

ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ		
2014	апрель–сентябрь	№ 2–3 (23–24)
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ		

УДК 519.6:539.3

ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С УЗЛАМИ ПО КОНТУРУ СЕЧЕНИЯ

С.А. Чернов

Ульяновский государственный технический университет

Рассматривается пространственный тонкостенный стержневой конечный элемент. В общем случае, при несовпадении центра тяжести сечения с его центром изгиба (кручения), нет единой системы координат для компонентов внутренних узловых сил и перемещений. За ось стержня принимается ось, проходящая через центры изгиба поперечных сечений стержня. Продольная сила, приложенная в центре тяжести сечения, приводится к центру изгиба. Приведена матрица жесткости пространственного тонкостенного стержневого конечного элемента с продольной силой в центре изгиба сечения, полученная переносом узловых сил из центра тяжести сечения в его центр изгиба. Теория В.З. Власова позволяет выполнять расчеты только плоских рам с определенной конструкцией узловых соединений, одним из основных критериев которых является равенство депланаций сечений стержней, образующих узел. Для расчета пространственных тонкостенных стержневых систем предлагается конечный элемент с узлами по контуру в концевых сечениях стержня, матрица жесткости которого получена с помощью матриц переноса узловых сил и перемещений. Депланация в концевых сечениях стержня преобразована в продольные перемещения в узлах по контурам сечений, т. е. семимерному вектору узловых сил тонкостенного стержня ставится в соответствие шестимерный вектор сил узла по контуру сечения. В численном алгоритме формирования матрицы жесткости предлагается П-образный стержневой конечный элемент, совокупностью которых моделируется стержневой конечный элемент с узлами по контурам сечений. Конечный элемент, отражающий форму сечения, позволяет выполнять расчеты тонкостенных стержневых систем, в узлах соединения которых отсутствует равенство депланаций сечений. Стержни вне узлов их соединения моделируются стержневыми элементами с узлами по контурам сечений, а непосредственно зоны соединения стержней моделируются конечными элементами оболочки. Приведен пример расчета консольной рамы, конечно-элементная модель которой образована комбинацией конечных элементов.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, конечный элемент, узлы по контуру сечения, матрица жесткости, численный алгоритм.

Введение

Известно, что у тонкостенных стержней плоские сечения до деформации не остаются плоскими после деформации, а искажаются по закону секториальной координаты (площади), т. е. за основной характер распределения продольных перемещений для всех сечений тонкостенных стержней, образующих узел, принимается эпюра главных секториальных координат. Теория расчета тонкостенных стержневых систем позволяет выполнять расчеты только плоских рам с определенной конструкцией узловых соединений, одним из основных критериев которых является равенство депланаций сечений стержней, образующих узел [1, 2].

В стержневых системах часто имеют место различные эксцентриситеты осей центров тяжести и изгиба сечений стержней, вызываемые конструктивной необходимостью, т. е. узел их соединения не является математической точкой. Величина нормальных напряжений в таких неплоских стержневых системах часто значительно отличается от напряжений в соответствующей плоской. Для плоских стержневых систем отличие может достигать 30 %. Неплоскую систему можно рассматривать как плоскую только в том случае, если наибольший вертикальный

эксцентриситет в узле рамы не превосходит половину высоты наименьшего из элементов, а наибольший горизонтальный эксцентриситет не превышает удвоенную толщину стенки наименьшего из элементов, сходящихся в узле [2].

В работе [3] равенство линейных, угловых перемещений и депланаций концевых сечений тонкостенных стержней, сходящихся в узле, распространялось на узлы соединений лонжеронов с поперечинами, а затем учитывались эксцентриситеты их осей центров тяжести и изгиба сечений.

У пространственных тонкостенных стержневых систем оси сечений стержней не пересекаются и депланация концов сходящихся стержней в узле различная. Не претендуя на высокую точность, на практике пользуются так называемой технической теорией, основанной на гипотезах о недеформируемости контура поперечного сечения, т. е. использованием в конечно-элементной модели задачи балочных конечных элементов (КЭ). При точном расчете стержневую систему рассматривают как оболочку, т. е. действительное взаимодействие стержней в узле может отразить только его пространственная расчетная схема, образование которой выполняется моделированием всей системы КЭ оболочки, что приводит к большому объему исходной информации и трудоемкости ее подготовки.

