

УДК 531.19, 535.233, 536.3

**ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА  
И АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ТЕПЛОвого  
ИЗЛУЧЕНИЯ****Е.А. Краснопевцев**

Новосибирский государственный технический университет

Представлен новый сравнительно простой вывод флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ). Обобщенная координата системы изменяется переменным внешним воздействием и выражается при помощи причинной восприимчивости, ее фурье-образа – передаточной функции, обобщенных импеданса и активного сопротивления. Эти характеристики описывают тепловыделение на резисторе, результат обобщается на диссипативную систему, находящуюся под действием макроскопической силы. Флуктуационное напряжение на резисторе получается разложением теплового хаотического движения свободных зарядов вдоль проводника в ряд Фурье. Число стоячих волн и средняя энергия квантового колебательного состояния при фиксированной температуре дают тепловую мощность перемещения зарядов. Путем сравнения с законом Джоуля–Ленца и обобщения результата на произвольную изотермическую систему получаются средний квадрат флуктуирующей силы и дисперсия обобщенной координаты, вызванные тепловым движением. Через рассмотренные характеристики выражаются автокорреляционные функции обобщенной координаты, случайной силы и их спектральные плотности. Содержанием ФДТ является то, что мощность тепловыделения, спектральные плотности флуктуирующей силы и автокорреляции пропорциональны мнимой части передаточной функции системы. Результат применяется для теплового излучения в полости, стенки которой содержат электрические диполи, возбуждаемые тепловым движением. Получены передаточная функция, флуктуирующая сила, действующая на заряд, дисперсия напряженности электрического поля, временная автокорреляция напряженности и ее спектральная плотность. Для комплексной относительной автокорреляции напряженности получены ее вещественная и мнимая составляющие, модуль и фаза, найдено время когерентности.

*Ключевые слова:* флуктуационно-диссипационная теорема, автокорреляционная функция, тепловое излучение.

DOI: 10.17212/1727-2769-2021-1-7-18

**Введение**

Если действие слабой обобщенной силы вызывает у системы макропроцесс, выводящий ее из равновесия и приводящий к диссипации энергии, то согласно ФТД в равновесном изотермическом состоянии существует микропроцесс преобразования тепловой энергии во флуктуации макрохарактеристик. Активности обоих процессов пропорциональны мнимой части передаточной функции, т. е. фурье-образу восприимчивости системы к внешнему воздействию [1]. Теорема описывает тепловые флуктуации в классических и квантовых системах [2–5]. Согласованность между локальными флуктуациями, разделенными интервалом времени, описывается автокорреляционной функцией, определяющей степень интерференции полей. Применение теории к равновесному тепловому излучению, изложенное в [7, 8], рассмотрено в настоящей работе на основе, доступной студенту технического вуза.

### 1. Флуктуационно-диссипационная теорема

Восприимчивость системы  $g_c(t)$  показывает степень влияния причины – слабой обобщенной силы  $F(\tau)$  на следствие – обобщенную координату системы

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t-\tau) F(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Принцип причинности означает  $g_c(t) = g_c(t) H(t)$ , где  $H(t)$  – функция включения. Применяем к (1) фурье-преобразование

$$g_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_c(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \tilde{g}_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t) e^{i\omega t} dt \quad (2)$$

и аналогичные формулы для  $x(t)$  и  $F(\tau)$ , получаем

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{g}_c(\omega) \tilde{F}(\omega), \quad \dot{\tilde{x}}(\omega) = -i\omega \tilde{g}_c(\omega) \tilde{F}(\omega), \quad (3)$$

где  $\tilde{g}_c(\omega)$  – передаточная функция системы;  $\dot{x}(t) \equiv dx/dt$ . При  $|\omega| \rightarrow \infty$  система не успевает реагировать на возмущение и  $\tilde{g}_c(|\omega| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Из (2) и (3) находим

$$\begin{aligned} \tilde{g}_c(-\omega) &= \tilde{g}_c^*(\omega), \quad |\tilde{g}_c(-\omega)|^2 = |\tilde{g}_c(\omega)|^2, \\ \operatorname{Re} \tilde{g}_c(-\omega) &= \operatorname{Re} \tilde{g}_c(\omega), \quad \operatorname{Im} \tilde{g}_c(-\omega) = -\operatorname{Im} \tilde{g}_c(\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{g}_c(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = \frac{i \dot{\tilde{x}}(\omega)}{\omega \tilde{F}(\omega)}. \quad (5)$$

