ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2015 апрель–июнь № 2 (27)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 530.182; 517.957

РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 2+1-МЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ САВАДЫ–КОТЕРА

В.Г. Дубровский, А.В. Топовский, М.Ю. Басалаев
Новосибирский государственный технический университет

В 1967 году был открыт метод точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений – метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Ключевой идеей МОЗР является сопоставление интегрируемому нелинейному уравнению линейных вспомогательных задач, интегрируемое нелинейное уравнение при этом представляется как условие совместности соответствующих линейных вспомогательных задач. Первоначально МОЗР был применен к интегрированию одномерных нелинейных эволюционных уравнений с временной и одной пространственной переменными. Сфера применимости МОЗР стремительно расширилась, помимо одномерных интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений оказались интегрируемыми и некоторые двумерные нелинейные эволюционные дифференциальные уравнения с временной и двумя пространственными переменными, такие как уравнение Кадомцева-Петвиашвили, уравнение Дэви–Стюардсона, уравнения Нижника–Веселова–Новикова и т. д. В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта, $\bar{\partial}$-проблема и более общий метод $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова, использующие современные методы теории функции комплексного переменного, являются основными инструментами для построения точных решений (2+1)-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений. В данной работе метод $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова применен к построению новых классов точных решений двумерного интегририруемого обобщения нелинейного уравнения Савады–Котера (2DСК). Уравнение 2DСК является специальной редукцией более общей системы нелинейных уравнений для некоторых полевых переменных. Показано, как эта редукция может быть выполнена с помощью удовлетворения нелинейных ограничений на коэффициенты разложения волновой функции χ линейных вспомогательных задач. Получены новые классы точных решений с функциональными параметрами уравнения 2DСК, содержащие в виде подклассов солитонные и периодические решения. На примере уравнения 2DСК продемонстрирована принципиальная возможность построения точных периодических решений двумерных нелинейных уравнений в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова.

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные уравнения, метод $\bar{\partial}$-одевания, двумерное интегрируемое обобщение уравнения Савады–Котера (2DСК), решения с функциональными параметрами, периодические решения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-2-7-23

Введение

За последние тридцать пять лет метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был обобщен и успешно применен к различным 2+1-мерным нелинейным эволюционным уравнениям, таким как уравнения Кадомцева–Петвиашвили, Дэви–Стюардсона, Нижника–Веселова–Новикова (НВН), система Захарова–Манакова, уравнение Ишимори, двумерное обобщение уравнения Синус–Гордон и к некоторым другим уравнениям (см. книги [6–9] и обзоры [15–17]). В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [10], $\bar{\partial}$-проблема [11] и более общий метод

$\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова [12–14] являются основными инструментами для построения точных решений 2+1-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

В данной статье, представляющей результаты второй части нашей работы, метод $\bar{\partial}$-одевания применяется к построению новых классов точных решений с функциональными параметрами и их частных подклассов, солитонных и периодических решений двумерного интегрируемого обобщения уравнения Савады–Котера (2DСК) [18],

$$u_t + u_{xxxxx} + 5u_x u_{xx} + 5uu_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} -$$
$$-5\partial_x^{-1} u_{yy} + 5uu_y + 5u_x \partial_x^{-1} u_y = 0. \quad (1)$$

Уравнение 2DСК было установлено в статье Конопельченко и Дубровского [18]. Это уравнение известно также как член ВКР иерархии [19]. Уравнение 2DСК может быть представлено как условие совместности в форме Лакса $[L_1, L_2] = 0$ линейных операторов вспомогательных задач, ему соответствуют следующие две линейные вспомогательные задачи [18]:

$$\begin{aligned} &L_1\psi = (\partial_x^3 + u\partial_x + \partial_y)\psi = 0, \\ &L_2\psi = [\partial_t - 9\partial_x^5 - 15u\partial_x^3 - 15u_x\partial_x^2 - (10u_{xx} + 5u^2 - 5\partial_x^{-1}u_y)\partial_x]\psi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и ниже $\partial_x \equiv \partial / \partial x, \ldots$ и ∂_x^{-1} – оператор обратный ∂_x.

Первая вспомогательная задача в (2) является линейным дифференциальным уравнением третьего порядка по ∂_x, содержащим лишь одну полевую переменную. В общем же положении эта задача содержат несколько переменных коэффициентов (полевых переменных) при различных степенях ∂_x. Уравнение 2DСК (1) возникает из некоторой системы нелинейных уравнений для полевых переменных при специальных редукциях на эти переменные. Удовлетворение этих редукций является наиболее трудной частью при построении точных решений рассматриваемого уравнения.