В конечно-элементной модели стержневой системы, образованной из стержней коробчатого сечения, в работе [4] рассмотрена комбинация КЭ оболочки и балочных КЭ. В граничном сечении сопряжения КЭ силы и перемещения узлов контура сечения стержня приводятся к узлу балочного КЭ. В работе [5] силы и перемещения узла балочного КЭ в граничном сечении сопряжения КЭ приводятся к узлам его контура сечения.

Предлагаемый тонкостенный стержневой КЭ с узлами по контуру сечения позволяет силы и перемещения узла КЭ в граничном сечении сопряжения КЭ привести к узлам его контура сечения. Депланация в узлах стержня преобразуется в продольные перемещения в узлах по контурам сечений.

Рассматривается пространственный тонкостенный стержневой КЭ. В общем случае, при несовпадении центра тяжести C сечения с его центром изгиба A , в сечении стержня для компонентов внутренних сил нет единой системы координат [2]. Изгибающие моменты M_y , M_z берутся относительно главных осей инерции сечения Y_c и Z_c , а крутящий момент M_x – относительно оси X . Продольная сила N приложена в центре тяжести сечения, а поперечные силы Q_y , Q_z – в центре изгиба (рис. 1).

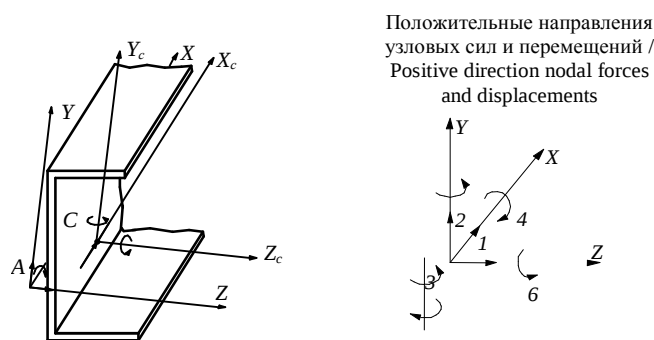


Рис. 1 – Вектор узловых перемещений тонкостенного стержня:

1–7 – номера степеней свободы узла

Fig. 1 – Vector of nodal displacements of thin-walled bar:

1–7 – numbers of degrees of freedom of assembly

1. Матрица жесткости тонкостенного стержня

Продольная сила приводится к единому полюсу – центру изгиба сечения. Уравнение равновесия тонкостенного стержневого КЭ имеет вид

$$\{P_c\} = [K_c]\{Z_c\}, \quad (1)$$

где $\{P_c\}$, $\{Z_c\}$ – векторы узловых сил и перемещений КЭ с продольной силой в центре тяжести C сечения соответственно, $[K_c]$ – матрица порядка 14 реакций КЭ от единичных узловых перемещений [6].

Согласно принятым положительным направлениям сил и перемещений и правилу переноса сил из узла C в узел A , вектор $\{P_1\}$ узловых сил в центре изгиба A сечения начала КЭ в системе координат $X_c Y_c Z_c$ вычисляется по формуле

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ B_\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{xc} \\ P_{yc} \\ P_{zc} \\ M_{xc} \\ -P_{xc}z + M_{yc} \\ P_{xc}y + M_{zc} \\ B_\omega \end{Bmatrix},$$

где y , z – координаты центра изгиба сечения.

В системе координат XYZ координаты y_c , z_c центра тяжести C сечения будут $y_c = -y$; $z_c = -z$. В матричной форме вектор $\{P_1\}$ узловых сил стержневого КЭ с продольной силой в центре изгиба A сечения определяется выражением

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} P_{1c} \\ P_{2c} \end{Bmatrix} = [H]\{P_c\}, \quad (2)$$

где $[H]$ – матрица переноса узловых сил стержневого КЭ из центра тяжести C сечения в его центр изгиба A :

$$[H] = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}; [h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $[h]$ – матрица переноса узловых сил из центра тяжести сечения в его центр изгиба.