У передаточных функций

$$\tilde{g}_{c;1}(\omega) = \frac{S}{\omega + i\varepsilon}, \quad \tilde{g}_{c;2}(\omega) = \frac{S}{(\omega + i\varepsilon)(\omega + ib)}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon = +0$ ;  $b > 0$ ;  $S = \text{const}$ , отсутствуют особенности в верхней комплексной полуплоскости переменной  $\omega$ . По теории вычетов получаем соответствующие восприимчивости

$$g_{c;1}(t) = -iS H(t), \quad g_{c;2}(t) = -S \frac{1 - e^{-bt}}{b} H(t). \quad (7)$$

Следовательно, в интеграле с причинной функцией множитель  $\omega$  в знаменателе передаточной функции заменяется на  $\omega + i\varepsilon$ , где  $\varepsilon = +0$ , что соответствует сдвигу полюса функции  $\tilde{g}_c(\omega)$  в отрицательную сторону мнимой оси.

По аналогии с электрической цепью определяем для системы импеданс и активное сопротивление:

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\dot{\tilde{x}}(\omega)}, \quad R(\omega) = \operatorname{Re} Z(\omega). \quad (8)$$

Из (5) и (8) находим

$$\tilde{g}_c(\omega) = \frac{i}{\omega Z(\omega)}, \quad (9)$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{g}_c(\omega) &= \frac{\operatorname{Im} Z(\omega)}{\omega |Z(\omega)|^2}, \\ \operatorname{Im} \tilde{g}_c(\omega) &= \frac{\operatorname{Re} Z(\omega)}{\omega |Z(\omega)|^2} = \frac{R(\omega)}{\omega |Z(\omega)|^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$R(\omega) = \frac{\operatorname{Im} \tilde{g}_c(\omega)}{\omega |\tilde{g}_c(\omega)|^2}, \quad R(-\omega) = R(\omega),$$

$$\operatorname{Im} Z(\omega) = \frac{\operatorname{Re} \tilde{g}_c(\omega)}{\omega |\tilde{g}_c(\omega)|^2}. \quad (11)$$

Диссипация энергии в макроскопической системе, вызванная действием слабой обобщенной силы  $F(t)$ , описывается слагаемым гамильтониана  $H_I = -x F$ , где  $x$  – обобщенная координата, канонически сопряженная с  $F(t)$  и не зависящая явно от времени. Средняя по времени мощность выделения тепла

$$Q = \overline{\frac{dH_I}{dt}} = -x \overline{\frac{dF}{dt}} = \overline{\frac{dx}{dt}} F. \quad (12)$$

Универсальность связи, устанавливаемой ФДТ, позволяет при ее выводе рассмотреть процесс в конкретной системе и обобщить полученные результаты на другие случаи. Например, для электропроводности резистора  $Q = \overline{IU}$ . Сравнение с (12) дает соответствия:  $F(t) \Rightarrow U(t)$  – напряжение;  $dx/dt \Rightarrow dq/dt = I(t)$  – ток;  $x \Rightarrow q \equiv \frac{1}{l} \sum_i q_i x_i$  – эффективный заряд резистора протяженностью  $l$ , где  $x_i$  – расстояние от конца резистора до заряда  $q_i$ , находящегося в объеме резистора. С учетом  $U(t) = RI(t)$  для вещественного  $U_\omega(t)$  с периодом  $T = 2\pi/\omega$  из (12) находим

$$\begin{aligned} Q_\omega &= -q_\omega \overline{\frac{dU_\omega}{dt}} = -R(\omega) q_\omega \overline{\frac{dI_\omega}{dt}} = -\frac{R(\omega)}{T} \int_0^T q_\omega(t) \frac{dI_\omega(t)}{dt} dt = \\ &= \frac{R(\omega)}{T} \int_0^T I_\omega^2(t) dt = \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \overline{U_\omega^2(t)}, \end{aligned}$$

где выполнено интегрирование по частям и использовано  $I_\omega = U_\omega / Z(\omega)$ . Результат обобщаем на произвольную систему с диссипацией, тогда с учетом (10) мощность тепловыделения на частоте  $\omega$

$$Q_\omega = \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \overline{F_\omega^2} = \omega \operatorname{Im} \tilde{g}_c(\omega) \overline{F_\omega^2}. \quad (13)$$

Поскольку  $Q_\omega \geq 0$ , то  $\operatorname{Im} \tilde{g}_c(\omega) \geq 0$  при  $\omega > 0$ . Для резистора  $Z(\omega) = R$ , и из

(6), (7), (9) находим  $\tilde{g}_c(\omega) = \frac{i}{\omega R}$ ,  $g_c(t) = \frac{1}{R} H(t)$ . Следовательно, восприимчивость резистора равна кондактансу  $G = 1/R$ .

