ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2014 октябрь–декабрь № 4 (25)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.85

НЕЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОБЛАСТЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ МАСШТАБАМИ

М.А. Боронина[1], В.А. Вшивков[1,2], Г.И. Дудникова[3]
[1]*ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, Россия*
[3]*Мэрилендский университет, Колледж Парк, США*

В работе предложена новая неявная конечно-разностная схема для решения уравнений Максвелла в трехмерном случае с учетом различных масштабов области по различным направлениям с целью повысить ее устойчивость. За основу взята известная схема с перешагиванием для расчета электромагнитных полей, обладающая условной устойчивостью. Новая схема удовлетворяет уравнениям законам Гаусса для электрического и магнитного полей в разностном виде. Исследованы порядок аппроксимации, устойчивость схемы в одномерном и трехмерном случаях. Схема сохраняет амплитуду волны и несущественно изменяет скорость ее распространения в зависимости от углов по отношению к осям координат.

Ключевые слова: физика плазмы, метод частиц-в-ячейках, уравнения Максвелла, неявная схема.

DOI: 10.17212/1727-2769-2014-4-39-46

Введение

Работа направлена на исследование неявной схемы для задач физики электромагнитных полей с целью увеличить устойчивость алгоритма. В частности, рассматривается задача динамики встречных пучков заряженных частиц в современных ускорителях. Для решения задачи применяется метод частиц-в-ячейках. Требование к устойчивости метода имеет вид $v\tau/h < 1$, где τ – временной шаг, $h = \min\{h_x, h_y, h_z\}$, – шаги по пространственным переменным, v – скорость пучка. Вследствие того, что размеры пучков в разных направлениях отличаются в сотни раз [1], временной шаг выбирается не из соображений точности, а из соображений устойчивости.

Таким образом, уменьшение сетки в поперечном направлении ведет не только к увеличению количества действий, связанных с количеством узлов сетки, но и к увеличению количества временных шагов программы. При этом интерес представляет изучение эффектов на расстоянии порядка дисперсии в поперечном направлении. Сама эта величина является небольшой, за счет фокусировки пучка (hour-glass эффект) его размеры в поперечном направлении сильно увеличиваются. Поэтому необходимо проводить исследования эффектов при больших размерах области на малых расстояниях от ее центра, т. е. брать достаточно много и мелких пространственных шагов в поперечном направлении. Использование параллельных алгоритмов с учетом балансировки нагрузки процессоров дает возможность проводить расчеты лишь с небольшим отношением поперечных размеров (1:50) [2].

Построение и исследование неявной схемы

Динамика заряженных частиц описывается кинетическим уравнением Власова для функции распределения каждого сорта частиц и уравнений Максвелла:

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00392.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\left(n_{e^-}e^- + n_{e^+}e^+\right);$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Для решения этих уравнений используется метод частиц с применением схемы с перешагиванием [3], в которой все производные, участвующие в уравнениях, записываются через центральные разности, что обеспечивает при использовании этой схемы второй порядок по времени и по пространству. В частности, уравнения Максвелла аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{\vec{H}^{m+\frac{1}{2}} - \vec{H}^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} = -\operatorname{rot}_h\vec{E}^m$$

$$\frac{\vec{E}^{m+1} - \vec{E}^m}{\tau} = \vec{j}^{m+\frac{1}{2}} + \operatorname{rot}_h\vec{H}^{m+\frac{1}{2}},$$

где

$$\operatorname{rot}_h\vec{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{Hz_{i,k,l-\frac{1}{2}} - Hz_{i,k-1,l-\frac{1}{2}}}{h_y} - \dfrac{Hy_{i,k-\frac{1}{2},l} - Hy_{i,k-\frac{1}{2},l-1}}{h_z} \\[2ex] \dfrac{Hx_{i-\frac{1}{2},k,l} - Hx_{i-\frac{1}{2},k,l-1}}{h_z} - \dfrac{Hz_{i,k,l-\frac{1}{2}} - Hz_{i-1,k,l-\frac{1}{2}}}{h_x} \\[2ex] \dfrac{Hy_{i,k-\frac{1}{2},l} - Hy_{i-1,k-\frac{1}{2},l}}{h_x} - \dfrac{Hx_{i-\frac{1}{2},k,l} - Hx_{i-\frac{1}{2},k-1,l}}{h_y} \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rot}_h\vec{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{Ez_{i-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l} - Ez_{i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2},l}}{h_y} - \dfrac{Ey_{i-\frac{1}{2},k,l+\frac{1}{2}} - Ey_{i-\frac{1}{2},k,l-\frac{1}{2}}}{h_z} \\[2ex] \dfrac{Ex_{i,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - Ex_{i,k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{h_z} - \dfrac{Ez_{i+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2},l} - Ez_{i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2},l}}{h_x} \\[2ex] \dfrac{Ey_{i+\frac{1}{2},k,l-\frac{1}{2}} - Ey_{i-\frac{1}{2},k,l-\frac{1}{2}}}{h_x} - \dfrac{Ex_{i,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} - Ex_{i,k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{h_y} \end{bmatrix}.$$