Из преобразований сил (2) следуют преобразования перемещений (контраградиентные преобразования) [7]:

$$\{Z_c\} = [H]^T \{Z\}. \quad (3)$$

Подставив в выражение (2) уравнение (1) и с учетом формулы (3), вектор $\{P\}$ узловых сил КЭ запишется в виде

$$\{P\} = [H][K_c][H]^T \{Z\},$$

что определяет матрицу $[K]$ жесткости тонкостенного стержневого КЭ с продольной силой в центре изгиба сечения в системе координат XYZ :

$$[K] = [H][K_c][H]^T.$$

2. Матрица жесткости тонкостенного стержня с узлами по контурам сечений

На рис. 2 приведена модель тонкостенного стержневого КЭ с n узлами по контурам сечений с принятой последовательностью нумерации узлов.

Количество узлов i , расположенных по контурам сечений, произвольное, но обязательны узлы, в которых происходит изменение направления линии контура.

Следуя работе [5], вектор $\{P_i\}$ сил i -го узла контура сечения в местной системе координат XYZ тонкостенного стержневого КЭ вычисляется по формуле

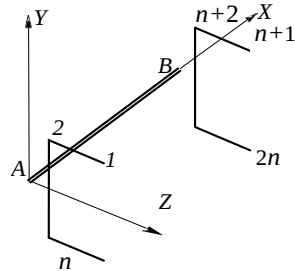


Рис. 2 – Конечно-элементная модель тонкостенного стержневого КЭ

Fig. 2 – Finite element model of a thin-walled beam FE

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ B_{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \\ P_{y1}z_i - P_{z1}y_i + M_{x1} \\ -P_{x1}\bar{z}_i + M_{y1} \\ P_{x1}\bar{y}_i + M_{z1} \\ P_{x1}\omega_i + B_{\omega} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где ω_i – главная секториальная координата i -го узла контура сечения; $\bar{y}_i = y_i - y_c$, $\bar{z}_i = z_i - z_c$.

Введение координат $\bar{z}_i$ и $\bar{y}_i$ связано с тем, что изгибающие моменты M_y , M_z берутся относительно главных осей инерции сечения Y_c и Z_c . Для симметричного тонкостенного сечения $\bar{z}_i = z_i$, $\bar{y}_i = y_i$. За положительную координату ω_i принимается удвоенная площадь, описанная начальным радиусом-вектором из центра изгиба A сечения против движения часовой стрелки от точки отсчета секториальных координат, если смотреть на сечение по направлению оси X [2].

В матричной форме вектор $\{P_i\}$ узловых сил (4) определяется выражением:

$$\{P_i\} = [h_i]\{P_1\},$$

где $[h_i]$ – матрица переноса сил i -го узла, т. е. перенос сил из узла A в узел i :

$$[h_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_i & -y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z}_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{y}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тогда выражения для векторов $\{P_n\}$ и $\{P_{2n}\}$ сил в узлах контуров будут

$$\{P_n\} = [H_{n1}]\{P_1\}; \quad \{P_{2n}\} = [H_{n2}]\{P_2\}, \quad (6)$$

где $[H_{n1}]$, $[H_{n2}]$ – матрицы переноса сил узлов контуров сечений в начале и конце стержневого КЭ, сформированные из матриц (5):

$$[H_{n1}] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}; \quad [H_{n2}] = \begin{bmatrix} h_{n+1} \\ h_{n+2} \\ \vdots \\ h_{2n} \end{bmatrix}.$$

Если узлы по контурам сечений в начале и конце КЭ одни и те же, то

$$[H_n] = [H_{n1}] = [H_{n2}].$$

С учетом одной матрицы $[H_n]$ из преобразований узловых сил (6) следуют преобразования узловых перемещений:

$$\{Z_1\} = [H_n]^T \{Z_n\}; \quad \{Z_2\} = [H_n]^T \{Z_{2n}\}, \quad (7)$$

Уравнение равновесия тонкостенного стержневого КЭ 1–2 сгруппируем и разобьем на подматрицы по узлам 1 и 2 [8]:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix},$$

где $K_{11}, \dots, K_{22}$ – подматрицы порядка 7 матрицы жесткости тонкостенного стержневого КЭ $A-B$; $\{P_1\}$, $\{Z_1\}$ и $\{P_2\}$, $\{Z_2\}$ – векторы сил и перемещений узлов 1 и 2 соответственно.

