ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2014 апрель–сентябрь № 2–3 (23–24)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 510.8

О МУЛЬТИОРГРАФАХ С ИДЕНТИЧНЫМИ АВТОМОРФИЗМАМИ И ОБЛАСТЯМИ ДОСТИЖИМОСТИ

А.Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Работа посвящена вопросам взаимосвязи графов с идентичными производными объектами: автоморфизмами, эндоморфизмами, областями достижимости. Но основе результатов автора в теории моделей и универсальной алгебре, в том числе доказанного им аналога (для позитивных формул) теоремы Скотта о категоричности теорий счетных моделей в языке логики со счетными конъюнкциями и дизъюнкциями, на языке логики с бесконечно длинными формулами и языке узкого исчисления предикатов, дается описание пар мультиорграфов с раскрашенными дугами и общим множеством вершин, имеющих одни и те же автоморфизмы и области достижимости (одни и те же эндоморфизмы на себя и области достижимости).

Ключевые слова: мультиорграфы с раскрашенными дугами, автоморфизмы, области достижимости.

Введение

Изучение автоморфизмов математических объектов – одно из основных эффективных средств изучения строения этих объектов и их классификаций. В частности это относится к графам и их обобщениям в виде мультиорграфов. К примеру можно указать на большую серию работ по автоморфизмам графов школы А.А. Махнева. В связи с этим представляется вполне естественным вопрос о взаимосвязи графов (мультиорграфов) с общим множеством вершин, имеющих идентичные совокупности автоморфизмов. Подобные вопросы для универсальных алгебр рассматривались автором в работах $[1]-[2]$. В настоящей работе описаны взаимосвязи мультиорграфов с общей совокупностью вершин, имеющих одни и те же автоморфизмы, а также, в некотором более частном случае, одни и те же автоморфизмы и области достижимости.

Прежде всего напомним и уточним соответствующую терминологию. Под мультиорграфом традиционно будем иметь в виду тройку множеств $<V,E,S>$, где непустое множество V (вершин графа) и множество E (его дуг) дизъюнктны, а S – некоторое подмножество множества $V^2 \times E$ со свойством: для любого $e \in E$ существуют единственные $a, b \in V$ такие, что $<a, b, e> \in S$ (дуга e исходит из вершины a в вершину b). Мультиорграф $<V, E, S>$ имеет раскраску дуг без кратных равно раскрашенных дуг, если для некоторого множества C (цвета дуг графа) существует отображение g (функция раскраски) из E в C и при этом для любых $a, b \in V$, если $<a, b, e_1>$, $<a, b, e_2> \in S$, то $g(e_1) \neq g(e_2)$.

Стандартным образом по любому мультиорграфу с раскрашенными дугами без кратных равно раскрашенных дуг $G =< V, E, S, C, g >$ (далее просто граф G) строится модель $\mathfrak{M}(G) = < V; P_c^2 (c \in C) >$ сигнатуры состоящей из двухместных предикатов $P_c^2 (c \in C)$ таких, что для $a,b \in V$ $\mathfrak{M}(G) \models P_c(a,b)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $e \in E$ $<a,b,e> \in S$ и $g(e)=c$. Очевидно, что модель $\mathfrak{M}(G)$ однозначно определяет граф G: для рассматриваемых мультиорграфов $G_1 =< V_1, E_1, S_1, C_1, g_1 >$ и $G_2 =< V_2, E_2, S_2, C_2, g_2 >$ равенство $G_1 = G_2$ равносильно равенству $\mathfrak{M}(G_1) = \mathfrak{M}(G_2)$.

Биекция φ множества вершин V графа $< V, E, S, C, g >$ на себя называется автоморфизмом графа, если для любых $a, b \in V$, $e \in E$ таких, что $<a,b,e> \in S$ найдется $e^{\varphi} \in E$ такое, что $< \varphi(a), \varphi(b), e^{\varphi} > \in S$ и $g(e) = g(e^{\varphi})$. Через $Aut\mathfrak{M}$ ($AutG$) обозначим группу автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ (графа G). Из определения модели $\mathfrak{M}(G)$ для графа G очевидным образом следует равенство $Aut\mathfrak{M}(G) = AutG$.