Для исследования трехмерной схемы рассмотрим схему для x-компоненты электрического поля:

$$\frac{EX^{m+1}_{i,l-1/2,k-1/2}-EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}}{\tau}=\frac{HZ^{m+1/2}_{i,l,k-1/2}-HZ^{m+1/2}_{i,l-1,k-1/2}}{h_y}-$$

$$-\frac{HY^{m+1/2}_{i,l-1/2,k}-HY^{m+1/2}_{i,l-1/2,k-1}}{h_z}.$$

Вычитая из этого схему на предыдущем шаге, исключим компоненты магнитного поля. Получим схему

$$\frac{EX^{m+1}_{i,l-1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m-1}_{i,l-1/2,k-1/2}}{\tau^2}=$$

$$=\frac{EX^{m}_{i+1,l-1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i-1,l-1/2,k-1/2}}{h_x^2}+$$

$$+\frac{EX^{m}_{i,l+1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i,l-3/2,k-1/2}}{h_y^2}+$$

$$+\frac{EX^{m}_{i,l-1/2,k+1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i,l-1/2,k-3/2}}{h_z^2}.$$

Обозначим разностные операторы вторых производных формулами:

$$\Delta_{xx}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}=\frac{EX^{m}_{i+1,l-1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i-1,l-1/2,k-1/2}}{h_x^2};$$

$$\Delta_{yy}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}=\frac{EX^{m}_{i,l+1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i,l-3/2,k-1/2}}{h_y^2};$$

$$\Delta_{zz}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}=\frac{EX^{m}_{i,l-1/2,k+1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m}_{i,l-1/2,k-3/2}}{h_z^2}.$$

В этих обозначениях схема запишется более компактно:

$$\frac{EX^{m+1}_{i,l-1/2,k-1/2}-2EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+EX^{m-1}_{i,l-1/2,k-1/2}}{\tau^2}=$$

$$=\Delta_{xx}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+\Delta_{yy}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}+\Delta_{zz}EX^{m}_{i,l-1/2,k-1/2}$$

Исследуем свойства этой схемы в одномерном случае. Схема имеет вид

$$\frac{y_i^{m+1}-2y_i^{m}+y_i^{m-1}}{\tau^2}=\Delta_{xx}y_i^{m}$$

Сначала исследуем устойчивость схемы. Подставляем в нее решение вида

$$y_i^m = \lambda^m \exp\left(\bar{i}\,\alpha i\right).$$

Получим

$$\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tau^2}{h^2}\left(e^{\bar{i}\alpha} - 2 + e^{-\bar{i}\alpha}\right),$$

при этом корни уравнения равны

$$\lambda = 1 - 2\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \pm 2\frac{\tau}{h}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Из вида уравнения следует:

а) если корни действительные и разные, то их произведение равно 1. Следовательно, один из корней по модулю будет больше 1, и схема будет неустойчивой;

б) если корни комплексные, то они равны по модулю, и этот модуль равен 1, т.е. схема устойчива. Кроме того, все волны распространяются без затухания.

Таким образом, для устойчивости схемы необходимо, чтобы подкоренное выражение было отрицательным, что и дает условие устойчивости.

$$\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{\tau^2}{h^2} \le 1.$$

Для исследования скорости распространения волн выпишем дисперсионное уравнение. Для этого в схему подставим решение вида

$$y_j^m = A\exp\left[-\bar{i}\left(\omega t^m - kx_j\right)\right] = A\exp\left[-\bar{i}\left(\omega m\tau - kjh\right)\right].$$

Получим уравнение

$$\sin\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\tau}{h}\sin\frac{kh}{2},$$

из которого найдем ω.

$$\omega = \frac{2}{\tau}\arcsin\left(\frac{\tau}{h}\sin\frac{kh}{2}\right).$$

Разлагая тригонометрические функции в ряд Тейлора, считая τ и h малыми, получим в первом приближении

$$u = \frac{\omega}{k} = 1 + \frac{k^2}{24}\left(\tau^2 - h^2\right) + O\left(h^3, \tau^3, h\tau^2, \tau h^2\right).$$

Отсюда следует, что при выполнении критерия устойчивости скорость волны будет меньше скорости света и тем меньше, чем больше волновое число.

