий, является вычислительная эффективность соответствующих процедур численного 3D-моделирования, которая должна достигаться не за счет упрощения моделей (математической и геоэлектрической) или ухудшения точности получаемого численного решения, а за счет применения подходов и способов построения аппроксимаций, позволяющих эффективно учитывать особенности поведения электромагнитного поля в исследуемых трехмерных средах.

При решении задач 3D-моделирования геоэлектромагнитных полей с использованием метода конечных элементов хорошо зарекомендовала себя технология с разделением поля [5–9] на нормальную составляющую (поле источника во вмещающей горизонтально-слоистой среде), которая может быть рассчитана с использованием задач меньшей размерности (и поэтому для ее вычисления могут быть использованы очень подробные пространственные дискретизации при относительно невысоких вычислительных затратах), и на аномальную составляющую (поле влияния трехмерных неоднородностей), которая рассчитывается путем решения трехмерной задачи, но уже с использованием существенно более грубых пространственных дискретизаций по сравнению с пространственными дискретизациями, требуемыми на получение решения (с той же точностью) полной задачи (без выделения из него нормального поля).

Расчет нормального поля (т. е. поля во вмещающей горизонтально-слоистой среде), возбуждаемого произвольно ориентированной генераторной катушкой, можно выполнить через расчет полей для двух ориентаций катушек: первой – когда ось катушки перпендикулярна слоям, а второй – когда параллельна.

В принципе, для расчета нормальной составляющей поля могли бы быть использованы полуаналитические методы, которые вплоть до недавнего времени достаточно активно развивались [10]. Однако эти методы ориентированы на расчет поля в малом числе точек (соответствующих положениям приемников) и при необходимости выдачи значений поля в большом числе точек становятся вычислительно неэффективными. Нам же для реализации технологии выделения поля вмещающей горизонтально-слоистой среды необходимо рассчитывать нормальное поле (т. е. поле вмещающей среды) в довольно большом числе узлов трехмерной сетки – в тех подобластях расчетной области, где находятся 3D-неоднородности. Соответственно, более выгодными в этом случае становятся подходы, позволяющие эффективно вычислять нормальное поле не в относительно небольшом числе точек (как полуаналитические методы), а сразу во всем изучаемом объеме.

Поэтому для расчета нормального поля, так же как и для аномального (трехмерного), предлагается использовать конечноэлементные аппроксимации. В этом

случае, когда ось катушки перпендикулярна слоям, математический аппарат достаточно очевиден: такое поле имеет только одну ненулевую компоненту напряженности электрического поля  $E_\varphi$ , которая с очень небольшими вычислительными затратами может быть получена из решения скалярного уравнения в двумерной области в цилиндрической системе координат  $(r, z)$  [5, 7, 8]:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_\varphi + \sigma^n \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = I \delta, \quad (1)$$

где  $I$  – ток в катушке;  $A_\varphi$  –  $\varphi$ -компонента вектор-потенциала;  $\sigma^n = \sigma^n(z)$  – проводимость горизонтально-слоистой среды;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума, а  $\delta$  – дельта-функция, сосредоточенная на линии [7], соответствующей контуре катушки. Нормальная составляющая напряженности электрического поля в этом случае имеет только одну ненулевую компоненту  $E_\varphi$ , которая определяется

с помощью вектор-потенциала в виде  $E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$ .

В случае же, когда ось катушки параллельна границам слоев, поле даже в горизонтально-слоистой среде является трехмерным.

В этом случае возможно использование различных способов. Первым (наиболее очевидным) является способ, основанный на выделении поля однородного пространства. Недостатком такого способа является то, что даже в случае, когда в качестве удельного сопротивления пространства выбирается сопротивление слоя, где находится источник, все равно не удастся достичь даже слабого подобия той эффективности, которую дает выделение поля горизонтально-слоистой среды, поскольку слои в данном случае будут так же, как и трехмерные неоднородности, являться источниками аномального поля, и поэтому для достижения требуемой точности необходимо использовать достаточно подробные конечноэлементные сетки (и это приводит к гораздо более высоким вычислительным затратам).