1. Автоморфизмы моделей и обогащений

Напомним, что логическим языком $L_{\omega_1\omega}$ называется расширение стандартного языка $L_{\omega\omega}$ логики первого порядка за счет возможности образования конъюнкций и дизъюнкций не более чем счетных совокупностей формул, имеющих некоторую конечную (одну и ту же для этих формул) совокупность свободных переменных. Очевидная категоричность $L_{\omega\omega}$-теорий конечных моделей конечной сигнатуры перенесена в работе Д. Скотта [3] на язык $L_{\omega_1\omega}$ и на не более чем счетные модели не более чем счетной сигнатуры.

Теорема Скотта. Для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M} =< A; \sigma >$ не более чем счетной сигнатуры σ существует $L_{\omega_1\omega}$-формула $\Phi_{\mathfrak{M}}$ (формула Скотта) такая, что для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M}' =< B; \sigma >$ $\mathfrak{M}' \models \Phi_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}'$ изоморфна $\mathfrak{M}$.

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 1. Для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M} = < A; \sigma >$ не более чем счетной сигнатуры σ, для любого предиката P на множестве A группы автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ и ее обогащения $\mathfrak{M}' =< A; \sigma, P >$ предикатом P совпадают тогда и только тогда, когда P определим некоторой $L_{\omega_1\omega}$-формулой в модели $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть P – n-местный предикат на A устойчивый относительно автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ и $a_1, ..., a_n \in A$ таковы, что $< a_1, ..., a_n > \in P$. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n} =< A; \sigma, c_1, ..., c_n >$ модели $\mathfrak{M}$ введением в сигнатуру новых констант c_i ($i \le n$) при интерпретации их элементами a_i. Пусть $\Phi_{\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n}}$ – формула Скотта для модели $\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n}$ и $\Phi'_{a_1,...,a_n}(x_1, ..., x_n)$ $L_{\omega_1\omega}$ – формула сигнатуры σ, получаемая из $\Phi_{\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n}}$ заменой констант c_i на переменные x_i, не входящие в формулу $\Phi_{\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n}}$. В силу теоремы Скотта, если для некоторых $b_1, ..., b_n \in A$ $\mathfrak{M} \models \Phi'_{a_1,...,a_n}(b_1, ..., b_n)$, то модели $\mathfrak{M}'_{a_1,...,a_n}$ и $\mathfrak{M}'_{b_1,...,b_n}$ будут изоморфны, т. е. найдется автоморфизм φ модели $\mathfrak{M}$ такой, что $\varphi(\alpha_i) = b_i$

(для $i \le n$) и, в силу устойчивости предиката P относительно автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$, получаем, что $\mathfrak{M}' \models \forall x_1,\ldots,x_n (\Phi'_{a_1,\ldots,a_n}(x_1,\ldots,x_n) \to P(x_1,\ldots,x_n))$.

Но тогда $L_{\omega_1\omega}$-формула $\bigvee\limits_{<a_1,\ldots,a_n>\in P} \Phi'_{a_1,\ldots,a_n}(x_1,\ldots,x_n)$ определяет предикат P в модели $\mathfrak{M}$ и утверждение следствия доказано.

В силу отмеченного выше существования для любой конечной модели $\mathfrak{M} =< A;\sigma >$ конечной сигнатуры σ $L_{\omega\omega}$-формулы, определяющей $\mathfrak{M}$ с точностью до изоморфизма, имеет место $L_{\omega\omega}$-аналог этого следствия для конечных моделей конечной сигнатуры.

Из этого следствия и его конечного аналога, в силу отмеченного выше равенства $AutG = Aut\mathfrak{M}(G)$ для мультиорграфов с раскрашенными дугами, не имеющими кратных дуг с равной раскраской, и вытекает описание подобных графов с идентичными автоморфизмами.

Мультиорграф $< V, E, S, C, g >$ назовем не более чем счетным (конечным), если не более чем счетно (конечно) множество $V \bigcup$.

