

УДК 519.216.22

ОБ УСЛОВИЯХ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ СУБ- И СУПЕРДИФфуЗИИ НА САМОПОДОБНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В.А. Селезнев, Н.С. Аркашов

Новосибирский государственный технический университет

В работе получены условия формирования математических моделей суб- и супердиффузии в случае, когда фазовое пространство процесса параметризуется самоподобным континуумом, инвариантным относительно системы итерированных функций. Моделирование аномальных процессов переноса в виде суб- и супердиффузии в известной зарубежной и отечественной литературе отражено в виде поиска моделей, обобщающих винеровский процесс. Примером такого процесса является известное фрактальное броуновское движение, которое в некоторых работах формально рассматривают как процесс суб- или супердиффузии в зависимости от значения параметра Херста и для которого до сих пор не найдено физических реализаций. Нами предложен способ моделирования суб- и супердиффузии, реализующий процесс блуждания частицы и связанный с выбором системы наблюдения винеровского процесса. Это позволяет моделировать параллельные фазовые пространства в случае, когда физический процесс не попадает под формат феноменологической модели. Постановку такой задачи можно найти, например, в [1]. Ключевым моментом моделирования процесса суб- и супердиффузии на двоично-рациональной решетке является построение счетно-аддитивной хаусдорфовой меры на этой решетке, в замыкании которой лежит фазовое пространство процесса, параметризованное континуумом.

Ключевые слова: самоподобные множества, аномальный перенос, мера Хаусдорфа, субдиффузия, супердиффузия.

DOI: 10.17212/1727-2769-2014-4-33-38

Введение

В работах [1, 2] посвященных аномальным процессам переноса, ставился вопрос, при каких условиях процесс блуждания частиц по самоподобному континууму реализуется в виде модели суб- или супердиффузии – переноса, при котором изменение среднего квадрата процесса имеет нелинейный вид по времени

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^\alpha,$$

где $\alpha > 1$ соответствует процессу супердиффузии и $\alpha < 1$ – субдиффузии, случай $\alpha = 1$ соответствует обычному винеровскому процессу.

Исследование субдиффузии привело к его представлению в виде CTRW-модели (см. [2, 3]). В случае супердиффузии вопрос оставался открытым (см. [4]). Кроме того, оставалась неясной связь этих процессов. В настоящей работе в продолжение исследования авторов [5] строится структура реализации указанных процессов, основанная на трех положениях.

1. Построение счетно-аддитивной хаусдорфовой меры на евклидовой двоично-рациональной решетке.

2. Возможность параметризации фазового пространства процесса самоподобным континуумом, лежащим в замыкании решетки относительно евклидовой топологии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00661).

3. Инвариантность уравнения полной вероятности относительно перепараметризации самоподобного континуума фазового пространства.

В рамках этой структуры авторы строят единую модель аномальной диффузии, в которой свойство суб- или супердиффузии определяется способом перепараметризации фазового пространства.

1. Континуальная параметризация фазового пространства

Для простоты изложения ограничимся построением параметризации фазового пространства в виде канторова множества в целом на вещественной прямой. Напомним, что множество Кантора S_q определяется двумя преобразованиями

подобия $T_0(x) = \frac{1}{q}x$ и $T_1(x) = \frac{1}{q}x + \frac{q-1}{q}$, такими что S_q является неподвижной

точкой оператора Хатчинсона H , сопоставляющего каждому непустому компактному множеству A непустое компактное множество $H(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$, т. е. $S_q = T_0(S_q) \cup T_1(S_q)$ (см. [6]). Следующее объединение

$$K_q = \bigcup_{k=0}^{\infty} q^k S_q \quad (1)$$

назовем *множеством Кантора в целом*. Отметим, что диаметр множества K_q равен ∞ и размерность Хаусдорфа K_q и S_q совпадают.

Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d = \ln 2 / \ln q$ (см., например, [6]). Множество S_3 – классическое канторово множество, множество S_2 совпадает с отрезком $[0,1]$. В дальнейшем за буквой d закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества S_q .

Каждому множеству S_q , $2 < q < \infty$, соответствует непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция C_q , называемая канторовой лестницей. Обозначим единичный отрезок $[0,1]$ через I . На интервале $I \setminus T_0(I) \cup T_1(I)$ значение C_q равно $1/2$ и, далее, на интервалах: $T_{i_1} \dots T_{i_k}(I) \setminus (T_{i_1} \dots T_{i_k} T_0(I) \cup T_{i_1} \dots T_{i_k} T_1(I))$ значение C_q равно $\left(1 + \sum_{i=1}^k 2^i i_{k-i+1}\right) / 2^{k+1}$.