Получим флуктуационное напряжение на резисторе при температуре  $T$ , разлагая хаотические движения микрочастиц в ряд Фурье. Коллективные перемещения свободных зарядов вдоль проводника длиной  $l$  рассматриваем как стоячие волны смещений газа от равномерного распределения. Заряды не выходят за пределы проводника и на его концах возникают узлы смещений. В результате продольное смещение газа имеет дискретный спектр в виде стоячих волн  $n = 1, 2, 3, \dots$ , показанных на рис. 1. Колеблющийся градиент заряда создает переменный ток и флуктуирующую разность потенциалов на концах проводника. Для гармонической волны на длине  $l$  укладывается целое число полувольт  $n = \frac{l}{\lambda/2}$ , где  $\lambda$  – длина волны. С учетом кратности вырождения волн с двумя проекциями спина электронов и/или дырок, находим число волн с частотой  $\omega$

$$N_\omega = 2n = \frac{4l}{\lambda} = \frac{2l}{\pi V} \omega,$$

где  $\lambda = 2\pi V / \omega$ ;  $V$  – скорость волны. При  $l \gg \lambda$  число волн в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  равно  $dN_\omega = \frac{2l}{\pi V} d\omega$ . Волна с частотой  $\omega$  имеет при температуре  $T$  среднюю энергию  $\bar{E}(\omega, T)$ , тогда энергия волн

$$dE_\omega = \bar{E}(\omega, T) dN_\omega = \bar{E}(\omega, T) \frac{2l}{\pi V} d\omega.$$

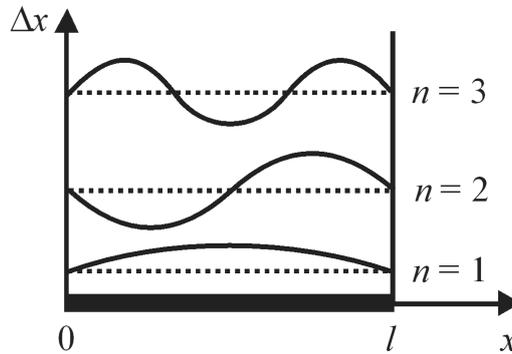


Рис. 1 – Смещения зарядов вдоль проводника

Fig. 1 – Displacements of charges along the conductor

Время распространения волны по проводнику  $\tau = l / V$ . Тепловая мощность перемещения зарядов  $dP_\omega = \frac{dE_\omega}{\tau} = \frac{2}{\pi} \bar{E}(\omega, T) d\omega$  связана с напряжением законом Джоуля–Ленца  $dP_\omega = \frac{1}{R(\omega)} \overline{U_\omega^2} d\omega$ , где  $R(\omega)$  – активное сопротивление проводника.

Для спектральной плотности среднего квадрата флуктуационного напряжения с  $\overline{U_\omega} = 0$  находим  $\overline{U_\omega^2} = \frac{2}{\pi} R(\omega) \bar{E}(\omega, T)$ . Результат обобщаем на произвольную изотермическую систему, заменяя  $U_\omega(t)$  на обобщенную силу  $f_\omega(t)$ . С учетом (11)

получаем ФДТ для спектральной плотности и среднего квадрата флуктуирующей силы

$$\overline{f_\omega^2} = \frac{2}{\pi} R(\omega) \overline{E}(\omega, T) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{Im } \tilde{g}_c(\omega)}{\omega |\tilde{g}_c(\omega)|^2} \overline{E}(\omega, T),$$

$$(\delta f)^2 = \overline{f^2} = \int_0^\infty \overline{f_\omega^2} d\omega. \quad (14)$$

Сравнение (13) и (14) показывает, что мощность диссипации энергии, происходящей под действием обобщенной силы  $F(t)$ , и спектральная плотность среднего квадрата случайной обобщенной силы  $f(t)$ , вызванной тепловым движением, пропорциональны мнимой части передаточной функции системы.