Теорема 1. Не более чем счетные (конечные) мультиорграфы с раскрашенными дугами, не имеющие кратных дуг с равной раскраской $G_0 =< V;\, E_0,\, S_0,\, C_0,\, g >$ и $G_1 =< V;\, E_1,\, S_1,\, C_1,\, g >$ с общим множеством вершин имеют одни и те же автоморфизмы тогда и только тогда, когда предикаты P_c^2 ($c \in C_i$) раскраски дуг каждого из этих графов G_i ($i = 0,1$) определяются некоторыми $L_{\omega_1\omega}$-формулами ($L_{\omega\omega}$-формулами) модели $\mathfrak{M}(G_{1-i})$ другого графа G_{1-i}.

Напомним, что вершина b мультиорграфа $G =< V,\, E,\, S >$ называется достижимой из вершины a, если для некоторого натурального n существуют $a_0 = a,\, a_1,\, \ldots,\, a_n = b$ из V и $e_1,\, \ldots,\, e_{n-1} \in E$ такие, что $< a_i,\, a_{i+1},\, e_i > \in S$ для $i < n$.

Областями достижимости мультиорграфа G будем называть совокупность подмножеств его вершин вида $D_a = \{b \in V \mid b$ достижима из $a\}$ для $a \in V$.

Наконец, для некоторого подкласса класса мультиорграфов с раскрашенными дугами, не имеющих кратных дуг с равной раскраской, приведем более строгое описание графов из этого класса с идентичными автоморфизмами и областями достижимости.

Мультиорграф $G =< V, E, S, C, g >$ без петель с раскрашенными дугами, не имеющий кратных дуг с равной раскраской, назовем мультиорграфом с функционально раскрашенными дугами, если для любой $a \in V$ и любых $b_1, b_2 \in V$, $e_1, e_2 \in E$ из того, что $< a, b_i, e_i > \in S$ и $g(e_1) = g(e_2)$ следует равенство $e_1 = e_2$, а значит, и равенство $b_1 = b_2$. В этой ситуации для алгебро-логического описания графа G вместо модели $\mathfrak{M}(G)$ удобнее рассматривать унарную универсальную алгебру $\mathfrak{A}(G) =< V; f_c \mid c \in C >$ сигнатуры, состоящей из унарных функций f_c, определенных на V следующим естественным образом: для $a \in V$ и $c \in C$ $f_c(a) = b$, если существует $e \in E$ такая, что $< a, b, e > \in S$ и $g(e) = c$ и $f_c(a) = a$ в противном случае.

Очевидно, что алгебры $\mathfrak{A}(G)$ однозначно описывают мультиорграфы G без петель с функционально раскрашенными дугами и для таких графов G $AutG = Aut\mathfrak{A}(G)$. Очевидно также, что подалгебры этих алгебр суть произвольные объединения областей достижимости графов.

Таким образом, для мультиорграфов G_0 и G_1 без петель с функционально расскрашенными дугами и общим множеством вершин совпадение их автоморфизмов и областей достижимости равносильно равенствам $Aut\mathfrak{A}(G_0) = Aut\mathfrak{A}(G_1)$ и $Sub\mathfrak{A}(G_0) = Sub\mathfrak{A}(G_1)$.

Подобная ситуация для универсальных алгебр описана в работе автора [1]. Предварительно напомним некоторые определения: функция $f(x_1,...,x_n)$ на основном множестве универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ задается явной $L_{\omega_1\omega}$-схемой (является элементарно условно термальной, подробнее см., к примеру, [4]), если для некоторой $L_{\omega_1\omega}$-формулы сигнатуры σ ($L_{\omega\omega}$-формулы сигнатуры σ) вида

$$(*)\quad \psi(x_1,...,x_n,y) = \bigvee_{i\in I}\left(\Phi_i(x_1,...,x_n) \to y = t_i(x_1,...,x_n)\right),$$

