ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2014 апрель–сентябрь № 2–3 (23–24)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 512.62

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МОДУЛЯХ

К.Н. Пономарёв
Новосибирский государственный технический университет

В целом работа относится к теории модулей ассоциативных колец. Естественно свойства класса модулей определять в терминах их кольца скаляров. Известно строение классов только для довольно ограниченного класса ассоциативных колец. Автор обращается к изучению модулей групповых алгебр. Известно, что в этом классе модулей обозримым является класс перестановочных модулей. В случае конечных групп хорошо развита теория перестановочных модулей над ними. А для бесконечных групп подобную теорию пока построить не удается. В статье предлагается подход к построению теории перестановочных модулей групповых алгебр проконечных групп. Такие модули представляются объединением башни перестановочных модулей групповых алгебр конечных групп. Это позволяет использовать уже имеющиеся результаты. Чтобы установить свободу перестановочного модуля проконечной группы нужно показать расщепимость вложений перестановочных модулей конечных групп. Это составляет основой результат статьи.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, перестановочный модуль, проконечная группа, расщепимое вложение.

Введение

В теории представлений конечных групп хорошо известно понятие перестановочного модуля конечной группы. Иногда их называют пермутационными модулями. Это понятие активно используется в теории алгебраических торов [1] и, вообще, в теории алгебраических групп. Оно было определено в монографиях [2], [3].

Возможность использования этого понятия в мультипликативной теории полей объясняется таким замечанием. Рассмотрим поле F и конечную группу его автоморфизмов G. Естественное действие группы G и кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ на мультипликативной группе поля F^* определяет на этой группе структуру $\mathbb{Z}$ -модуля. Для многих элементов поля F^* порожденный над ними модуль оказывается перестановочным. Возникает проблема продолжения этого понятия на бесконечные группы автоморфизмов. В данной статье предлагается подход к обобщению понятия перестановочного модуля для бесконечных проконечных групп.

Перестановочный модуль – это свободный R-модуль, на базисе которого определено подстановочное действие группы G. Произвольный перестановочный модуль представляется прямой суммой транзитивно перестановочных модулей. А транзитивно перестановочный модуль отождествляется с подмодулем H – инвариантных элементов $RG^H = RG \cdot H^+$ свободного левого модуля ${}_{RG}RG$ для подходящей подгруппы H группы G. Здесь рассматриваем групповую алгебру с естественной структурой бимодуля. А RG^H-модуль инвариантных элементов – относительно умножения справа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект № 1052.

По отношению включения групп инвариантов $H_1 \supseteq H_2$ естественно определяется отношение вложения $\iota_{H_2}^{H_1} : RG^{H_1} \to RG^{H_2}$ между такими модулями. Мы доказываем, что это вложение расщепимо, более того, для некоторого свободного R-модуля $B_{H_2}^{H_1}$ имеем прямую сумму R-модулей:

$$\iota_{H_2}^{H_1}\left(RG^{H_1}\right) \oplus B_{H_2}^{H_1} = RG^{H_2}.$$

Перестановочные модули

Следуем книге [2], глава 7. Основные факты теории двойственности алгебр и групповых колец можно найти во второй главе [3].

Пусть G – конечная группа, а R – коммутативная область целостности. Обозначим RG групповую алгебру, отвечающую этой группе. Транзитивно перестановочным RG-модулем, или транзитивно пермутационным RG-модулем называется такой левый RG-модуль V который как R-модуль является свободным R-модулем; этот R-модуль обладает таким свободным базисом, на котором действие группы G подстановочное; это действие однотранзитивно.

В случае тривиальной группы $G = e$ понятие транзитивно перестановочного модуля совпадает с понятием одномерного свободного модуля, регулярного модуля ${}_R R$ – образующего объекта категории R-модулей. Для произвольной конечной группы G свободный однопорожденный RG-модуль ${}_{RG}RG = RG \cdot 1_{RG}$ является примером транзитивно перестановочного модуля. А произвольный транзитивно перестановочный модуль V получается из свободного модуля следующим образом.

Замечание 1

Действие группы G на базисе V как свободного R-модуля подобно действию группы G на правых классах смежности по некоторой подгруппе $H \leqslant$. Подгруппа H является стабилизатором некоторого базисного элемента e, $V = RGe$. Она определяется по RG-модулю V с точностью до выбора базисного элемента e, до сопряжения внутренним автоморфизмом группы. Однозначно определяется по V лишь класс сопряженности подгруппы H .

Транзитивно перестановочный модуль однопорожден, $V = RGe$. Такой модуль принято обозначать $V = RG / H$ или $V = R[G / H]$. Естественным образом определяется универсальное накрытие транзитивно перестановочного RG-модуля – эпиморфизм ω: $RG \to RG / H$.

В теории двойственности групповых алгебр конечных групп хорошо известно, что транзитивно перестановочные модули RG / H самодвойственны, поэтому двойственным образом можно определить транзитивно перестановочные RG-модули как подмодули свободного модуля. Приведем это определение. Условимся для подгруппы $H \leqslant$ обозначать H^+ определенный этой подгруппой элемент группового кольца:

$$H^+ = \sum_{h \in H} h \in RG.$$

Замечание 2

Для любой подгруппы $H\leqslant$ множество элементов группового кольца ${}^{H}RG$, неподвижных относительно умножения слева на элементы из \$H,\$ совпадает с правым идеалом $H^{+}RG$: ${}^{H}RG = H^{+}RG.$ Симметричным образом $RG^{H} = RGH^{+}.$ А в случае нормальной подгруппы H выполняется равенство ${}^{H}RG = RG^{H}$.