Теперь рассмотрим неявную схему. Чтобы сохранить второй порядок аппроксимации по времени, схема должна быть симметричной по времени.

$$\frac{y_i^{m+1} - 2y_i^m + y_i^{m-1}}{\tau^2} = \delta\Delta_{xx}y_i^{m+1} + (1-2\delta)\Delta_{xx}y_i^m + \delta\Delta_{xx}y_i^{m-1}.$$

Здесь $0 \le \delta \le 0{,}5$. При $\delta = 0$ получим явную схему. Для исследования устойчивости снова подставим в схему решение $y_i^m = \lambda^m \exp\left(\bar{i}\,\alpha i\right)$. Получим квадратное уравнение

$$\left(1+4\delta A\right)\lambda^2 - 2\left[1-2\left(1-2\delta\right)A\right]\lambda + 1 + 4\delta A = 0,$$

где $A = \dfrac{\tau^2}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \ge 0$. Как и в предыдущем случае, если корни действительны, то схема неустойчива, а при комплексных корнях их модуль равен 1, т.е. схема устойчива. Таким образом, условием устойчивости является отрицательное значение подкоренного выражения $\left(1-2(1-2\delta)A\right)^2 - (1+4\delta A) \le 0$ или $\delta \ge \dfrac{1}{4}$. При найденном значении δ схема является абсолютно устойчивой. Обращаем внимание на тот факт, что и в неявной схеме амплитуды волн не затухают.

Аналогично предыдущему случаю найдем, как изменится скорость распространения волн. В данном случае

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2\left(\frac{h^2-\tau^2}{24} - \frac{\delta\tau^2}{2}\right) + O\left(h^3,\tau^3\right) = 1 - \frac{k^2}{24}\left(h^2 - (12\delta+1)\tau^2\right) + O\left(h^3,\tau^3\right).$$

При $\delta = 0$ получим ранее найденную формулу. Видим, что скорость волн меньше скорости света и зависит от волнового числа k.

Для обычной явной схемы в трехмерном случае условие устойчивости имеет вид

$$\frac{\tau^2}{h_x^2} + \frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2} \le 1.$$

Рассмотрим схему, неявную в направлении x.

$$\frac{EX_{i,l,k}^{m+1} - 2EX_{i,l,k}^{m} + EX_{i,l,k}^{m-1}}{\tau^2} =$$

$$= \delta\Delta_{xx}EX_{i,l,k}^{m+1} + \left(1-2\delta\right)\Delta_{xx}EX_{i,l,k}^{m} + \delta\Delta_{xx}EX_{i,l,k}^{m-1} +$$

$$+\Delta_{yy}EX_{i,l,k}^{m} + \Delta_{zz}EX_{i,l,k}^{m}.$$

Для анализа устойчивости подставим в схему функцию

$$EX_{i,l,k}^{m} = \lambda^m \exp\left[\bar{i}\left(\alpha i + \beta l + \gamma k\right)\right].$$

Ситуация получается такая же, как и в одномерном случае. При $\delta \ge \dfrac{1}{4}$ условие устойчивости примет вид

$$\frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2} \le 1,$$

т. е. зависимость устойчивости от пространственного шага в направлении x исчезла.

В данном рассмотрении анализ велся для функции *EX*. Такой же анализ можно провести для любой компоненты поля. В конечном итоге при $\delta = \frac{1}{4}$ схема имеет вид (нижние индексы опущены):

$$\frac{HX^{m+1/2} - HX^{m-1/2}}{\tau} = \Delta_z EY^m - \Delta_y EZ^m$$

$$\frac{HY^{m+1/2} - 2HY^{m-1/2} + HY^{m-3/2}}{\tau^2} = \frac{1}{4}\Delta_{xx} HY^{m+1/2} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta_{xx} HY^{m-1/2} + \frac{1}{4}\Delta_{xx} HY^{m-3/2} + \Delta_{yy} HY^{m-1/2} + \Delta_{zz} HY^{m-1/2}$$