где I не более чем счетное (конечное) множество, $L_{\omega_1\omega}$-формулы ($L_{\omega\omega}$-формулы) Φ_i попарно дизъюнктны; $\mathfrak{M} \models \forall x_1,...,x_n(\bigvee_{i\in I}\Phi_i(x_1,...,x_n))$ а t_i – некоторые термы сигнатуры σ, для любых $a_1,...,a_n,b \in A$ имеет место

$$\mathfrak{M} \models \psi(a_1,...,a_n,b) \Leftrightarrow f(a_1,...,a_n) = b.$$

В работе [1] доказана

Теорема А. Для не более чем счетных (конечных) универсальных алгебр $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ не более чем счетных (конечных) сигнатур с общим основным множеством равенства $Aut\mathfrak{A}_0 = Aut\mathfrak{A}_1$ и $Sub\mathfrak{A}_0 = Sub\mathfrak{A}_1$ имеют место тогда и только тогда, когда сигнатурные функции каждой из этих алгебр $\mathfrak{A}_i$ ($i = 0,1$) определены некоторой явной схемой (являются элементарно условно термальными) для другой $\mathfrak{A}_{1-i}$ ($i = 0,1$).

Тем самым имеет место

Теорема 2. Не более чем счетные (конечные) мультиорграфы G_0 и G_1 без петель с функционально раскрашенными дугами и общим множеством вершин имеют одни и те же автоморфизмы и области допустимости тогда и только тогда, когда сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}(G_i)$ (для $i = 0,1$) определяются явными $L_{\omega_1\omega}$-схемами (являются элементарно условно термальными) для алгебры $\mathfrak{A}(G_{1-i})$.

2. Идентичные эндоморфизмы

В заключение коротко остановимся на вопросе взаимосвязи мультиорграфов с идентичными эндоморфизмами на самих себя. Напомним, что $L_{\omega_1\omega}$ ($L_{\omega\omega}$)-формула называется позитивной, если она не содержит связок $\rightarrow$ и $\neg$. В работе [1] доказан следующий аналог теоремы Скотта.

Теорема B. Для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M} = < A; \sigma >$ не более чем счетной сигнатуры существует позитивная $L_{\omega_1\omega}$-формула $\Phi^+_{\mathfrak{M}}$ такая, что для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M}' = < B; \sigma >$ следующие условия равносильны:

а) $\mathfrak{M}' \models \Phi^+_{\mathfrak{M}}$,

б) существует некоторый гомоморфизм модели $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$.

Через $Epi\mathfrak{M}$ ($EpiG$) будем далее обозначать полугруппу всех эндоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ (графа G) на себя. Практически дословно повторяя доказательство следствия 1 с заменой ссылки на теорему Скотта ссылкой на теорему B, получаем утверждение

Следствие 2. Для любой не более чем счетной модели $\mathfrak{M} = < A; \sigma >$ не более чем счетной сигнатуры, для любого предиката P на множестве A полугруппы $Epi\mathfrak{M}$ и $Epi\mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}'$ – обогащение модели $\mathfrak{M}$ предикатом P, совпадают тогда и только тогда, когда P определим в $\mathfrak{M}$ некоторой позитивной $L_{\omega_1\omega}$-формулой.

Тем самым имеет место

Теорема 3. Не более чем счетные мультиорграфы $G_0 = < V;\, E_0,\, S_0,\, C_0,\, g_0 >$ и $G_1 = < V;\, E_1,\, S_1,\, C_1,\, g_1 >$ с раскрашенными дугами и без кратных равнораскрашенных дуг и общим множеством вершин имеют одни и те же эндоморфизмы на себя тогда и только тогда, когда предикаты раскраски дуг P_c^2 ($c \in C$) каждого из этих графов G_i ($i = 0,1$) задаются некоторыми позитивными $L_{\omega_1\omega}$-формулами модели другого графа G_{1-i}.

Под позитивной явной $L_{\omega_1\omega}$-схемой для универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ понимается формула вида (*) из определения явной $L_{\omega_1\omega}$-схемы, когда формулы Φ_i обязаны быть позитивными $L_{\omega_1\omega}$-формулами, а условие их попарной дизъюнктивности заменяется на условия истинности на $\mathfrak{M}$ формул вида

$$\forall x_1,...,x_n \left(\Phi_i(x_1,...,x_n) \,\&\, \Phi_j(x_1,...,x_n) \rightarrow t_i(x_1,...,x_n) = t_j(x_1,...,x_n)\right)$$

для любых $i \neq j$ из I.