Другим способом является подход, предложенный в работах [8, 9] для моделирования поля горизонтальной электрической линии (ГЭЛ) и основанный на представлении, по сути, трехмерного поля в одномерной среде в виде суммы полей от источников, каждое из которых может быть получено из решения задачи меньшей размерности.

Однако при использовании таких подходов существует проблема (особенно это актуально для гармонических режимов), связанная с формированием итогового поля из близких по модулю, но разнознаковых составляющих, из-за чего требования по точности к расчету этих составляющих могут очень существенно возрастать (с вытекающими из этого последствиями существенного роста вычислительных затрат).

В данной работе предлагается метод, позволяющий, с одной стороны, представить в горизонтально-слоистой среде (по сути трехмерное) электромагнитное поле, возбуждаемое катушкой, ось которой параллельна границам слоев, в виде суммы полей от источников, поле которых может быть получено из соответствующих осесимметричных задач (т. е. при использовании двумерных постановок в цилиндрических координатах) без взаимовычитающихся составляющих, что, в свою очередь, даст возможность использовать технологию выделения поля не однородного пространства, а горизонтально-слоистой вмещающей среды, а с другой стороны, не допустить появления близких по модулю, но разнознаковых составляющих суммарного поля.

Отметим, что в рассматриваемой нами ситуации генераторная катушка по сути представляет собой диполь (т. е. ее размеры малы по сравнению с расстоянием до приемников), поэтому ее геометрическая форма может быть задана любой. Нам удобно задавать источник электромагнитного поля в случае, когда ось генераторной катушки параллельна границам слоев, в виде квадратной рамки. В этом случае источник электромагнитного поля может быть представлен в виде суммы источников, показанных на рис. 1. Именно такое представление позволит получить нам электромагнитное поле во вмещающей горизонтально-слоистой среде через решение нескольких осесимметричных задач.

Итак, исходный источник (рамка) представляет собой сумму источника «I1», показанного на рис. 1, а, и двух источников «I2», показанных на рис. 1, б. При этом верхняя часть источника «I1» расположена на уровне верхней границы рамки, а нижняя (с обратным знаком тока) – на уровне нижней границы рамки. Источники же «I2» расположены так, что у одного из них ось совпадает с левой границей рамки, а у второго (с обратным знаком тока) – с правой границей рамки. Частью этих источников являются сходящиеся или расходящиеся радиальные токи, обеспечивающие равенство нулю дивергенции токов в каждом из источников. Эти радиальные токи, сходящиеся в точку или расходящиеся из нее и такие, что через любую окружность с центром в этой точке проходит один и тот же ток, в дальнейшем будем называть незаземленными радиальными (НР) источниками.