$$\frac{HZ^{m+1/2} - 2HZ^{m-1/2} + HZ^{m-3/2}}{\tau^2} = \frac{1}{4}\Delta_{xx} HZ^{m+1/2} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta_{xx} HZ^{m-1/2} + \frac{1}{4}\Delta_{xx} HZ^{m-3/2} + \Delta_{yy} HZ^{m-1/2} + \Delta_{zz} HZ^{m-1/2}$$

$$\frac{EX^{m+1} - EX^m}{\tau} = \Delta_y HZ^{m+1/2} - \Delta_z HY^{m+1/2}$$

$$\frac{EY^{m+1} - EY^m}{\tau} = \Delta_z HX^{m+1/2} - \Delta_x HZ^{m+1/2}$$

$$\frac{EZ^{m+1} - EZ^m}{\tau} = \Delta_x HY^{m+1/2} - \Delta_y HX^{m+1/2}.$$

При этом выполняется разностный аналог формул $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ в следующей форме:

$$\frac{1}{4}\Delta_x\left(HX^{m+1/2} + 2HX^{m-1/2} + HX^{m-3/2}\right) + \Delta_y HY^{m-1/2} + \Delta_z HZ^{m-1/2} = 0,$$

а $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ – в обычном виде:

$$\Delta_x EX^m + \Delta_y EY^m + \Delta_z EZ^m = 4\pi\rho^m.$$

Для исследования распространения волн в различных направлениях рассмотрим решение в следующем виде:

$$y_{ijl}^m = A\exp\left[-\bar{i}\left(\omega t^m - k_x x_i - k_y y_j - k_z y_l\right)\right].$$

Дисперсионное соотношение в этом случае выглядит следующим образом:

$$\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{k_x h_x}{2}\right)}{h_x^2} + \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{k_y h_y}{2}\right)}{h_y^2} + \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{k_z h_z}{2}\right)}{h_z^2}}{\dfrac{1}{\tau^2} - 4\delta\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{k_x h_x}{2}\right)}{h_x^2}}.$$

Выражая отсюда ω и проводя аналогичные выкладки, получаем, что

$$\frac{\omega}{k} = 1 - \frac{k^2}{24}\left(a^4 h_x^2 + b^4 h_y^2 + c^4 h_z^2 - (1+12\delta)\tau^2\right) + O\left(h^3, \tau^3, h\tau^2, \tau h^2\right),$$

где a, b, c – соответствующие косинусы углов между направлением распространения волны и осями координат.

Из данной формулы видно, что обе схемы ($\delta = 0$ и $\delta = 1/4$) являются неинвариантными относительно угла α, а различие между двумя этими схемами составляет коэффициент $\delta/2 = 1/8$ при τ^2.

Заключение

Получена новая неявная конечно-разностная схема, не уступающая по качеству стандартной схеме с перешагиванием и позволяющая проводить расчеты электрофизических величин из уравнений Максвелла для областей с различными масштабами по пространству. Предложенная схема сохраняет амплитуду распространяющихся волн и сохраняет скорость распространения волн со вторым порядком точности по времени и по пространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zholents A.A.** Beam-beam effects in electron-positron storage rings // Lecture Notes in Physics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. – Vol. 400. – P. 321–362. – doi: 10.1007/3-540-55250-2_35.
2. **Вшивков В.А., Боронина М.А.** Трехмерное моделирование динамики ультрарелятивистских пучков заряженных частиц: особенности вычисления начальных и граничных условий // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 2. – С. 67–83.
3. Алгоритм для трехмерного моделирования ультрарелятивистских пучков / М.А. Боронина, В.А. Вшивков, Е.Б. Левичев, С.А. Никитин, В.Н. Снытников // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8, № 2. – С. 352–359.
4. **Boronina M.A., Korneev V.D., Vshivkov V.A.** Parallel three-dimensional PIC code for beam-beam simulation in linear colliders [Electronic resource] // Proceedings of the 5th International Particle Accelerator Conference IPAC 2014, June 15–24, 2014. – Dresden, Germany, 2014. – P. 439–441. – URL: http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2014/papers/mopme027.pdf (accessed: 08.12.2014).