Перемножим сгруппированные элементы матриц:

$$\begin{aligned} \{P_1\} &= [K_{11}]\{Z_1\} + [K_{12}]\{Z_2\}; \\ \{P_2\} &= [K_{21}]\{Z_1\} + [K_{22}]\{Z_2\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив в выражения (6) уравнения (8) и с учетом формул (7), получим

$$\{P_n\} = [H_n][K_{11}][H_n]^T \{Z_n\} + [H_n][K_{12}][H_n]^T \{Z_{2n}\};$$

$$\{P_{2n}\} = [H_n][K_{21}][H_n]^T \{Z_n\} + [H_n][K_{22}][H_n]^T \{Z_{2n}\},$$

откуда следует матрица порядка $14n$ жесткости пространственного тонкостенного стержневого КЭ с n узлами по контурам сечений:

$$[K_{n-n}] = \begin{bmatrix} H_n K_{11} H_n^T & H_n K_{12} H_n^T \\ H_n K_{21} H_n^T & H_n K_{22} H_n^T \end{bmatrix}.$$

3. Численный алгоритм

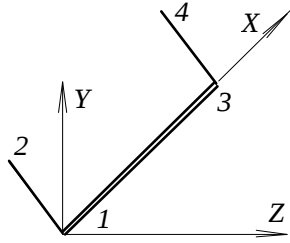


Рис. 3 – П-образный тонкостенный стержневой КЭ

Fig. 3 – П-form thin-walled beam FE

Порядок матрицы $[K_{n-n}]$ переменный, довольно большой и ее вычисление непосредственно по выражению нерационально. Для формирования матрицы в стандартной для конечно-элементной процедуры форме предлагается П-образный стержневой КЭ, совокупностью n которых моделируется стержневой КЭ с узлами по контурам сечений (рис. 3).

Участок 1–3 соответствует стержневому КЭ, а участки 1–2 и 3–4 выполняют функции переноса сил из узлов 1, 3 стержневого КЭ в узлы 2 и 4 соответственно. Считаем, что узлы 2, 4 являются узлами контуров конечных сечений стержня.

Уравнение равновесия тонкостенного стержневого КЭ 1–3 имеет вид

$$\{P_{1-3}\} = [K_{1-3}]\{Z_{1-3}\}, \quad (9)$$

где $[K_{1-3}]$ – матрица жесткости стержневого КЭ; $\{P_{1-3}\}$, $\{Z_{1-3}\}$ – векторы узловых сил и перемещений соответственно.

Если для вектора $\{P_p\}$ сил узлов 2 и 4 запишем:

$$\{P_p\} = [H_p]\{P_{1-3}\}, \quad (10)$$

то матрица $[H_p]$ переноса узловых сил КЭ будет образована матрицами $[h_2]$ и $[h_4]$ переноса сил (5) узлов 1 и 3 соответственно в узлы 2 и 4:

$$[H_p] = \begin{bmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_4 \end{bmatrix}.$$