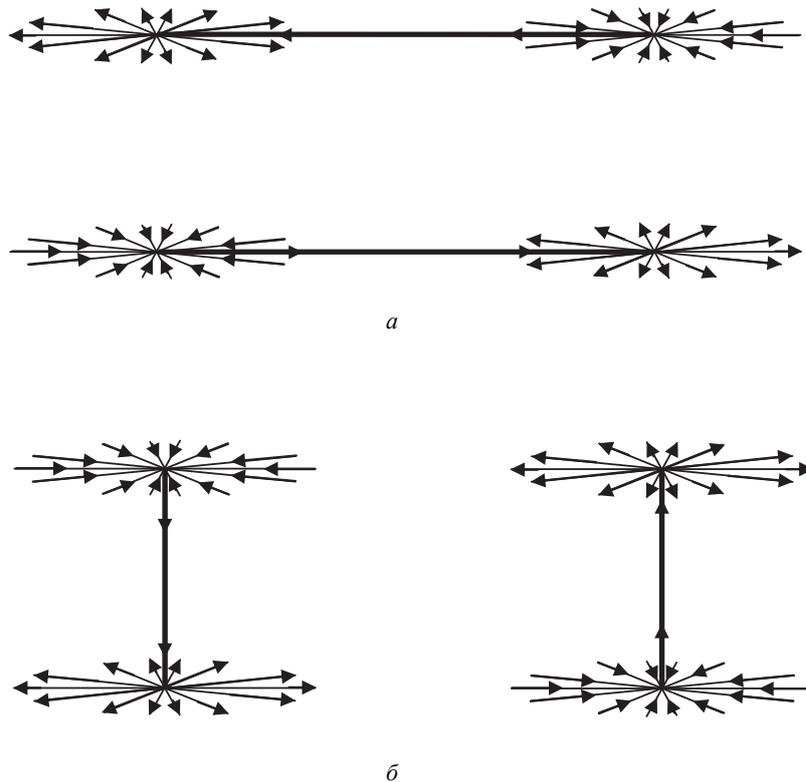


Рис. 1. Вид источников «I1» (а) и «I2» (б), из комбинации которых может быть собран источник в виде токовой рамки, ось которой параллельна слоям горизонтально-слоистой среды

Очевидно, конфигурация источника «I1» такова, что токи имеют только горизонтальные ненулевые составляющие, и поэтому вектор-потенциал  $\bar{\mathbf{A}}^{I1}$ , являющийся решением уравнения

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}^{I1} + \sigma^n \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{I1}}{\partial t} = \bar{\mathbf{J}}^{I1}, \quad (2)$$

описывающего электромагнитное поле для этого источника, удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}}^{I1} = 0.$$

С учетом тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}^{I1} \equiv -\Delta \bar{\mathbf{A}}^{I1} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}}^{I1}$  искомый вектор-потенциал будет удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\mu_0} \Delta \bar{\mathbf{A}}^{I1} + \sigma^n \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{I1}}{\partial t} = \bar{\mathbf{J}}^{I1},$$

где  $\Delta$  – векторный оператор Лапласа.

Источник «I1», в свою очередь, может быть разбит на три источника: два незаземленных радиальных (НР) источника и токовую линию, поле для которых может быть рассчитано с использованием следующих математических моделей.

Поле от двух источников НР в горизонтально-слоистой среде может быть рассчитано путем решения уравнения

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_r + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_r + \sigma^n \frac{\partial A_r}{\partial t} = I(\delta^{r,1} - \delta^{r,2}), \quad (3)$$

где  $I$  – ток в катушке;  $A_r$  –  $r$ -компонента вектор-потенциала, а  $\delta^{r,1}$  и  $\delta^{r,2}$  – дельта-функции, сосредоточенные на поверхностях [7], где расположен источник НР (т. е. на плоскостях, соответствующих верхней и нижней границам рамки). Соответствующая составляющая напряженности электрического поля в этом случае имеет только одну ненулевую компоненту  $E_r$ , которая определяется через  $r$ -компоненту вектор-потенциала как  $E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t}$ .

Поле горизонтальных токовых линий может быть рассчитано в виде суммы полей от точечных источников, расставленных вдоль этих линий. При этом поле от двух точечных источников (расположенных один под другим) может быть вычислено путем решения краевой задачи

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_l + \sigma^n \frac{\partial A_l}{\partial t} = I \Delta l (\delta^{P,1} - \delta^{P,2}), \quad (4)$$

где  $A_l$  – соответствующая направлению горизонтальной линии компонента вектор-потенциала;  $\delta^{P,1}$  и  $\delta^{P,2}$  – дельта-функции, сосредоточенные в точках (центрах подинтервалов токовых линий, в которых заданы точечные источники);

$\Delta l$  – длина подынтервала токовой линии, а  $I$  – по-прежнему ток в катушке. По значениям  $A_l$  определяются вклады в напряженность электрического поля в виде

$$E_l = -\frac{\partial A_l}{\partial t}.$$

Поле источников вида «I2» может быть рассчитано с использованием различных математических моделей.

Первая из них – это математическая модель, записанная относительно  $\varphi$ -компоненты напряженности магнитного поля  $H_\varphi$  [8]. Эта модель при описании электромагнитного процесса после выключения тока имеет вид

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma^n} \operatorname{grad} H_\varphi\right) + \frac{1}{\sigma^n r^2} H_\varphi - \frac{H_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sigma^n}\right) + \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

при этом значение  $H_\varphi$  на постоянном токе (которое является начальным условием для нестационарного процесса (5)) «снаружи» источника равно нулю, а «внутри» может быть вычислено с помощью соотношения  $H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$ , где  $I$  – величина полного тока в источнике.