Схема построения точных решений с функциональными параметрами для 2+1-мерных интегрируемых уравнений была развита в известных работах Захарова и Шабата [2], [20] (см. также книгу [5]); где авторы применили свой вариант метода одевания для построения решений с функциональными параметрами уравнения КП.

Настоящая работа является естественным продолжением статей [21] и [24], в [21] метод $\bar{\partial}$-одевания был впервые применен для построения многосолитонных решений, а в [24] были анонсированы первые результаты по решениям с функциональными параметрами уравнений 2DКК (двумерного интегрируемого обобщения уравнения Каупа Купершмидта) и 2DСК (1), здесь же приводятся достаточно подробные вычисления для случая уравнения 2DСК (1). Частные точные решения рассматриваемого уравнения были построены ранее и в рамках других подходов (см., например, [13]). Применение метода $\bar{\partial}$-одевания в нестандартных ситуациях, когда приходится удовлетворять редукциям на полевые переменные, а в конечном счете определенным нелинейным дифференциальным ограничениям (см. [21] и ниже) на коэффициенты разложения волновой функции по спектральному параметру, по нашему мнению, представляет значительный интерес для развития данного метода.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе приводятся для удобства основные формулы метода $\bar{\partial}$-одевания для уравнения 2DCK (1). В третьем разделе представлены новые классы точных решений с функциональными параметрами, вычисленные в данной работе для уравнения 2DCK (1). В разделе 4 рассмотрены частные случаи построенных решений с функциональными параметрами – периодические решения уравнения 2DCK (1).

1. Основные формулы метода $\bar{\partial}$-одевания для уравнений 2DCK

В этом разделе приведены некоторые важные для дальнейшего изложения формулы метода $\bar{\partial}$-одевания для уравнения 2DCK (1) (см. детали в [21]), отметим, что формулы (3)–(10), приведенные ниже, справедливы и для уравнения 2DKK (см. [21]).

Сначала постулируется нелокальная $\bar{\partial}$-проблема [12–14] для волновой функции χ:

$$\frac{\partial\chi(\lambda,\bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda,\bar{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu,\bar{\mu})R(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})d\mu\wedge d\bar{\mu}, \tag{3}$$

где χ и R, в рассматриваемом случае, скалярные комплексные функции. Используется решение $\bar{\partial}$-проблемы с канонической нормировкой, $\chi\to 1$ при $\lambda\to\infty$, эквивалентное решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\chi(\lambda) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda'\wedge d\overline{\lambda'}}{2\pi i(\lambda'-\lambda)} \iint_C \chi(\mu,\bar{\mu})R(\mu,\bar{\mu};\lambda',\overline{\lambda'})d\mu\wedge d\bar{\mu}. \tag{4}$$

Зависимость ядра R $\bar{\partial}$-проблемы от пространственных и временных переменных x,y,t для уравнения 2DCK (1) имеет вид [21]:

$$\begin{gathered} R(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda};x,y,t) = R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}; \\ F(\lambda) := i(\lambda x + \lambda^3 y + 9\lambda^5 t). \end{gathered} \tag{5}$$

Далее рассматриваемому нелинейному уравнению сопоставляются линейные вспомогательные задачи, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1\psi &= (\partial_y + \partial_x^3 + u\partial_x + u_0)\psi = 0, \\ L_2\psi &= (\partial_t - 9\partial_x^5 + w_3\partial_x^3 + w_2\partial_x^2 + w_1\partial_x + w_0)\psi = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

а волновая функция ψ связана с волновой функцией χ соотношением $\psi := \chi e^{F(\lambda;x,y,t)}$ [21].

Формулы реконструкции выражают полевые переменные вспомогательных задач (6) через коэффициенты разложений волновой функции χ в ряды в окрестностях точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$:

$$\lambda = 0:\ \ \chi = \chi_0 + \chi_1\lambda + \chi_2\lambda^2 + \ldots;\quad \lambda = \infty:\ \ \chi = \chi_\infty + \frac{\chi_{-1}}{\lambda} + \frac{\chi_{-2}}{\lambda^2} + \ldots. \tag{7}$$

Так, например, для полевых переменных первой вспомогательной задачи формулы реконструкции имеют вид [21]

$$u_0 = -3i\chi_{-1xx} + 3\chi_{-2x} - 3\chi_{-1}\chi_{-1x}; \; u = -3i\chi_{-1x}, \tag{8}$$

где коэффициенты χ_{-1} и χ_{-2} разложений (7), даются выражениями

$$\chi_{-1} = -\iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu,\bar{\mu}) R(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}, \tag{9}$$

$$\chi_{-2} = -\iint_C \frac{\lambda d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu,\bar{\mu}) R(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \tag{10}$$

Как было показано в статье [18], уравнению 2DСК (1) соответствует редукция:

$$u_0 = 0. \tag{11}$$

(Отметим, что уравнению 2DКК соответствует редукция $u_0 = \frac{1}{2}u_x$, см. [21].)