Из преобразований сил (10) следует:

$$\{Z_{1-3}\} = [H_p]^T \{Z_p\}.$$

Тогда вектор $\{P_p\}$ сил узлов 2 и 4 (10), с учетом уравнения (9) и выражения для вектора $\{Z_{1-3}\}$, определяется выражением

$$\{P_p\} = [H_p][K_{1-3}][H_p]^T \{Z_p\},$$

что определяет матрицу порядка 14 жесткости П-образного КЭ с векторами узловых сил и перемещений в узлах 2 и 4:

$$[K_p] = [H_p][K_{1-3}][H_p]^T.$$

Вектор $\{Z_p\}$ узловых перемещений, соответствующий матрице жесткости $[K_p]$, включает в узлах 2, 4 линейные, угловые перемещения и деформации φ_x сечений в начале и конце тонкостенного стержневого КЭ 1–3. Причем суммарные продольные перемещения в направлении оси X содержат перемещения от изгиба и перемещения $U_i = -\varphi_x \omega_i$, вследствие деформации сечения при кручении стержня, т. е. семимерному вектору узловых сил тонкостенного стержня ставится в соответствие шестимерный вектор сил узла по контуру сечения. При реализации алгоритма расчета из матрицы жесткости $[K_p]$ исключаются 7-е и 14-е строки и столбцы, соответствующие жесткостным характеристикам бимоментов в сечениях тонкостенного стержневого КЭ [9].

Процедура вычисления матриц жесткости $[K_p]$ выполняется для n П-образных КЭ, совокупностью которых моделируется стержневой КЭ с узлами по контурам сечений, т. е. вычисляются матрицы $[K_{pi}]$ со своими координатами узлов контуров сечений при $i = 1, 2, \dots, n$. Преобразование матриц $[K_{pi}]$ из местной системы координат в матрицы $[K_{pi}^0]$ в общей системе координат выполняется конгруэнтными преобразованиями.

Для формирования матрицы $[K_{n-n}^0]$ с узлами по контурам сечений в общей системе координат можно применить стандартную процедуру формирования матрицы жесткости конструкции [8, 10]:

$$[K_{n-n}^0] = [A]^T [K_k^0] [A] = \sum_{i=1}^n [A_{pi}]^T [K_{pi}^0] [A_{pi}],$$

где $[A]$ – булева матрица порядка $12n$ соответствий КЭ с узлами по контурам сечений; $[K_k^0]$ – квазидиагональная матрица порядка $12n$ жесткости КЭ с узлами по контурам сечений, состоящая из матриц $[K_{pi}^0]$; $[A_{pi}]$ – матрица соответствий П-образного i -го КЭ, число строк у которой равно числу степеней свободы КЭ: 12, а число столбцов равно числу степеней свободы КЭ с узлами по контурам сечений: $12n$.

4. Тестовый пример

На рис. 4 приведена конечно-элементная модель соединения двух швеллеров с использованием КЭ оболочки и стержневых КЭ.

Длина стержней по 100 см, высота швеллерного сечения гнутого профиля 10 см, ширина полки 5 см, толщина сечения постоянная и равна 0,3 см. Геометрические характеристики сечения и главные секториальные координаты узлов

контура граничного сечения вычислялись по программе [11]: площадь сечения $F = 5,82 \text{ см}^2$, момент инерции при чистом кручении $J_x = 0,17 \text{ см}^4$, главные моменты инерции сечения $J_y = 91,27 \text{ см}^4$, $J_z = 14,26 \text{ см}^4$; секториальный момент инерции $J_\omega = 234,8 \text{ см}^6$.

В модели, образованной комбинацией КЭ, используются следующие КЭ: два тонкостенных пространственных стержневых КЭ с узлами по контуру сечения, моделирующие участки стержней до граничных сечений, и 82 прямоугольных КЭ оболочки, моделирующих узел соединения стержней. Прямоугольный КЭ несогласованный [12]. Зону узла соединения стержней, моделируемыми прямоугольными КЭ, необходимо увеличить, примерно, на 50 %, чтобы обеспечить равенство деформаций в сечении, которое и является граничными сечениями сопряжения стержневых КЭ и прямоугольных КЭ. Оси стержневых КЭ проходят через центры изгиба поперечных сечений. В модели два граничных сечения, у которых по 11 узлов. Следовательно, у каждого стержневого КЭ по 11 узлов на контуре сечения.