Другой способ расчета электромагнитного поля от источника «I2» – это использование математической модели, аналогичной (2), и решение соответствующего уравнения с использованием векторных базисных функций в цилиндрических координатах. Такой способ в ряде ситуаций позволяет существенно увеличить точность получаемых численных решений (значительного увеличения точности при использовании такого подхода удалось добиться, например, для задачи моделирования электромагнитного поля от помещенной в обсаженную скважину вертикальной электрической линии – соответствующие исследования описаны в работе [11]).

Однако, отличительной особенностью рассматриваемой задачи является то, что источник поля является составным, и поэтому требования к точности получения отдельных его составляющих, которые впоследствии будут взаимодействовать, очень велики. В данной ситуации, поскольку вектор-потенциал для источника «I1» будет рассчитан с использованием аппроксимаций, основанных на скалярных базисных функциях (и будет получен в виде непрерывной функции), а для источника «I2» – на векторных (и будет получен в виде разрывной функции), обеспечить требуемую точность в суммарном поле можно будет только при очень подробных пространственных дискретизациях, что, очевидно, приведет к резкому росту вычислительных затрат.

Поэтому в данной работе предлагается еще один метод (математическая модель), позволяющий рассчитывать вектор-потенциал с использованием скалярных аппроксимаций (т. е. каждая из его компонент является непрерывной функцией), что в конечном итоге дало возможность вообще исключить взаимодействующие составляющие электромагнитного поля.

Опишем способ построения этой математической модели. Электромагнитное поле каждого источника «I2» с учетом того, что дивергенция плотности сторонних токов  $\vec{J}$  в этих источниках равна нулю, может быть описано с помощью системы дифференциальных уравнений вида

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_r + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_r + \sigma^n \left( \frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) = J_r, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z + \sigma^n \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = J_z, \quad (7)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} V) - \operatorname{div} \left( \sigma^n \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{12}}{\partial t} \right) = 0, \quad (8)$$

где  $\bar{\mathbf{A}}^{12} = (A_r, A_z)$  – векторный потенциал в цилиндрической системе координат, а  $V$  – скалярный потенциал. Напряженность электрического поля в этом случае определяется как  $\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{12}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$ .

Представим  $r$ -компоненту вектор-потенциала  $\bar{\mathbf{A}}^{12}$  в виде  $A_r = A_r^* + \tilde{A}_r$ , где составляющая  $A_r^*$  является решением уравнения вида (3). Тогда система (6)–(8) примет вид

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \tilde{A}_r + \frac{1}{\mu_0 r^2} \tilde{A}_r + \sigma^n \left( \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z + \sigma^n \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = J_z, \quad (10)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} V) - \operatorname{div} \left( \sigma^n \frac{\partial (\tilde{A}_r, A_z)}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \left( \sigma^n \frac{\partial (A_r^*, 0)}{\partial t} \right). \quad (11)$$

Входящее в правую часть уравнения (11) поле  $A_r^*$  полностью совпадает с полем  $A_r$ , рассчитанным для источника «I1» (с обратным знаком), что позволяет не только решать эту задачу один раз, но и (главное!) устранить эти два взаимовычитающихся поля при формировании итогового поля рамки.

Таким образом, для получения поля «вертикальной» рамки (с осью, параллельной слоям горизонтально-слоистой среды) необходимо решить три начально-краевые задачи, описываемые уравнениями (3), (4) и системой уравнений (9)–(11).

При этом предложенную схему можно еще упростить (повысив ее вычислительную эффективность), поскольку решение задачи для уравнения (3) можно вообще исключить.