2. Построение счетно-аддитивной хаусдорфовой меры на метрическом пространстве

Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ .

Определение 1. Пусть μ – внешняя мера на X . Множество A хорошо разбивает множество B , если $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Множество A называется μ -измеримым, если оно хорошо разбивает любое множество $B \subseteq X$.

Доказательства следующих трех теорем можно найти например в [7].

Теорема 1. Класс всех μ -измеримых множеств является σ -алгеброй и сужение μ на эту σ -алгебру является мерой.

Итак, если μ^d – мера Хаусдорфа, то искомой σ -алгеброй F , такой что сужение μ^d на F является мерой, может служить класс всех μ^d -измеримых множеств. В следующем утверждении устанавливается, что класс всех μ^d -измеримых множеств содержит борелевскую σ -алгебру.

Теорема 2. Пусть μ – внешняя мера на X , обладающая таким свойством: для любых $A, B \subseteq X$ с $\text{dist}(A, B) > 0$ верно, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Тогда все борелевские множества μ -измеримы.

Борелевскую σ -алгебру множеств в X будем обозначать через B . В силу теорем 1, 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Сужение хаусдорфовой меры μ^d на B является борелевской мерой.

Определим хаусдорфову размерность, для этого сформулируем теорему 3.

Теорема 3. Для любого множества A существует такое $d_0 \in [0, +\infty]$, что $\mu^d(A) = 0$ при всех $d > d_0$ и $\mu^d(A) = +\infty$ при всех $d < d_0$.

Число d_0 , определенное в предыдущей теореме, называется хаусдорфовой размерностью A . Хаусдорфову размерность множества A мы будем обозначать через $\dim(A)$. Для дальнейших построений нам понадобится следствие 1 и теорема 3.

3. Связь суб- и супердиффузии при перепараметризации фазового пространства

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $S_0 = 0$, где независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины, т.е. $P(\xi_1 = -1) = P(\xi_1 = 1) = 1/2$. Определим преобразование $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив $S(x) = -x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Соответственно объединение $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup S(\mathbb{R})$ представляет собой множество точек числовой прямой. Итак, мы имеем метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$, где $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Положим $E'_0 = K_q \cup S(K_q)$, где по-прежнему K_q – множество Кантора в целом (см. (1)). Случайное блуждание S_n , $n = 0, 1, \dots$, индуцирует случайное блуждание $C_q^{-1}(S_n)$ на E'_0 . Аналогом целочисленной решетки на E'_0 является множество $\{C_q^{-1}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Вероятность попасть из точки $C_q^{-1}(n)$ в точки $C_q^{-1}(n \pm 1)$ равна $1/2$, при этом «длины» скачков равны $\mu^d(C_q^{-1}([n, n \pm 1])) = 1$, где $d = \dim(E'_0)$ (заметим, что $\mu^d(S_q) = 1$).

Зададим псевдометрику $\rho_0(0, x) = \mu^d(C_q^{-1}([0, x]))$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

В метрике ρ средний квадрат расстояния от $C_q^{-1}(S_n)$ до 0 ведет себя как $n^{1/d}$ при $n \rightarrow \infty$. В псевдометрике ρ_0 пространства $(\mathbb{R}, \rho_0)$ средний квадрат расстояния от S_n до 0 ведет себя как n^d при $n \rightarrow \infty$.

Сформулируем приведенные выше результаты в виде следующих теорем.

Теорема 4. Пусть $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ – независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины, тогда выполняются следующие неравенства

$$d_1 n^d \leq E(\rho_0(S_n, 0))^2 \leq d_2 n^d,$$

где d_1 и d_2 – положительные константы, зависящие от распределения ξ_1 .

Теорема 5. Пусть $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ – независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины. Тогда выполняются следующие неравенства

$$d_1 n^{1/d} \leq E(\rho(C_q^{-1}(S_n), 0))^2 \leq d_2 n^{1/d},$$

где d_1 и d_2 – положительные константы, зависящие от распределения ξ_1 .

Выводы

Подведем итог полученным результатам.

1. Теорема 4 показывает, что винеровский процесс на евклидовой прямой с точки зрения наблюдателя, находящегося на канторовом подмножестве этой прямой, является процессом субдиффузии.