THE IMPLICIT SCHEME FOR MAXWELL EQUATIONS SOLUTION IN DOMAINS WITH DIFFERENT SCALES

Boronina M.A.[1], Vshivkov V.A.[1], Dudnikova G.I.[2]
[1]*ICM&MG SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[2]*University of Maryland, College Park, USA*

In the paper we present a new implicit finite-difference scheme for Maxwell's equations sulition in three dimensional cases with different scales in different directions. The scheme is based on well-known leap-frog scheme for electromagnetic fields computation with conditional stability. The new scheme has better stability and satisfies the Gauss law for the electric and magnetic fields in the final-differences. The order of approximation and the stability of the scheme in one-dimensional and three-dimensional cases are analyzed. The scheme maintains the amplitude of the wave and insignificantly changes the non-invariance of its propagation depending on the angle with the coordinate axes.

Keywords: plasma physics, particle in cell method, Maxwell equations, implicit scheme.

REFERENCES

1. Zholents A.A. Beam-beam effects in electron-positron storage rings. *Lecture Notes in Physics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1992, vol. 400, pp. 321–362. doi: 10.1007/3-540-55250-2_35
2. Vshivkov V.A., Boronina M.A. Trekhmernoe modelirovanie dinamiki ul'trarelya-tivistskikh puchkov zaryazhennykh chastits: osobennosti vychisleniya nachal'nykh i granichnykh uslovii [Three-dimensional simulation of ultrarelativistic charged beams dynamics: study of initial and boundary conditions]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical modeling*, 2012, vol. 24, no. 2, pp. 67–83.
3. Boronina M.A., Vshivkov V.A., Levichev E.B., Nikitin S.A., Snytnikov V.N. Algoritm dlya trekhmernogo modelirovaniya ul'trarelyativistskikh puchkov [An algorithm for the three-dimensional modeling of ultrarelativistic beams]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie – Numerical Methods and Programming,* 2007, vol. 8, no. 2, pp. 352–359.
4. Boronina M.A., Korneev V.D., Vshivkov V.A. Parallel three-dimensional PIC code for beam-beam simulation in linear colliders. Proceedings of the 5th International Particle Accelerator Conference IPAC 2014, Dresden, Germany, June 15–24, 2014, pp. 439–441. Available at: http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2014/papers/mopme027.pdf (accessed 08.12.2014)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Boronina Marina Andreevna – родилась в 1983 году, канд. физ.-мат. наук, лаб. ПАРБЗ, ИВМиМГ СО РАН. Область научных интересов: математическое моделирование. Опубликовано 30 научных работ. (Адрес: 630058, Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6. Email: boronina@ssd.sscc.ru).

Boronina Marina Andreevna (b. 1983) – PhD, junior researcher, PARBZ laboratory, ICM&MG SB RAS. Her research interests are currently focused on mathematical modeling. She is author of 30 scientific papers. (Address: 6, prospect Lavrentieva, Novosibirsk, 630058, Russia. Email: boronina@ssd.sscc.ru).

Вшивков Виталий Андреевич – родился в 1947 году, профессор, д-р физ.-мат наук, зав. лаб., лаб. ПАРБЗ, ИВМиМГ СО РАН. Область научных интересов: математическое моделирование. Опубликовано более 200 научных работ. (Адрес: 630058, Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6. Email: vsh@ssd.sscc.ru).

Vshivkov Vitaly Andreevich (b. 1947) – doctor, professor, head of laboratory, PARBZ laboratory, ICM&MG SB RAS. His research interests are currently focused on mathematical modeling. He is author of 200 scientific papers. (Address: Email: vsh@ssd.sscc.ru).

Дудникова Галина Ильинична – родилась в 1944 году, д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Физический факультет, Мэрилэндский университет. Область научных интересов: физика плазмы. Опубликовано 200 научных работ. (Адрес: Колледж-Парк, США. Email: gdudnikova@gmail.com).

Dudnikova Galina Ilyinicna (b. 1944) – doctor of Science, senior research scientist, Department of Physics, University of Maryland. Her research interests are currently focused on plasma physics. She is author of 200 scientific papers. (Address: College Park, USA. Email: gdudnikova@gmail.com).

Статья поступила 10 декабря 2014 г.
Received December 10, 2014

To Reference:

Boronina M.A., Vshivkov V.A., Dudnikova G.I. Neyavnaya skhema dlya resheniya uravnenii Maksvella v oblastyakh s razlichnymi masshtabami [An implicit scheme for maxwell equations solution in domains with different scales]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 4, pp. 39–46.