Введем функцию  $u$  в виде  $u = \operatorname{div}(A_r^*, 0)$ . Продифференцировав соответствующим образом уравнение (3), для  $u$  получим уравнение

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta u + \sigma^n \frac{\partial u}{\partial t} = -I(\delta^{P,1} - \delta^{P,2}), \quad (12)$$

которое фактически совпадает с уравнением (4). Система же уравнений (9)–(11) примет вид

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \tilde{A}_r + \frac{1}{\mu_0 r^2} \tilde{A}_r + \sigma^n \left( \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z + \sigma^n \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = J_z, \quad (14)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} V) - \operatorname{div} \left( \sigma^n \frac{\partial (\tilde{A}_r, A_z)}{\partial t} \right) = \sigma^n \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (15)$$

В результате для получения поля «вертикальной» рамки необходимо решить две начально-краевые задачи: для уравнения (4) и для системы уравнений (13)–(15).

Трехмерная (аномальная) составляющая вектор-потенциала электромагнитного поля  $\vec{\bar{A}}^a$  (поле влияния изменения границ слоев и, возможно, влияния других 3D-неоднородностей) может быть получена путем решения уравнения

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rotrot} \vec{\bar{A}}^a + \sigma \frac{\partial \vec{\bar{A}}^a}{\partial t} = (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n, \quad (16)$$

где  $\sigma$  – функция трех координат, соответствующая значению проводимости в трехмерной среде,  $\sigma^n$  – по-прежнему проводимость вмещающей горизонтально-слоистой среды, в которой было рассчитано поле  $\vec{E}^n$ , значения которого берутся из решения двумерных задач вида (1) для генераторной катушки, ось которой ортогональна границам слоев, и уравнений (4), (13)–(15) для генераторной катушки, ось которой параллельна границам слоев. Начальное значение вектор-потенциала  $\vec{\bar{A}}^a$  (т. е. в момент выключения тока в источнике) берется равным нулю.

## 2. Результаты численного моделирования

На базе предложенной математической модели были разработаны и программно реализованы соответствующие конечноэлементные вычислительные схемы.

Верификация разработанных программ проводилась с использованием модели горизонтально-слоистой среды. Электромагнитное поле для такой модели, возбуждаемое генераторной катушкой, ось которой параллельна границам слоев, может быть рассчитано двумя способами. Первый способ – с использованием предложенной в данной работе постановки (4), (13)–(15), а второй способ – путем решения трехмерной задачи (16), для которой нормальное поле рассчитывалось в однородном пространстве. Соответствующая геоэлектрическая модель приведена на рис. 2.

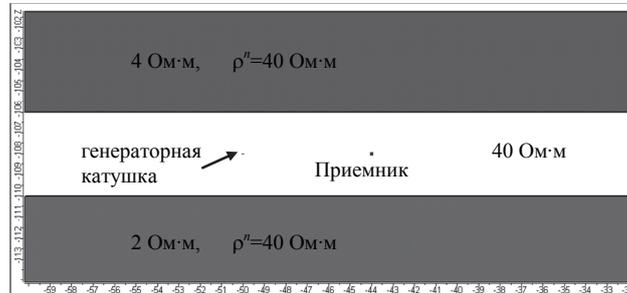


Рис. 2. Геоэлектрическая модель среды, используемая для верификации разработанных вычислительных схем

Графики значений ЭДС для  $x$ - и  $z$ -ориентаций приемной катушки, полученные обоими способами, а также их отклонения приведены на рис. 3. Из приведенных результатов видно, что в приемнике отклонения в максимальной компоненте (для этой ориентации генераторной катушки максимальной является ЭДС для  $x$ -ориентации приемной катушки) не превышают 1 %, а во второй (ненулевой) компоненте – 3 %, что подтверждает корректность предложенных в данной работе математических моделей и правильность их программной реализации.