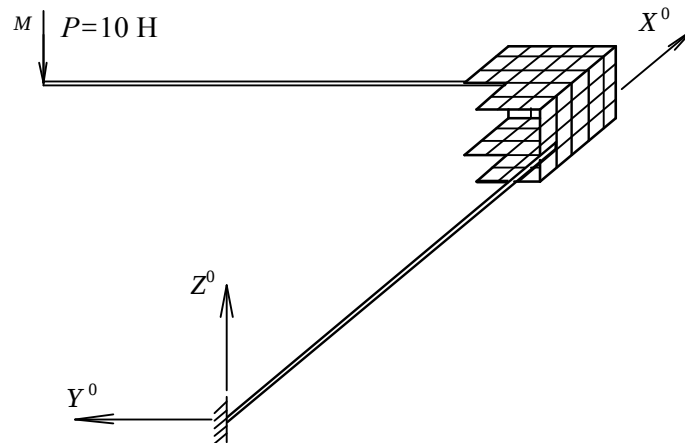


Рис. 4 – Конечно-элементная модель консольной рамы, образованная комбинацией КЭ

Fig. 4 – Finite element model of the cantilevered frame formed by the combination of FE

Согласно теории расчета стержневых систем, основанной на гипотезах о недеформируемости поперечного сечения, деформации в узлах, расположенных на контуре, по направлению осей Y , Z местной системы координат XYZ стержневого КЭ отсутствуют, в отличие от теории расчета оболочек. Чтобы выполнить условие неразрывности деформаций узлов граничного сечения со стороны прямоугольных КЭ, необходимо обеспечить недеформированность сечения путем увеличения его жесткости. При численной реализации наиболее просто это выполняется введением КЭ 1–3 по контуру граничного сечения (рис. 3).

Основные результаты расчетов рам при стержневой и оболочечно-стержневой идеализации ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$) представлены в таблице, где приведены перемещения в сечении свободного конца, а внутренние силовые факторы (ВСФ) – в заделке.

**Сравнение численных результатов
Comparison of numerical results**

Наименование / Name	Перемещения (см, рад, рад, см ⁻¹) / Displacements (sm, rad, rad, sm ⁻¹)				ВСФ (Н, Нм, Нм, Нм ²) / Internal force factors (N, nm, nm, nm ²)			
	δ_z	φ_x	φ_y	φ_x	Q_z	M_x	M_y	B_ω
Стержневые КЭ / Rod FE	-2,4008	-0,0239	-0,0138	$9,00 \cdot 10^{-5}$	10,000	9,956	-10,030	-4,807
Комбинация КЭ / FE combination	-2,3740	-0,0236	-0,0136	$8,85 \cdot 10^{-5}$	9,801	9,711	9,810	-4,583
Погрешность, % / error, %	1,12	1,25	1,45	1,67	1,99	2,46	2,19	4,66

В сравнении с данными расчета консольной рамы [2] погрешность результатов расчета при образовании пространственной расчетной схемы узла по значениям прогибов, углов поворота, закручивания и деформации сечений в узлах свободного конца и в граничных сечениях составила не более 1,7 %. Разница значений по нормальным напряжениям в граничных сечениях и в заделке не превышает 4,7 %. Следует отметить, что точность приближенных решений, полученных методом конечных элементов, возрастает при увеличении густоты сетки КЭ [7, 8].

Заклучение

Близость результатов расчетов теста показывает, что предлагаемый подход позволяет рассчитывать тонкостенные стержневые системы, не удовлетворяющие критериям плоской системы. В этом случае зоны соединения стержней моделируются КЭ оболочки, образуя пространственную расчетную схему узла, а тонкостенные стержневые КЭ с узлами по контуру сечения используются с другой стороны граничного сечения сопряжения различных КЭ.

Участки тонкостенной стержневой системы между узлами соединения стержней могут состоять не только из стержней постоянного сечения, но и из открытых стержней, усиленных решеткой, диафрагмой или планками [1, 2], что позволяет реализовать следующая комбинация КЭ. Так, участки стержней, усиленных решеткой, моделируются КЭ с узлами по контуру сечения, а стержни решетки моделируются балочными КЭ. Граничные зоны диафрагм и планок моделируются КЭ оболочки, а участки стержней – КЭ с узлами по контуру сечения.