В терминах волновой функции χ редукция (11) с учетом (8) может быть представлена как нелинейное дифференциальное соотношение на коэффициенты χ_{-1} и χ_{-2} [21]:

$$\chi_{-2x} - i\chi_{-1xx} - \chi_{-1}\chi_{-1x} = 0. \tag{12}$$

Формулы реконструкции для полевых переменных второй вспомогательной задачи из (6), с учетом (8) и редукции (11), для уравнения 2DСК (3) имеют вид [21]:

$$\begin{aligned} &w_1 = -10u_{xx} + 5\partial_x^{-1}u_y - 5u^2, \\ &w_2 = -15u_x, \quad w_3 = -15u, \quad w_0 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

При построении точных решений уравнения 2DСК (1) необходимо удовлетворить условиям редукций (11) или (12) и вещественности $u = \bar{u}$. Условие вещественности решений u рассматриваемого нелинейного уравнения, в силу (9) и (10), в пределе слабых полей приводит к следующим ограничениям на ядро R_0 $\bar{\partial}$-проблемы (4) [21]:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}; \quad R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(\bar{\lambda}, \lambda; \bar{\mu}, \mu)}. \tag{14}$$

Решениям с функциональными параметрами соответствуют вырожденные ядра R_0 $\bar{\partial}$-проблемы (3), т. е. ядра вида

$$R_0(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}) = \pi \sum_{n=1}^{N} f_n(\mu,\bar{\mu}) g_n(\lambda,\bar{\lambda}), \tag{15}$$

представляющие собой сумму произведений двух функций $f_n(\mu,\bar{\mu})$ и $g_n(\lambda,\bar{\lambda})$ спектральных переменных μ и λ. Эти функции называются функциональными параметрами в спектральном представлении.

При выборе вырожденного ядра в виде (15) из (9) и (10) получаются следующие компактные формулы для коэффициентов χ_{-1}, χ_{-2} разложения волновой функции χ:

$$\chi_{-1} = -\frac{1}{2i} \sum_{l,k=1}^{N} A_{kl}^{-1} \alpha_l \beta_k, \quad \chi_{-2} = -\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{N} A_{kl}^{-1} \alpha_l \beta_{kx}, \tag{16}$$

где матрица A дается выражением

$$A_{ln} \doteq \delta_{ln} + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\alpha_l\beta_n . \qquad (17)$$

Здесь функции $\alpha_l(x,y,t)$, $\beta_l(x,y,t)$, известные как функциональные параметры в координатном представлении, даются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_l(x,y,t) &\doteq \iint_C f_l(\mu,\overline{\mu})e^{F(\mu)}d\mu\wedge d\overline{\mu}; \\ \beta_l(x,y,t) &\doteq \iint_C g_l(\lambda,\overline{\lambda})e^{-F(\lambda)}d\lambda\wedge d\overline{\lambda}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Вследствие (5) и своих определений (18) функциональные параметры α_n и β_n для случая уравнения 2DCK (1) удовлетворяют линейным уравнениям:

$$\alpha_{ny} + \alpha_{nxxx} = 0, \quad \alpha_{nt} + \alpha_{nxxxxx} + 5\alpha_{nxxy} - 5\partial_x^{-1}\alpha_{nyy} = 0, \qquad (19)$$

$$\beta_{ny} + \beta_{nxxx} = 0, \quad \beta_{nt} + \beta_{nxxxxx} + 5\beta_{nxxy} - 5\partial_x^{-1}\beta_{nyy} = 0. \qquad (20)$$

Приведем полезные для дальнейшего детерминантные формулы для невырожденной матрицы A и вырожденной матрицы B с рангом единица:

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial x}A^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\ln(\det A), \ \mathrm{tr}(BA^{-1}) = \frac{\det(A+B)}{\det A} - 1, \ 1 + \mathrm{tr}\,B = \det(1+B)\,, \qquad (21)$$