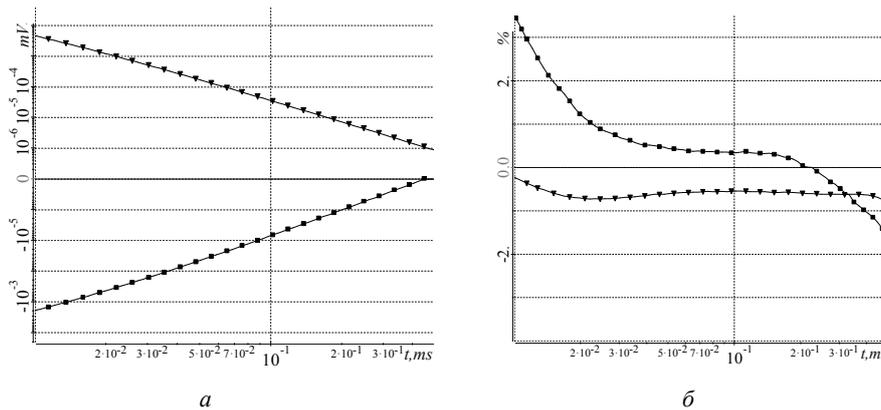


Рис. 3. Графики ЭДС для  $x$ -ориентации (треугольники) и  $z$ -ориентации (прямоугольники) приемной катушки (а), рассчитанные предложенным в данной работе методом, и их отклонения (б) от результатов расчетов, полученных путем решения трехмерной задачи с выделением поля однородного пространства

Конечноэлементные сетки при расчете нормального поля содержали порядка 3500–4000 узлов, а при расчете трехмерной составляющей поля – 15 000–20 000 узлов. При этом время, затраченное на расчет двумерного поля в диапазоне от 1 мкс до 1 мс, составило порядка 1,5 мин (без распараллеливания), а время, затраченное на решение трехмерной задачи, – около 2,5 мин на компьютере с частотой процессора 2,4 ГГц с распараллеливанием решения конечноэлементной СЛАУ на три ядра.

### Заключение

Разработаны конечноэлементные вычислительные схемы для расчета геоэлектромагнитных полей от произвольно ориентированных катушек. Предложенные в работе подходы позволяют рассчитывать нормальную составляющую трехмерного электромагнитного поля (т. е. поля во вмещающей горизонтально-слоистой среде) в двумерной (осесимметричной) постановке для ситуации, когда ось генераторной катушки перпендикулярна и параллельна слоям вмещающей среды. Это, в свою очередь, позволяет для произвольно ориентированной генераторной катушки обеспечить решение трехмерной задачи с погрешностью, не превышающей 1...3 %, при суммарных вычислительных затратах, не превышающих 2–3 мин, что как минимум на порядок ниже, чем затраты, требуемые на расчет трехмерного поля напрямую – без выделения поля или с выделением поля однородного пространства.

В работе приведены результаты верификации разработанной вычислительной схемы на примере решения задачи электрокаротажа по технологии зондирования становлением. При этом аналогичные подходы могут быть применены и для гармонического режима возбуждения поля, а также для соответствующих технологий наземной и морской электроразведки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пат. US2010109672(A1), США, МКИ G01V3/30. Transient EM for Geosteering and LWD/Wireline Formation Evaluation. Rabinovich M.B., Bepalov A.N., Forgang S.W., Georgi D.T., Itskovich G.B., Tabarovskiy L.A. Подано 03.11.2008. Опубликовано 06.05.2010. Приоритет от 03.11.2008.
- [2] Пат. WO2012030768(A2), США, МКИ G01V3/26. DTEM with Short Spacing for Deep, ahead of the Drill Bit Measurements. Itskovich G.B., Reiderman A., Rabinovich M.B., Martakov S., Iomdina E. Подано 30.08.2011. Опубликовано 08.03.2012. Приоритет от 03.09.2010.
- [3] Everett M.E., Badea E.A., Shen L.C., Merchant G.A., Weiss C.J. 3-D finite element analysis of induction logging in a dipping formation // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. – 2001. – no. 39 (10). – Pp. 2244–2252. – doi: 10.1109/36.957287.
- [4] Avdeev D.B., Kuvshinov A.V., Pankratov O.V., Newman G.A. Three-dimensional induction logging problems, part 1: An integral equation solution and model comparisons // *Geophysics*. – 2002. – no. 67 (2). – Pp. 413–426.
- [5] Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Моисеев В.С., Тригубович Г.М. Моделирование нестационарных электромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов // *Физика Земли*. – 1998. – № 10. – С. 78–84.
- [6] Badea E.A., Everett M.E., Newman G.A., Biro O. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials // *Geophysics*. – 2001. – Vol. 66. – no. 3. – Pp. 786–799.
- [7] Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 896 с.
- [8] Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Тригубович Г.М. Компьютерное моделирование геоэлектромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов // *Физика Земли*. – 2011. – № 2. – С. 3–14.
- [9] Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Абрамов М.В. Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2009. – № 4(40). – С. 106–119.
- [10] Могилатов В.С., Захаркин А.К., Злобинский А.В. Математическое обеспечение электроразведки ЗСБ. Система «Подбор». – Новосибирск: АИ «ГЕО», 2007. – 157 с.
- [11] Соловейчик Ю.Г., Персова М.Г., Тракимус Ю.В. Использование векторного МКЭ для расчета становления осесимметричного поля вертикальной электрической линии // *Доклады АН ВШС*. – 2004. – № 1(2). – С. 76–86.