2. Теорема 5 показывает, что винеровский процесс на канторовом подмножестве, параметризованном сплошным континуумом, с точки зрения наблюдателя, находящегося на этой прямой, является процессом супердиффузии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика: пер. с англ. – М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 472 с.
2. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847–876. – doi: 10.3367/UFNr.0173.200308c.0847.
3. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. – 2000. – Vol. 11, iss. 2. – P. 69–80. – doi: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
4. Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852. – doi: 10.3367/UFNr.0174.200408a.0809.
5. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1216–1236.
6. Hutchinson J. Fractals and self similarity // Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – Vol. 30, N 5. – P. 713–747.
7. Edgar G. Measure, topology, and fractal geometry. – New York: Springer, 2008. – 268 p.

ON CONDITIONS OF FORMING PROCESSES OF SUB- AND SUPERDIFFUSION ON SETS WITH SELF-SIMILAR STRUCTURES

Seleznev V.A., Arkashov N.S.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

We obtain conditions for the formation of mathematical models of sub- and superdiffusion in the case where the phase space parameterized by a self-similar process continuum invariant under iterated function systems. Simulation of anomalous transport processes in the form of sub- and superdiffusion in a known foreign and domestic literature is reflected in the form of search models generalizing Wiener process. An example of such a process is known fractional Brownian motion, which in some papers formally considered as a process of sub- or superdiffusion depending on the value of Hirst-parameter and for which has not yet been found physical implementations. We have proposed a method for simulating the sub- and super diffusion realizing random walk process of a particle associated with the selection of observation systems Wiener process. This allows simulating the parallel phase space when the physical process not covered by the format of a phenomenological model. Formulation of this problem can be found, for example, in [1]. The key point of modeling the process of sub- and superdiffusion on binary rational lattice is a construction countably additive Hausdorff measure on this lattice in the closure of which lies the phase space of the process, parameterized by continuum.

Keywords: self-similar sets, anomalous transport, subdiffusion, superdiffusion, Hausdorff measure.

REFERENCES

1. Zaslavsky G.M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford, Oxford University Press, 2008. 448 p. (Russ. ed.: *Zaslavskii G.M. Gamiltonov khaos i fraktal'naya dinamika*. Moscow, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 472 p.).
2. Uchaikin V.V. Avtomodel'naya anomal'naya diffuziya i ustoichivye zakony [Self-similar anomalous diffusion and Lévy-stable laws]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821–849. doi:10.1070/PU2003v046n08ABEH001324
3. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 2000, vol. 11, iss. 2, pp. 69–80. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3
4. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fraktal'naya topologiya i strannaya kinetika: ot teorii perkolyatsii k problemam kosmicheskoi elektrodinamiki [Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 47, no. 8, pp. 749–788. doi: 10.1070/PU2004v047n08ABEH001705
5. Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modeli sluchainogo bluzhdaniya na mnozhestvakh s samopodobnoi strukturoi [On a random walk model on sets with self-similar structure]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 968–983. doi: 10.1134/S0037446613060025. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 54, no. 6, pp. 1216–1236.
6. Hutchinson J. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747.
7. Edgar G. Measure, topology, and fractal geometry. New York, Springer, 2008. 268 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Аркашов Николай Сергеевич – родился в 1978 году, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики НГТУ. Область научных интересов: функциональные предельные теоремы теории вероятностей. Опубликовано более 10 работ. (Адрес: 630060, Россия, Новосибирск, Экваторная 18–57, e-mail: nicky1978@mail.ru).

Arkashov Nikolay Sergeevich (born in 1978) – PhD (Phys.& Math.), associate professor, department of higher mathematics, NSTU. His research interests

include functional limit theorems in the probability theory. He is author of more than 10 papers. (Address: 18–57 Ekvatornaya Street, Novosibirsk, 630060, Russia. e-mail: nicky1978@mail.ru).



Селезнев Вадим Александрович – родился в 1946 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики НГТУ. Область научных интересов: методы геометрической теории функций в задачах математической физики. Опубликовано более 50 работ. (Адрес: 630005, Россия, Новосибирск, Крылова 41–56, e-mail: selvad@ngs.ru).

Seleznev Vadim Alexandrovich (born 1946) – D.Sc. (Phys.& Math.), professor, head, department of higher mathematics, NSTU. His research interests are focused on methods of the geometric function theory in mathematical physics. He is author of more than 50 papers. (Address: 41–56 Krylov Street, Novosibirsk, 630005, Russia. E-mail: selvad@ngs.ru).

*Статья поступила 07 ноября 2014 г.
Received November 07, 2014*

To Reference:

Seleznev V.A., Arkashov N.S. Ob usloviyakh formirovaniya protsessov sub- i superdiffuzii na samopodobnykh mnozhestvakh [On conditions of forming processes of sub- and superdiffusion on sets with self-similar structures]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 4, pp. 33–38.