Из результатов работы [1] получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Для любых не более чем счетных мультиорграфов $G_0 = < V,\, E_0,\, S_0,\, C_0,\, g_0 >$ и $G_1 = < V,\, E_1,\, S_1,\, C_1,\, g_1 >$ без петель, с функционально раскрашенными дугами и общим множеством вершин следующие условия равносильны:

а) G_0 и G_1 имеют одни и те же эндоморфизмы на себя и одни и те же области достижимости, б) функции f_c ($i \in C_i$) каждого из этих графов G_i (для $i = 0,1$) определимы позитивными явными $L_{\omega_1\omega}$-схемами в алгебре $\mathfrak{A}(G_{1-i})$ для другого графа G_{1-i}.

Заключение

Приведенные результаты еще раз демонстрируют возможности приложений теории моделей и универсальной алгебры в теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пинус А.Г.** Определимые функции универсальных алгебр и определимые эквивалентности алгебр // Алгебра и логика. – 2014. – Т. 53, № 2. – С. 256–270.
2. **Пинус А.Г.** Эквивалентности универсальных алгебр, индуцированные сопряжением их производных структур // Вестник Омского университета. – 2014. – № 2 (72). – С. 27–33.
3. **Scott D.** Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers // Theory of Models. – Amsterdam: North Holland Publ., 1965. – P. 329–341.
4. **Пинус А.Г.** Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений // Успехи математических наук. – 2001. – Т. 56, вып. 4. – С. 35–72.

ON THE DIRECTED MULTYGRAPHS WITH IDENTICAL AUTHOMORPHISMS AND ATTAINABILITY DOMAINS

Pinus A.G.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

The work contains some results concerning similarities of graphs which have identical derived objects: automorphisms, endomorphisms, and admissible domains. Based on the results in the model theory and universal algebra obtained by the author, including some analog (for positive formulas) of Scott's theorem about categoricity of countable model theories in the language of logic with countable conjunctions and disjunctions, in the language of logic with infinitely long formulas and in the language of narrow predicative calculus, a description of pairs of directed multigraphs with colored edges and common sets of vertices which have identical automorphisms and admissible domains (identical endomorphisms of itself and admissible domains).

Key words: directed multigraphs with colored edges, automorphisms, admissible domains.

REFERENCES

1. Pinus A.G. Opredelimye funktsii universal'nykh algebr i opredelimye ekvivalentnosti algebr [Definable functions of universal algebras and definable equivalence between algebras]. *Algebra i logika – Algebra and Logic,* 2014, vol. 53, iss. 2, pp. 166-175. doi: 10.1007/s10469-014-9279-4. *Translated from Algebra i logika, 2014, vol. 53, no. 2,* pp. 256-270.
2. Pinus A.G. Ekvivalentnosti universal'nykh algebr, indutsirovannye sopryazheniem ikh proizvodnykh struktur [Some equivalence relations of universal algebras which are induciert by the conjugation of its derived structures]. *Vestnik Omskogo universiteta – Herald of Omsk University*, 2014, no. 2 (72), pp. 27-33.
3. Scott D. Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers. Theory of Models. Amsterdam, North Holland Publ., 1965, pp. 329-341.
4. Pinus A.G. Uslovnye termy i ikh prilozheniya v algebre i teorii vychislenii [Conditional terms and its contributions in algebra and conputation theory]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2001, vol. 56, iss. 4, pp. 649-686. doi: 10.1070/RM2001v056n04ABEH000415. *Translated from Uspekhi matematicheskikh nauk, 2001, vol. 56, iss. 4,* pp. 35-72.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пинус Александр Георгиевич – родился в 1946 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: алгебра и математическая логика. Опубликовано более 180 работ и 5 монографий. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: ag.pinus@gmail.com)

Pinus Alexandr Georgievich, b.1946. D.Sc. (Phys.&Math.), Professor, Professor of Department of Algebra and Mathematical Logic in Novosibirsk State Technical University. He is author of more then 180 scientific papers and 5 monographies. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: ag.pinus@gmail.com)

Статья поступила 02 июля 2014 г.
Received July 02, 2014

To Reference:

Pinus A.G. O mul"tiorgrafakh s identichnymi avtomorfizmami i oblastiami dostizhimosti [On the directed multygraphs with identical authomorphisms and attainability domains]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 19-25.