**METHODS AND ALGORITHMS OF FINITE ELEMENT MODELING  
OF GEOMAGNETIC ELECTRIC FIELDS EXCITED  
BY ARBITRARILY ORIENTED COILS**

**Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Domnikov P.A.,  
Koshkina Yu.I.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

A method of finite-element modeling of an electromagnetic field excited by arbitrarily oriented coils for induction logging is presented in this paper. The method is based on the technique of field separation of a host horizontally layered medium to solve a 3D problem. In this case, the calculation of the normal field (i.e. the field in the host horizontally layered medium) excited by an arbitrarily oriented generator coil is performed by calculating various fields for two orientations of the coil, i.e. when the axis of the coil is perpendicular to the layers and when it is parallel to them.

A mathematical model that makes it possible to calculate the electromagnetic field in the host horizontally layered medium when the coil axis is parallel to the layers is presented and proved in the paper. This mathematical model consists of two axisymmetrical problems. Various methods for calculating the corresponding fields are considered and the difficulties arising when using them are analyzed. The verification of the computational schemes implemented on the basis of the proposed mathematical models by comparing them with the three-dimensional solution is presented. The resulting misfits of 1...3 % confirm the correctness of the mathematical models and their software implementation proposed in this paper. Similar approaches can be applied for

the harmonic field excitation mode as well as for the corresponding technologies of ground and marine electrical prospecting.

*Keywords:* software for electrical prospecting; electromagnetic logging; finite element method; 3D-modeling; arbitrarily oriented coil.

## REFERENCES

- [1] **Rabinovich M.B., Bepalov A.N., Forgang S.W., Georgi D.T., Itskovich G.B., Tabarovskiy L.A.** *Transient EM for Geosteering and LWD/Wireline Formation Evaluation*. Patent US, no. US2010109672(A1), 2010.
- [2] **Itskovich G.B., Reiderman A., Rabinovich M.B., Martakov S., Iomdina E.** *DTEM with Short Spacing for Deep, ahead of the Drill Bit Measurements*. Worldwide patent, no. WO2012030768(A2), 2012.
- [3] **Everett M.E., Badea E.A., Shen L.C., Merchant G.A., Weiss C.J.** 3-D finite element analysis of induction logging in a dipping formation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2001, no. 10, pp. 2244–2252. doi: 10.1109/36.957287.
- [4] **Avdeev D.B., Kuvshinov A.V., Pankratov O.V., Newman G.A.** Three-dimensional induction logging problems, part 1: An integral equation solution and model comparisons. *Geophysics*, 2002, no. 2, pp. 413–426.
- [5] **Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Moiseev V.S., Trigubovich G.M.** Modelirovanie nestacionarnykh jelektromagnitnykh polej v trehmernykh sredah metodom konechnykh jelementov [Three-dimensional modeling of nonstationary electromagnetic fields using the finite element method]. *Fizika Zemli*, 1998, no. 10, pp. 859–864.
- [6] **Badea E.A., Everett M.E., Newman G.A., Biro O.** Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials. *Geophysics*. 2001, no. 3, pp. 786–799.
- [7] **Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G.** *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for the solution of scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007, 896 p.
- [8] **Persova M.G., Soloveichik Y.G., Trigubovich G.M.** Komp'yuternoe modelirovanie geolektromagnitnykh polej v trehmernykh sredah metodom konechnykh jelementov [Computer modeling of geomagnetic electric fields in three-dimensional media by the finite element method]. *Fizika Zemli*, 2011, no. 2, pp. 79–89.
- [9] **Persova M.G., Soloveichik Y.G., Abramov M.V.** Konechnojelementnoe modelirovanie geolektromagnitnykh polej, vzbuzhdaemykh gorizontальной jelektricheskoy liniej [Finite Elements Modeling of Geomagnetic Electric Fields Excited by a Horizontal Charged Rod]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 2009, no. 4, pp.106–119.
- [10] **Mogilatov V.S., Zakharkin A.K., Zlobinskii A.V.** *Matematicheskoe obespechenie elektrozvedki ZSB* [Software for the Inversion of Near-Field TEM Data. Podbor System]. Novosibirsk, GEO Publ., 2007, 157 p.
- [11] **Soloveichik Y.G., Persova M.G., Trakimus Yu.V.** Ispol'zovanie vektornogo MKE dlja raschjota stanovenija osesimmetrichnogo polja vertikal'noj jelektricheskoy linii [The use of vector FEM for the calculation of a transient axisymmetric field of the vertical electrical line]. *Doklady AN VSh*, 2004, no. 1, pp. 76–86.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Персова Марина Геннадьевна** – родилась в 1978 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики и электромеханики. Опубликовано 100 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: persova@fpm.ami.nstu.ru)