очевидно, матрица BA^{-1} в (21), как и B, является вырожденной с рангом единица. С использованием первой формулы из (21) находим из (16) для χ_{-1} выражение:

$$\chi_{-1} = -\frac{1}{2i}\sum_{l,k=1}^{N} A_{kl}^{-1}\alpha_l\beta_k = i\sum_{n,l=1}^{N} A_{nl}^{-1}\frac{\partial A_{ln}}{\partial x} = i\cdot\mathrm{tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}\right) = i\partial_x(\ln\det A)\,. \qquad (22)$$

Далее из формулы реконструкции для u (8) и из (22) получаем общую детерминантную формулу для построения решений уравнения 2DCK с функциональными параметрами:

$$u(x,y,t) = 3\partial_x^2\ln\det A. \qquad (23)$$

Общая детерминантная формула (23) для точных решений очень проста. Основная проблема в конструировании точных решений уравнения 2DCK заключается в удовлетворении условий редукции (11), (12) и вещественности (14). Эта проблема решается в следующих разделах данной статьи при построении новых классов точных решений рассматриваемого уравнения.

2. Решения с функциональными параметрами уравнения 2DCK

В этом разделе строится новый класс решений с функциональными параметрами уравнения 2DCK (1). В качестве частного случая указанного класса будут рассмотрены солитонные решения уравнения 2DCK, часть из которых была построена ранее в работе [21].

Уравнению 2DCK соответствует условие редукции (12), отличное от условия редукции для уравнения 2DKK. Представим данное условие редукции в детерминантной форме, более удобной для дальнейших вычислений. Подставляя выражения для коэффициентов χ_{-1} и χ_{-2} из (16) в условие редукции (12), получим

$$\sum_{k,l=1}^{N}(\alpha_{lx}\beta_k)A_{kl}^{-1}-\left(\sum_{k,l=1}^{N}\frac{\partial A_{lk}}{\partial x}A_{kl}^{-1}\right)^2=0. \tag{24}$$

Вводя вырожденную матрицу V с элементами $V_{lk}=\alpha_{lx}\beta_k$, для которой $\operatorname{rank}V=1$, перепишем соотношение (24) в виде

$$\operatorname{tr}(VA^{-1})-\left[\operatorname{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial x}A^{-1}\right)\right]^2=0. \tag{25}$$

Используя тождества из (21), перепишем (25) в детерминантной форме:

$$T(S-T)-T_x^2=0, \tag{26}$$

здесь $T=\det A$ и $S=\det(A+V)$.

Условия вещественности (14) и редукции (12), (26) накладывают определенные ограничения на функциональные параметры. Для того, чтобы удовлетворить эти условия, попарно сгруппируем слагаемые в ядре R_0 (15):

$$\begin{aligned}R_0(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)&=\pi\sum_{k=1}^{2N}f_k(\mu,\bar\mu)g_k(\lambda,\bar\lambda)=\\&=\pi\sum_{k=1}^{N}[p_k(\mu,\bar\mu)q_k(\lambda,\bar\lambda)+\tilde p_k(\mu,\bar\mu)\tilde q_k(\lambda,\bar\lambda)].\end{aligned} \tag{27}$$

Определим с помощью (27) наборы f и g функций f_k и g_k, $k=1\ldots 2N$,

$$\begin{aligned}f&:=(f_1,\ldots,f_{2N})=(p_1(\mu,\bar\mu),\ldots,p_N(\mu,\bar\mu);\tilde p_1(\mu,\bar\mu),\ldots,\tilde p_N(\mu,\bar\mu)),\\g&:=(g_1,\ldots,g_{2N})=(q_1(\lambda,\bar\lambda),\ldots,q_N(\lambda,\bar\lambda);\tilde q_1(\lambda,\bar\lambda),\ldots,\tilde q_N(\lambda,\bar\lambda)).\end{aligned} \tag{28}$$