Энергия квантового колебательного состояния с частотой  $\omega$  складывается из тепловой энергии  $\overline{E}_1(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$  и энергии нулевых колебаний  $E_0(\omega) = \hbar\omega/2$ :

$$\overline{E}(\omega, T) = \overline{E}_1(\omega, T) + E_0(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2} \text{cth } \frac{\hbar\omega}{2kT}, \quad (15)$$

причем  $\overline{E}(-\omega, T) = \overline{E}(\omega, T)$ . Из (14) и (15) находим

$$\overline{f_\omega^2} = \frac{\hbar}{\pi} \omega R(\omega) \text{cth } \frac{\hbar\omega}{2kT} = \frac{\hbar}{\pi} \frac{\text{Im } \tilde{g}_c(\omega)}{|\tilde{g}_c(\omega)|^2} \text{cth } \frac{\hbar\omega}{2kT}, \quad \overline{f_{-\omega}^2} = \overline{f_\omega^2},$$

$$(\delta f)^2 = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty \omega R(\omega) \text{cth } \frac{\hbar\omega}{2kT} d\omega. \quad (16)$$

Вещественную монохроматическую силу  $f_\omega(t) = (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t})/2$  усредняем по времени:  $\overline{f_\omega} = 0$ ,  $\overline{f_\omega^2} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f_\omega^2(t) dt = \frac{1}{2} |f_0|^2$ . Из (1) и (2) находим реакцию системы на приложенную силу

$$x_\omega(t) = \frac{1}{2} \left( f_0 \int_{-\infty}^\infty g_c(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + f_0^* \int_{-\infty}^\infty g_c(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( f_0 \tilde{g}_c(\omega) e^{-i\omega t} + f_0^* \tilde{g}_c^*(\omega) e^{i\omega t} \right),$$

$$\overline{x_\omega} = 0, \quad \overline{x_\omega^2} = |\tilde{g}_c(\omega)|^2 \overline{f_\omega^2}. \quad (17)$$

Из (14) и (17) получаем дисперсию обобщенной координаты, вызванную тепловым движением,

$$\overline{x_\omega^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\text{Im } \tilde{g}_c(\omega)}{\omega} \overline{E}(\omega, T), \quad \overline{x_{-\omega}^2} = \overline{x_\omega^2},$$

$$\overline{x^2} = \int_0^\infty \overline{x_\omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \tilde{g}_c(\omega)}{\omega} \overline{E}(\omega, T) d\omega. \quad (18)$$

## 2. Автокорреляционная функция

Автокорреляция координаты характеризует взаимосвязь ее значений, разделенных промежутком времени  $\tau$ :

$$K_x(\tau) \equiv \overline{x(t)x(t+\tau)}. \quad (19)$$

Усреднение ведется по времени  $t$ , или по фазовому ансамблю. Состояние равновесное, поэтому усреднение не зависит от начала отсчета  $t$ , выполняется

$$\begin{aligned} K_x(0) &= \overline{x^2(t)}, \quad K_x(-\tau) = K_x(\tau), \\ K_x(0) &\geq |K_x(\tau > 0)|, \quad K_x(\tau \rightarrow \pm\infty) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (2) с учетом (20) и (18) получаем

$$K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_x(\omega) d\omega = \overline{x^2} = \int_0^{\infty} \overline{x_{\omega}^2} d\omega.$$

Сравнение подынтегральных выражений дает спектральную плотность автокорреляции координаты

$$\begin{aligned} \tilde{K}_x(\omega) &= \pi \overline{x_{\omega}^2} = \pi |\tilde{g}_c(\omega)|^2 \overline{f_{\omega}^2} = 2 \frac{\text{Im} \tilde{g}_c(\omega)}{\omega} \bar{E}(\omega, T), \\ \tilde{K}_x(-\omega) &= \tilde{K}_x(\omega), \quad [\tilde{K}_x(\omega)]^* = \tilde{K}_x(\omega), \end{aligned} \quad (21)$$

где использовано (17) и (18).

Для случайной силы, вызванной тепловым движением, автокорреляция  $K_f(\tau) \equiv \overline{f(t)f(t+\tau)}$  удовлетворяет

$$K_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_f(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad \tilde{K}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau,$$

$$K_f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_f(\omega) d\omega = \overline{f^2} = \int_0^{\infty} \overline{f_{\omega}^2} d\omega.$$

Из (16) и (21) получаем спектральную плотность автокорреляции силы

$$\tilde{K}_f(\omega) = \pi \overline{f_{\omega}^2} = \frac{\tilde{K}_x(\omega)}{|\tilde{g}_c(\omega)|^2} = \hbar \frac{\text{Im} \tilde{g}_c(\omega)}{|\tilde{g}_c(\omega)|^2} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}, \quad (22)$$

где

$$\tilde{K}_f(-\omega) = \tilde{K}_f(\omega), \quad [\tilde{K}_f(\omega)]^* = \tilde{K}_f(\omega).$$