Реализация условий неразрывности деформаций в граничном сечении узла стержня и узлов его контура сечения с помощью матрицы жесткости тонкостенного стержневого КЭ с узлами по контуру сечения позволяет реализовать неоднородные кинематические условия закрепления конца стержня, при котором закрепления сечения распространяются на часть его контура. В теории расчета тонкостенных стержней условия закрепления распространяются на все сечение.

Подход к расчету стержневой системы на основе пространственной расчетной схемы узла позволяет полнее учитывать особенности соединения стержней и существенно уменьшает количество исходной информации при расчете с использованием в модели только КЭ оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Власов В.З.** Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматлит, 1959. – 566 с.
2. **Бычков Д.Б.** Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.

3. **Иванов А.А.** Расчет автомобильных рам методом конечных элементов // Автомобильная промышленность. – 1973. – № 4. – С. 26–28.
4. **Schwerzler D.D.** A technique for connecting beam elements to a plate model of complicated box section // International Conference on Vehicle Structural Mechanics. – 1974. – Paper № 740339. – P. 244–249.
5. **Чернов С.А.** Конечный элемент стержня коробчатого сечения с узлами по контуру сечения // Автоматизация и современные технологии. – 2014. – № 2. – С. 9–13.
6. **Чернов С.А., Дьяков И.Ф.** К расчету пространственной тонкостенной стержневой системы // Автоматизация и современные технологии. – 2008. – № 2. – С. 3–6.
7. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Статика произвольной плоско-пространственной тонкостенной стержневой системы: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2012619737 / С.А. Чернов; заявитель и правообладатель Ульян. гос. техн. ун-т. – № 2012617586; заявл. 10.09.2012; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 26.10.2012. – М.: Роспатент, 2012.
10. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода, В.Б. Петров, А.Н. Фролов, С.П. Заякин, Г.Н. Олышанская, В.Б. Горлов, В.С. Бондарь, С.П. Горшков, С.С. Корольков, Ю.В. Жуков, А.В. Цвелих. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
11. Вычисление геометрических характеристик произвольного тонкостенного сечения открытого и закрытого профиля: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610795 / С.А. Чернов, Е.М. Булыжев; заявитель и правообладатель Ульян. гос. техн. ун-т. – № 2005610202; заявл. 8.02.2005; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 06.04.2005. – М.: Роспатент, 2005.
12. **Дарков А.В., Шапошников Н.Н.** Строительная механика. – СПб.: Лань, 2010. – 656 с.

A THIN-WALLED BEAM FINITE ELEMENT WITH NODES ALONG THE CROSS-SECTION CONTOUR

Chernov S.A.

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation

A spatial thin-walled beam end element is considered. When the center of gravity of the section does not coincide with its center of bending, there isn't any uniform system of coordinates for the components of nodal forces and displacements. The axis passing through the center of the cross-section bend is taken as the axis of the beam. A longitudinal force applied to the center of gravity of the cross section is taken to the center of the bend. The stiffness matrix of a spatial thin-walled beam end element with a longitudinal force in the center of the cross-section bend obtained by transferring nodal forces from the centre of gravity of the cross section to the center of the bend is given. The theory proposed by V.Z. Vlasov makes it possible to perform calculations of only plane frames with a particular design of joints. One of the main criteria of them is the equality of deplanations of section beams forming a node. A final element with nodes along the contours of the sections in the end sections of the beam is proposed to calculate spatial thin-walled beam systems. The stiffness matrix of the beam is obtained by transfer matrices of nodal forces and displacements. The deplanation in the end sections of the beam is transformed into the longitudinal movement of the nodes along the contours of the sections. An Π -form beam finite element is proposed to be used in the numerical algorithm to form the stiffness matrix. The finite element representing the shape of the section that allows performing calculations of thin-walled beam systems in the nodes of connections in which there is no equality derived from the angle of torsion of the beam. The beams outside node connections are modeled by beam elements with nodes along the contours of the sections, while beam connection zones are modeled by finite shell elements. An example of the calculation of the console frame whose finite-element model is formed by a combination of finite elements is given.