**Persova Marina Gennad'evna** (b. 1978) – Doctor of Science (Eng.), Professor, Professor of Applied Mathematics Department of the Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on the finite element simulation of electromagnetic fields in problems geoelectric and electro-mechanics. She is author of 100 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073 Russia. Email: persova@fpm.ami.nstu.ru)



**Соловейчик Юрий Григорьевич** – родился в 1957 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент САН ВШ, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных и тепловых полей. Опубликовано 130 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: solov@fpm.ami.nstu.ru)

**Soloveichik Yuri Grigor'evich** (b. 1957) – Doctor of Science (Eng.), Professor, Corresponding Member of the Siberian Branch of the Russian Higher Education Academy of Sciences, Head of Applied Mathematics Department of the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the finite element simulation of electromagnetic and thermal fields. He is author of 130 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: solov@fpm.ami.nstu.ru)



**Вагин Денис Владимирович** – родился в 1985 году, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей. Опубликовано 39 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20)

**Vagin Denis Vladimirovich** (b. 1985) – PhD (Eng.), Assistant Professor of Applied Mathematics Department of the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the finite element simulation of electromagnetic fields. He is author of 39 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia)



**Домников Петр Александрович** – родился в 1984 году, канд. техн. наук, научный сотрудник кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: разработка методов решения СЛАУ, полученных в результате конечноэлементной аппроксимации в задачах электромагнетизма. Опубликовано 36 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20)

**Domnikov Petr Aleksandrovich** (b. 1984) – PhD (Eng.), Researcher of Applied Mathematics Department of the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the methods development for SLAE solving, obtained from finite element approximation in problems of electromagnetism. He is author of 36 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia)



**Кошкина Юлия Игоревна** – родилась в 1990 году, окончила Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), с 2013 года аспирант кафедры прикладной математики НГТУ. Область научных интересов: решение обратных задач геоэлектроразведки. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20)

**Koshkina Yulia Igorevna** (b. 1990) – graduated from the Novosibirsk State Technical University (NSTU), Post-graduate Student of Applied Mathematics Department of the NSTU. Area of research: inverse geoelectromagnetic exploration problems solving. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia)

Статья поступила 21 ноября 2013 г.

Received 21 Nov. 2013

To Reference:

Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Domnikov P.A., Koshkina Yu.I. Metody i algoritmy konechnoelementnogo modelirovaniya geoelektromagnitnykh polei ot proizvol'no orientirovannykh katushek [Methods and algorithms of finite element modeling of geomagnetic electric fields excited by arbitrarily oriented coils]. *Doklady Akademii Nauk Vyssei Shkoly Rossiiskoi Federatsii [Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences]*, 2014, no. 1(22), pp. 123–134. (in Russ.).