В случае $N=1$, т. е. одной пары слагаемых в ядре (27), можно легко показать, что условие редукции (12) или (26) выполняется при выборе функциональных параметров в виде $\alpha_2=ic_1^{-1}\partial_x^{-1}\beta_1$, $\beta_2=ic_1\alpha_{1x}$, здесь c_1 – произвольная комплексная константа. В терминах функциональных параметров в спектральном представлении (18) последнее соотношение переписывается в виде $\tilde p_1(\mu,\bar\mu)=c_1^{-1}\mu^{-1}q_1(-\mu,-\bar\mu)$, $\tilde q_1(\lambda,\bar\lambda)=c_1\lambda p_1(-\lambda,-\bar\lambda)$. С использованием компьютерного пакета символических вычислений – «Maple» было проверено, что условие редукции удовлетворяется при выполнении подобных соотношений между функциональными параметрами и в случае двух пар слагаемых ядра R_0 (27). Обобщая последнее наблюдение на более общий случай $N>2$ пар слагаемых в ядре (27), заключаем, что условие редукции (12) или (26) выполняется при следующих соотношениях на функциональные параметры в координатном и спектральном представлениях:

$$\begin{gathered}\alpha_{k+N}=ic_k^{-1}\partial_x^{-1}\beta_k,\quad \beta_{k+N}=ic_k\alpha_{kx},\quad k=1,\ldots,N,\\ \tilde p_k(\mu,\bar\mu)=c_k^{-1}\mu^{-1}q_k(-\mu,-\bar\mu),\quad \tilde q_k(\lambda,\bar\lambda)=c_k\lambda p_k(-\lambda,-\bar\lambda),\end{gathered} \tag{29}$$

где c_k $(k=1,\dots,N)$ – некоторые комплексные константы, и индекс k нумерует пары в ядре R_0.

Таким образом, в силу (29) условия редукции (12) или (26) удовлетворяются при выборе ядра R_0 (27) $\bar\partial$-проблемы (3) в виде

$$\begin{gathered}R_0(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)=\pi\sum_{k=1}^{2N}f_k(\mu,\bar\mu)g_k(\lambda,\bar\lambda)=\\=\pi\sum_{k=1}^{N}\left[p_k(\mu,\bar\mu)q_k(\lambda,\bar\lambda)+\frac{\lambda}{\mu}q_k(-\mu,-\bar\mu)p_k(-\lambda,-\bar\lambda)\right].\end{gathered}\tag{30}$$

В соответствии с (30) наборы f и g функции f_k, g_k, $k=1,\dots,2N$ даются выражениями:

$$\begin{gathered}f=(f_1,..,f_{2N})=\left(p_1(\mu,\bar\mu),..,p_N(\mu,\bar\mu);\ \frac{1}{\mu}q_1(-\mu,-\bar\mu),..,\frac{1}{\mu}q_N(-\mu,-\bar\mu)\right),\\g=(g_1,..,g_{2N})=\left(q_1(\lambda,\bar\lambda),..,q_N(\lambda,\bar\lambda);\ \lambda p_1(-\lambda,-\bar\lambda),..,\lambda p_N(-\lambda,-\bar\lambda)\right).\end{gathered}\tag{31}$$

Первое условие вещественности из (14) удовлетворяется при наложении на каждую пару суммы (30) следующих соотношений:

$$\begin{gathered}p_k(\mu,\bar\mu)q_k(\lambda,\bar\lambda)+\frac{\lambda}{\mu}q_k(-\mu,-\bar\mu)p_k(-\lambda,-\bar\lambda)=\\=\overline{p_k(-\bar\mu,-\mu)}\,\overline{q_k(-\bar\lambda,-\lambda)}+\frac{\lambda}{\mu}\overline{q_k(\bar\mu,\mu)}\,\overline{p_k(\bar\lambda,\lambda)}.\end{gathered}\tag{32}$$

Из равенства (32) следуют два случая удовлетворения условия вещественности:

$$A.\ p_k(\mu,\bar\mu)q_k(\lambda,\bar\lambda)=\overline{p_k(-\bar\mu,-\mu)}\,\overline{q_k(-\bar\lambda,-\lambda)},\tag{33}$$

$$B.\ p_k(\mu,\bar\mu)q_k(\lambda,\bar\lambda)=\frac{\lambda}{\mu}\overline{q_k(\bar\mu,\mu)}\,\overline{p_k(\bar\lambda,\lambda)}.\tag{34}$$

Разделяя переменные в случае A –

$$\frac{p_k(\mu,\bar\mu)}{\overline{p_k(-\bar\mu,-\mu)}}=\frac{\overline{q_k(-\bar\lambda,-\lambda)}}{q_k(\lambda,\bar\lambda)}=\nu_k\tag{35}$$

с некоторыми комплексными константами ν_k $(k=1,\dots,N)$, получаем следующие ограничения на функции $p_k(\mu,\bar\mu)$ и $q_k(\lambda,\bar\lambda)$:

$$p_k(\mu,\bar\mu)=\nu_k\overline{p_k(-\bar\mu,-\mu)},\quad q_k(\lambda,\bar\lambda)=\nu_k^{-1}\overline{q_k(-\bar\lambda,-\lambda)},\quad |\nu_k|^2=1.\tag{36}$$