Интервал автокорреляции  $\tau_c$  характеризует длительность согласованности процесса, причем  $K_f(\tau \ll \tau_c) \approx K_f(0)$ ,  $K_f(\tau \gg \tau_c) \approx 0$ . Следуя [6], определяем

$$\tau_c \equiv \frac{\int_0^{\infty} |K_f(\tau)|^2 d\tau}{[K_f(0)]^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} |\tilde{K}_f(\omega)|^2 d\omega}{\left( \int_0^{\infty} \tilde{K}_f(\omega) d\omega \right)^2}, \quad (23)$$

где использовано

$$\int_0^{\infty} |K_f(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{K}_f(\omega)|^2 d\omega, \quad K_f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{K}_f(\omega) d\omega.$$

### 3. Тепловое излучение

Перемещения заряженных микрочастиц стенок полости с температурой  $T$  и характерным размером  $L$  создают равновесное тепловое излучение. Ограничимся дипольным излучением в дальней зоне с длинами волн  $\lambda \ll L$ . Заряд  $q$  массой  $m$ , колеблющийся вдоль оси  $x$  относительно второго заряда с обратным знаком, образует диполь. На заряд действуют вдоль оси  $x$ : внешняя сила  $F(t)$ ; упругая возвращающая сила  $F_1(t) = -m\omega_0^2 x(t)$ , где  $x(t)$  – смещение заряда от положения

равновесия; сила торможения излучением  $F_2(t) = q^2 \xi \frac{d^3 x(t)}{dt^3}$ , где в СИ

$\xi = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 C^3}$ , в СГС  $\xi = \frac{2}{3C^3}$ ,  $C$  – скорость света. Закон Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x + q^2 \xi \frac{d^3 x}{dt^3} + F(t)$$

после фурье-преобразования получает вид

$$(-m\omega^2 + m\omega_0^2 - iq^2 \xi \omega^3) \tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega).$$

Из (5) находим передаточную функцию

$$\begin{aligned} \tilde{g}_c(\omega) &= \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + m\omega_0^2 - iq^2 \xi \omega^3} = \\ &= \frac{-m\omega^2 + m\omega_0^2 + iq^2 \xi \omega^3}{(m\omega^2 - m\omega_0^2)^2 + (q^2 \xi)^2 \omega^6}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (16) и (24) получаем флуктуирующую силу, действующую на заряд  $q$  в вакууме,

$$\begin{aligned} \overline{f_\omega^2} &= \frac{\hbar q^2 \xi}{\pi} \omega^3 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT} = \frac{\hbar q^2 \xi}{\pi} \left( \omega^3 + \frac{2\omega^3}{e^{\hbar \omega/kT} - 1} \right), \\ \overline{f^2} &= \frac{\hbar q^2 \xi}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^3 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT} d\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Результат не зависит от упругой связи заряда  $\omega_0$ , поэтому применим для электрона в металле и в оболочке атома. Действующая на заряд сила создается электрическим полем излучения  $E_x$  со средним значением  $\overline{E_x} = 0$ . Из  $f = qE_x$  и (25) для дисперсии проекции напряженности получаем

$$\overline{E_x^2} = \frac{2\xi}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/kT} - 1} \right) \omega^2 d\omega.$$

С учетом равноправия декартовых направлений находим суммарную напряженность  $\overline{E^2} = 3 \overline{E_x^2}$  и среднюю плотность энергии излучения

$$\bar{w} = \zeta \overline{E^2} = \int_0^{\infty} \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right) \frac{\omega^2}{\pi^2 C^3} d\omega,$$

где в СИ  $\zeta = \epsilon_0$ , в СГС  $\zeta = \frac{1}{4\pi}$ . Первое слагаемое содержит «ультрафиолетовую

расходимость», вызванную нулевыми колебаниями. Они создаются любыми телами вне зависимости от их температуры, образуют стоячие волны, не вносят вклада в средний поток излучения, дают вклад в плотность энергии излучения, вызывают спонтанные переходы и естественную ширину спектральных линий атома, проявляются в эффекте Казимира, в лэмбовском сдвиге. Второе слагаемое является формулой Планка. Используя плотность состояний в единице объема

полости  $g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 C^3}$  и энергию фотона  $\hbar\omega$ , в соответствии с

$\bar{w} = \int_0^{\infty} \hbar\omega \overline{n(\omega)} g(\omega) d\omega$  получаем распределение Бозе–Эйнштейна для среднего

числа тепловых фотонов в одном состоянии  $\overline{n(\omega)} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ .

Из (22) и (25) находим спектральную плотность автокорреляции декартовой составляющей напряженности электрического поля

$$\tilde{K}_E(\omega) = \frac{1}{q^2} \tilde{K}_f(\omega) = \hbar\xi \left( \omega^3 + \frac{2\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right).$$

Для тепловой части

$$\tilde{K}_E^T(\omega) = 2\hbar\xi \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (26)$$

получаем

$$\int_0^{\infty} \tilde{K}_E^T(\omega) d\omega = \frac{2}{15} \frac{\xi(\pi kT)^4}{\hbar^3}, \quad \int_0^{\infty} [\tilde{K}_E^T(\omega)]^2 d\omega \cong 25.92 \frac{\xi^2 (kT)^7}{\hbar^5}.$$

Использовано [10]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{e^{bx} - 1} = \frac{\Gamma(m)}{b^m} \zeta(m),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(e^{bx} - 1)^2} = \frac{\Gamma(m)}{b^m} [\zeta(m-1, 2) - \zeta(m, 2)],$$

где

$$\zeta(6, 2) - \zeta(7, 2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^7} = \zeta(6) - \zeta(7) \cong 0.0090;$$

$\zeta(m, a) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^m}$ ,  $\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$  – дзета-функция Римана. Из (23) находим время когерентности

$$\tau_c = \frac{5! \cdot 6.075}{\pi^6} \frac{\hbar}{\pi k T} \cong 0.758 \frac{\hbar}{\pi k T} = \frac{1.84 \cdot 10^{-12}}{T(\text{K})} \text{ с.} \quad (27)$$

В работе [9] численным расчетом получено  $\tau_c \cong 1.57 \hbar / k T$ .

Временная автокорреляция напряженности электрического поля

$$K_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{K}_E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

вызванная тепловой спектральной плотностью (26)

$$K_E^T(t) \equiv \overline{E(t')E(t'+t)} = \frac{2\hbar\xi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 e^{-i\omega t} d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (28)$$

определяет комплексную меру интерференции полей, разделенных интервалом  $t$ . Используя [10], находим

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 e^{-i\omega t} d\omega}{e^{\pi\tau\omega} - 1} = \frac{6}{(\pi\tau)^4} \zeta\left(4, 1 + i \frac{t}{\pi\tau}\right),$$

где

$$\tau \equiv \frac{\hbar}{\pi k T}; \quad \zeta(4, c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^4}; \quad \zeta(4, 1) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Для относительной автокорреляции

$$\gamma_E^T(t) \equiv \frac{K_E^T(t)}{K_E^T(0)} = \frac{\zeta[4, 1 + it / (\pi\tau)]}{\zeta(4, 1)} = \frac{90}{\pi^4} \zeta\left(4, 1 + i \frac{t}{\pi\tau}\right) \quad (29)$$

из (28) и (29) получаем

$$\text{Re } \gamma_E^T(t) = 15 \int_0^{\infty} \frac{x^3 \cos(zx)}{e^{\pi x} - 1} dx, \quad \text{Im } \gamma_E^T(t) = -15 \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin(zx)}{e^{\pi x} - 1} dx,$$

где  $z = t / \tau$ ;  $x = \tau \omega$ . Составляющие связаны преобразованием Гильберта

$$\text{Im } \gamma_E^T(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } \gamma_E^T(t')}{t' - t} dt' = \text{Re } \gamma_E^T(t) * \frac{1}{\pi t},$$

$$\text{Im } \tilde{\gamma}_E^T(\omega) = i \text{sgn } \omega \text{Re } \tilde{\gamma}_E^T(\omega).$$

Из [10] находим

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \cos(zx)}{e^{\pi x} - 1} dx = -\frac{1}{2} \frac{d^3 L(z)}{dz^3} = -\frac{3}{z^4} + \frac{2}{\text{sh}^2 z} + \frac{3}{\text{sh}^4 z},$$

где функция Ланжевена  $L(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(zx)}{e^{\pi x} - 1} dx = \text{cth } z - \frac{1}{z}$ , и получаем

$$\text{Re } \gamma_E^T(z) = 15 \left( -\frac{3}{z^4} + \frac{2}{\text{sh}^2 z} + \frac{3}{\text{sh}^4 z} \right). \quad (30)$$

Видность интерференционных полос

$$|\gamma_E^T(z)| = \left\{ \left[ \text{Im } \gamma_E^T(z) \right]^2 + \left[ \text{Re } \gamma_E^T(z) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