Произвольный транзитивно перестановочный G-модуль $V = RG/H$ изоморфен подмодулю свободного левого модуля ${}_{RG}RG,$ порожденному элементом H^{+}: $V \cong RG\cdot H^{+} = RG^{H}$. Этот модуль изоморфен модулю $RG\cdot H^{+} = RG^{H}$. Это отождествление позволяет определить естественное вложение транзитивно перестановочного модуля RG/H в свободный G-модуль:

$$\iota_{H} : RG/H = RG\cdot H^{+} = RG^{H} \to RG.$$

Подобным образом, для любой пары подгрупп с условием $H_1 \supseteq H_2$ определяется вложение модулей $\iota^{H_1}_{H_2} : RG^{H_1} \to RG^{H_2}$. При этом образ $\iota^{H_1}_{H_2} : RG^{H_1}$ в модуле RG^{H_2} порождается элементом $(H_1/H_2)^{+} = \sum_{h\in H_1\setminus H_2} h$:

$$RG^{H_1} = RG\cdot H_1^{+} = RG\cdot (H_1/H_2)^{+} H_2^{+}.$$

Здесь H_1/H_2 обозначено какое-то множество представителей правых классов смежности группы H_1 по подгруппе H_2. Это позволяет считать (и мы будем делать это далее) систему всех транзитивно перестановочных RG-модулей направленной системой подмодулей свободного RG-модуля RG, порожденных элементами H^{+} для множества подгрупп H группы G.

Теорема

Рассмотрим конечную группу G и две подгруппы этой группы, связанные включением $H_1 \supseteq H_2$. Рассмотрим определенное выше вложение транзитивно перестановочных RG-модулей $\iota^{H_1}_{H_2} : RG^{H_1} \to RG^{H_2}$. Утверждается, что это вложение, как вложение свободных R-модулей, расщепляется. Образ $\iota(RG^{H_1})$ в модуле RG^{H_2} выделяется свободным прямым слагаемым.

В самом деле, для доказательства следует в свободном R-модуле, определенном модулем RG^{H_1}, определить такой свободный базис, который дополняется до свободного базиса всего R-модуля RG^{H_2}.

Обозначим e – порождающий модуля RG^{H_2}. Рассмотрим множество $B = \{ge \mid g\in G\}$, оно образует исходный свободный базис модуля RG^{H_2} как R-модуля, в нем $|G:H_2|$ элементов. Выберем и зафиксируем далее некоторое множество представителей H_1/H_2 группы H_1 по подгруппе H_2. Вложение ι отождествляет модуль RG^{H_1} с R-подмодулем RG^{H_2}, порожденным элементами $g(H_1/H_2)^{+}e,\ g\in G.$

Далее взамен базиса B выберем другой базис, часть элементов которого образует базис этого подмодуля. Такой базис определим подходящей унимодулярной матрицей перехода. Упорядочим базис B так, чтобы элементы $he, h \in H_1 / H_2$ были начальным отрезком. И чтобы далее элементы базиса разбивались на отрезки из элементов ge, в которых g – представители одного правого класса смежности группы G по подгруппе H_1.

Тогда в так упорядоченном базисе B эта подгруппа определяется блочно-мономиальной матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix},$$

в которой $I = (1,\dots,1)$ – матрица-строка из единиц длины $|H_1 : H_2|$. Эта матрица-строка I очевидным образом дополняется до унимодулярной матрицы D. Например, можно выбрать:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, если в матрице A заменить каждый блок с матрицей I на матрицу D, то получится унимодулярная матрица. Это матрица перехода к такому свободному базису R-модуля RG^{H_2}, который дополняет свободный базис подмодуля RG^{H_1}. Это доказывает теорему.

Заключение

В заключение укажем, что мы указали подход к продолжению понятия перестановочного модуля на случай бесконечных групп. Дальнейшее использование полученного результата позволит продолжить понятие перестановочного модуля на случай произвольных проконечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воскресенский В.Е.** Алгебраические торы. – М.: Наука, 1977. – 150 с.
2. **Karpilovsky G.** Induced modules over group algebras. – Amsterdam: North Holland Publ., 1990. – 345 p. – (North-Holland mathematics studies; 161).
3. **Фейт У**. Теория представлений конечных групп. – М.: Наука, 1990. – 575 с.

ON INFINITE PERMUTATION MODULES

Ponomarev K.N.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

In the paper the author is concerned with permutation modules over group algebras with finite groups. These modules have a rather simple structure. For the extension of this theory for infinite groups the author proves the theorem of splitting extension of permutation modules for finite groups.

Key words: associative ring, permutation module, profinite group, splitting extension.

REFERENCES

1. Voskresenskii V.E. *Algebraicheskie tory* [Algebraic tori]. Moskow, Nauka publ., 1977. 150 p.
2. Karpilovsky G. Induced modules over group algebras. North-Holland mathematics studies, 161. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, North Holland Publ., 1990. 345 p.
3. Feit W. *The representation theory of finite groups*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1982. 502 p. (Russ. ed.: Feit U. *Teoriya predstavlenii konechnykh grupp*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 575 p.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пономарёв Константин Николаевич – родился в 1958 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и математической логики, НГТУ. Область научных интересов: алгебра. Опубликовано 63 научные работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: algebra@nstu.ru).

Ponomarev Konstantin Nikolaevich (b. 1958) – PhD, professor, professor algebra & math.logic department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on algebra. He is author of 63 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Prospekt., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: algebra@nstu.ru).

Статья поступила 29 июня 2014 г.
Received June 29, 2014

To Reference:

Ponomarev K.N. O beskonechnykh perestanovochnykh modulyakh [On infinite permutation modules]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 26-30.