Keywords: thin-walled beam; finite element; nodes along the contour of the cross section; stiffness matrix; numerical algorithm.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. *Tonkostennye uprugie sterzhni* [Thin-walled elastic beams]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959. 566 p.
2. Bychkov D.B. *Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh tonkostennykh konstruksii* [Structural analysis of thin-walled constructions]. Moscow, Gosstroizdat Publ., 1962. 475 p.
3. Ivanov A.A. Raschet avtomobil'nykh ram metodom konechnykh elementov [Calculation of automobile frames by the finite element method]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automotive industry*, 1973, no. 4, pp. 26-28.
4. Schwerzler D.D. A technique for connecting beam elements to a plate model of complicated box section. *International Conference on Vehicle Structural Mechanics*, 1974, Paper no. 740339, pp. 244-249. doi: 10.4271/740339.
5. Chernov S.A. Konechnyi element sterzhnya korobchatogo secheniya s uzлами po konturu secheniya [Final element of a box-shaped core section with knots on a section contour]. *Avtomatizatsiya i sovremennye tekhnologii – Automation and modern technology*, 2014, no. 2, pp. 9-13.
6. Chernov S.A., D'yakov I.F. K raschetu prostranstvennoi tonkostennoi sterzhnevoi sistemy [Calculation of the spatial thin-walled rod system]. *Avtomatizatsiya i sovremennye tekhnologii – Automation and modern technology*, 2008, no. 2, pp. 3-6.
7. Gallagher R.H. *Finite element analysis. Fundamentals*. New Jersey, Prentice Hall, 1975. 420 p. (Russ. ed.: *Metod konechnykh elementov. Osnovy*. Moscow, Mir Publ., 1984. 428 p.).
8. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in engineering science]. Moscow, Mir Publ., 1975. 541 p.
9. Chernov S.A. [Statics of an arbitrary spatial thin-walled beam system]. The Certificate on official registration of the computer program. No. 2012619737, 2012. (In Russian, unpublished).
10. Myachenkov V.I., Mal'tsev V.P., Maiboroda V.P., Petrov V.B., Frolov A.N., Zayakin S.P., Ol'shanskaya G.N., Gorlov V.B., Bondar' V.S., Gorshkov S.P., Korol'kov S.S., Zhukov Yu.V., Tselikh A.V. *Raschety mashinostroitel'nykh konstruksii metodom konechnykh elementov. Spravochnik* [Calculations of machine-building structures by the method of finite elements. Reference]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 520 p.
11. Chernov S.A., Bulzhev E.M. [Calculation of geometric characteristics of arbitrary thin-walled section of the open and closed profile]. The Certificate on official registration of the computer program. No. 2005610795, 2005. (In Russian, unpublished).
12. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2010. 656 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Чернов Сергей Анатольевич – родился в 1981 году, канд. техн. наук, преподаватель, колледж экономики и информатики, Ульяновский государственный технический университет. Моделирование и численная реализация задач статики, устойчивости и динамики тонкостенных стержневых систем и подкрепленных конструкций. Опубликовано 71 научная работа. (Адрес: 432002, Россия, г. Ульяновск, ул. Островского, д. 17, кв. 41. Email: 727122@mail.ru).

Chernov Sergey (born in 1981) – PhD. (Eng.), lecturer, College of Economics and Informatics, Ulyanosk State Technical University. Modeling and numerical implementation problems of statics, dynamics and stability of thin-walled rod systems and reinforced structures. 71 published scientific papers. (Address: 432002, Russia, Ulyanovsk, Ostrowski St., 17, m. 41. Email: 727122@mail.ru).

*Статья поступила 23 декабря 2013 г.
Received December 23, 2013*

To Reference:

Chernov S.A. Tonkostennyi sterzhnevoi konechnyi element s uzлами po konturu secheniya [A thin-walled beam finite element with nodes along the cross-section contour]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 133-143.