уменьшается в  $e$  раз  $|\gamma_E^T(z_4 \approx 2.5)| = 1/e$  за время  $t_4 \approx 0.796\hbar / (kT)$ , что близко к (27). Функции  $\text{Re } \gamma_E^T(z)$ ,  $\text{Im } \gamma_E^T(z)$ ,  $|\gamma_E^T(z)|$ ,  $\varphi_E^T(z) \equiv \arctg \left[ \text{Im } \gamma_E^T(z) / \text{Re } \gamma_E^T(z) \right]$ , показаны на рис. 2. При  $z > z_5$  колебания происходят в противофазе, корреляция отрицательная. Плотность энергии излучения пропорциональна (26) и по закону Вина максимальна при  $\omega_m = 0.898 \frac{\pi kT}{\hbar} = \frac{3.18}{t_5}$ . Величина  $t_5$  порядка полупериода излучения  $T_m / 2 \approx t_5$  с наибольшей плотностью энергии. Колебания, разделенные интервалом  $0 \leq t < t_5$ , происходят с близкими фазами, их корреляция положительная, амплитуда увеличивается в результате интерференции, фотоны группируются.

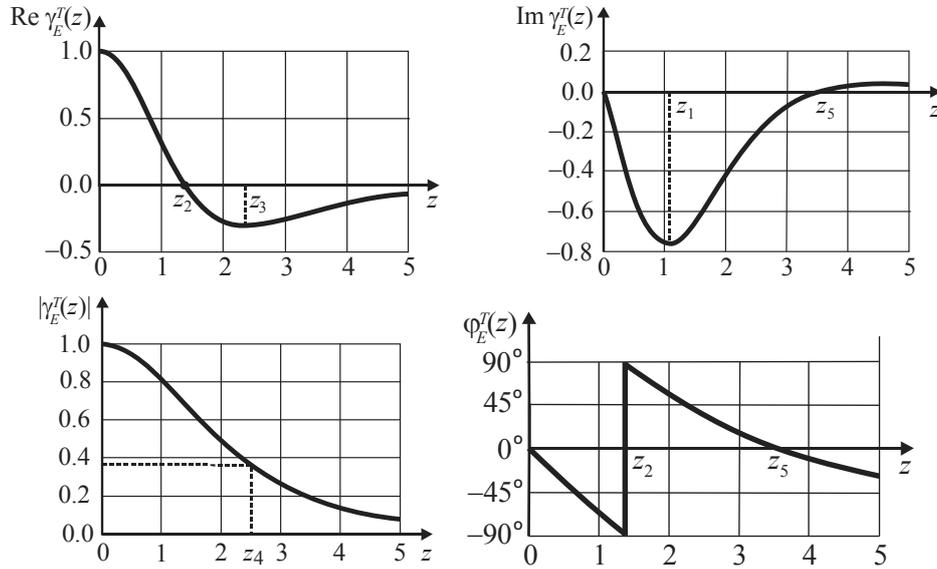


Рис. 2 – Автокорреляция электрического поля  $E_x$  теплового излучения:

$$z = \pi kTt / \hbar, \quad z_1 \cong 1.043, \quad z_2 \cong 1.372, \quad z_3 \cong 2.361, \quad z_4 \approx 2.5, \quad z_5 \cong 3.547$$

Fig. 2 – Autocorrelation of the  $E_x$  electric field of thermal radiation:

$$z = \pi kTt / \hbar, \quad z_1 \cong 1.043, \quad z_2 \cong 1.372, \quad z_3 \cong 2.361, \quad z_4 \approx 2.5, \quad z_5 \cong 3.547$$

### Заключение

Приведен вывод ФДТ, который может использоваться в вузовских курсах статистической физики. Для зарядов, создающих дипольное излучение, получена передаточная функция, тепловая флуктуирующая сила, действующая на заряд, напряженность электрического поля теплового излучения и временная автокорреляционная функция.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Callen Н.В., Welton Т.А.** Irreversibility and generalized noise // *Physical Review*. – 1951. – Vol. 83, N 1. – P. 34–40.
2. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Статистическая физика. Ч. 1. – Изд. 5-е, стер. – М.: Физматлит, 2010. – 616 с. – (Теоретическая физика; т. 5).
3. **Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. – М.: Физматлит, 2015. – 440 с. – (Теоретическая физика; т. 9).
4. **Левин М.Л., Рытов С.М.** Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. – М.: Наука, 1967. – 309 с.
5. **Рытов С.М.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
6. **Мандель Л., Вольф Э.** Оптическая когерентность и квантовая оптика. – М.: Наука: Физматлит, 2000. – 896 с.
7. **Bourret R.C.** Coherence properties of black body radiation // *Nuovo Cimento*. – 1960. – Vol. 18, N 2. – P. 347–356.
8. **Kano Y., Wolf E.** Temporal coherence of black body radiation // *Proceedings of the Physical Society*. – 1962. – Vol. 80, N 518. – pp. 1273–1276.
9. **Donge A.** The coherence length of black body radiation // *European Journal of Physics*. – 1998. – Vol. 19. – P. 245–249.
10. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 632 с.

### THE FLUCTUATION- DISSIPATION THEOREM AND THE AUTOCORRELATION FUNCTION OF THERMAL RADIATION

**Krasnopevtsev E.A.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

A new relatively simple derivation of the fluctuation-dissipation theorem (FDT) is presented. The generalized coordinate of the system is changed by an external force and is expressed by means of causal susceptibility, its Fourier transform – the transfer function, generalized impedance and active resistance. These characteristics describe heat dissipation on the resistor and the result is generalized to the dissipative system which is under the action of macroscopic force. The fluctuation voltage on the resistor is obtained by decomposing the thermal chaotic motion of free charges along the conductor into a Fourier series. The number of standing waves and the average energy of the quantum oscillation state at a fixed temperature give the thermal power of charge transfer. By comparing with the Joule-Lenz law and by generalizing the result to an arbitrary isothermal system, the mean square of the fluctuating force and dispersion of the generalized coordinate caused by the thermal motion are obtained. The autocorrelation functions of the generalized coordinate and the random force, and their spectral densities are expressed through the considered characteristics. The content of FDT is that the power of heat release, the spectral densities of the fluctuating force and the autocorrelation are proportional to the imaginary part of the transfer function of the system. The result is used for thermal radiation in a cavity the walls of which contain electric dipoles excited by thermal motion. The transfer function, the fluctuating force acting on the charge, the dispersion of the electric field strength, time autocorrelation of the electric field strength and its spectral density are obtained. Real and imaginary compo-

nents, the modulus and phase are found for complex relative autocorrelation of the electric field strength and the coherence time is determined.

*Keywords:* fluctuation-dissipation theorem, autocorrelation function, thermal radiation.

DOI: 10.17212/1727-2769-2021-1-7-18

#### REFERENCES

1. Callen H.B., Welton T.A. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, 1951, vol. 83, no. 1, pp. 34–40.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Statisticheskaya fizika*. Ch. 1 [Statistical physics. Pt. 1]. 5th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 616 p.
3. Lifshits E.M., Pitaevskii L.P. *Statisticheskaya fizika*. Ch. 2. *Teoriya kondensirovannogo sostoyaniya* [Statistical physics. Pt. 2. Theory of condensed state]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015. 440 p.
4. Levin M.L., Rytov S.M. *Teoriya ravnovesnykh teplovykh fluktuatsii v elektrodinamike* [Theory of equilibrium thermal fluctuations in electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 309 p.
5. Rytov S.M. *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku*. Ch. 1. *Sluchainye protsessy* [Introduction to Statistical Radiophysics. Pt. 1. Random processes]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1976. 494 p.
6. Mandel L., Wolf E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995. 1190 p. (Russ. ed.: Mandel' L., Vol'f E. *Opticheskaya kogerentnost' i kvantovaya optika*. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 2000. 896 p.).
7. Bourret R.C. Coherence properties of black body radiation. *Nuovo Cimento*, 1960, vol. 18, no. 2, pp. 347–356.
8. Kano Y., Wolf E. Temporal coherence of black body radiation. *Proceedings of the Physical Society*, 1962, vol. 80, no. 518, pp. 1273–1276.
9. Donge A. The coherence length of black body radiation. *European Journal of Physics*, 1998, vol. 19, pp. 245–249.
10. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady*. T. 1. *Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 632 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Краснопецев Евгений Александрович** – д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры полупроводниковых приборов и микроэлектроники Новосибирского государственного технического университета. Основное научное направление исследований – квантовая статистическая физика. Имеет более 80 публикаций, в том числе 10 учебных пособий. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: krasnopevtsev@corp.nstu.ru).

**Krasnopevtsev Evgeniy Aleksandrovich** – Doctor of Sciences (Eng.), Senior lecturer, Professor of the Department of Semiconductor Devices and Microelectronics at the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on quantum statistical physics. He is author of more than 80 publications, including 10 teaching textbooks. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: krasnopevtsev@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 12 января 2021 г.*

*Received January 12, 2021*

To reference:

Krasnopevtsev E.A. Fluktuatsionno-dissipatsionnaya teorema i avtokorrelyatsionnaya funktsiya teplovogo izlucheniya [The fluctuation-dissipation theorem and the autocorrelation function of thermal radiation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii = Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2021, no. 1 (50), pp. 7–18. DOI: 10.17212/1727-2769-2021-1-7-18.