Разделяя переменные в случае B –

$$\frac{\mu p_k(\mu,\bar\mu)}{\overline{q_k(\bar\mu,\mu)}}=\frac{\lambda\overline{p_k(\bar\lambda,\lambda)}}{q_k(\lambda,\bar\lambda)}=\nu_k\tag{37}$$

с некоторыми комплексными константами v_k $(k=1,\dots,N)$, получаем ограничения на функции $q_k(\lambda,\bar{\lambda})$:

$$q_k(\mu,\bar{\mu})=\frac{\mu}{v_k}\overline{p_k(\bar{\mu},\mu)},\quad v_k=\bar{v}_k=v_{k0}. \tag{38}$$

Второе условие вещественности из (14) может быть удовлетворено путем наложения на каждую пару суммы (30) следующих ограничений:

$$\begin{gathered}p_k(\mu,\bar{\mu})q_k(\lambda,\bar{\lambda})+\frac{\lambda}{\mu}q_k(-\mu,-\bar{\mu})p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})=\\=\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)}\,\overline{q_k(\bar{\mu},\mu)}+\frac{\mu}{\lambda}\overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)}\,\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}.\end{gathered} \tag{39}$$

Из равенства (39) следуют два возможных случая:

$$\begin{gathered}A'.\quad p_k(\mu,\bar{\mu})q_k(\lambda,\bar{\lambda})=\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)}\,\overline{q_k(\bar{\mu},\mu)},\\ \frac{\lambda}{\mu}q_k(-\mu,-\bar{\mu})p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})=\frac{\mu}{\lambda}\overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)}\,\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}.\end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered}B'.\quad p_k(\mu,\bar{\mu})q_k(\lambda,\bar{\lambda})=\frac{\mu}{\lambda}\overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)}\,\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)},\\ \frac{\lambda}{\mu}q_k(-\mu,-\bar{\mu})p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})=\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)}\,\overline{q_k(\bar{\mu},\mu)}.\end{gathered} \tag{41}$$

Для первого случая A' (40), разделяя переменные, получаем следующие соотношения:

$$\frac{p_k(\mu,\bar{\mu})}{\overline{q_k(\bar{\mu},\mu)}}=\frac{\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)}}{q_k(\lambda,\bar{\lambda})}=v_k, \tag{42}$$

$$\frac{\lambda^2 p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})}{\overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)}}=\frac{\mu^2\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}}{q_k(-\mu,-\bar{\mu})}=\tilde{v}_k, \tag{43}$$

где v_k и $\tilde{v}_k$ $(k=1,\dots,N)$ – некоторые комплексные константы. Заметим, что из (43) и (42) следует соотношение $\lambda^2 v_k=\mu^2 v_k=\tilde{v}_k$, которому невозможно удовлетворить при произвольном выборе λ, μ. Во втором случае B' из (41), разделяя переменные, получим следующие равенства:

$$\frac{p_k(\mu,\bar{\mu})}{\mu\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}}=\frac{\overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)}}{\lambda q_k(\lambda,\bar{\lambda})}=v_k, \tag{44}$$

$$\frac{\mu\overline{q_k(\bar{\mu},\mu)}}{q_k(-\mu,-\bar{\mu})}=\frac{\lambda p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})}{\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)}}=\tilde{v}_k, \tag{45}$$

где v_k и $\tilde{v}_k$ $(k=1,\dots,N)$ – некоторые комплексные константы. Из (44) и (45), снова получаем соотношение $\mu^2 v_k=-\tilde{v}_k$ которое не выполняется при произвольных μ. Таким образом, показано, что случаи A' и B' приводят к противоречиям, поэтому ниже рассматриваются только случаи A и B, определенные соотношениями (33) и (34).

В случае A (33) ядро R_0, которое приводит к удовлетворению условий вещественности (14) и редукции (12) или (26), имеет вид (30), где для функции $p_k(\mu,\bar{\mu})$ и $q_k(\lambda,\bar{\lambda})$ выполняются соотношения (36). Используя определения (18), получаем из (29), (36) соотношения между различными функциональными параметрами в координатном представлении:

$$\begin{aligned}\alpha_k &:= v_k \iint\limits_C \overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = -v_k \overline{\alpha_k},\\ \beta_k &:= \overline{v_k} \iint\limits_C \overline{q_k(-\bar{\lambda},-\lambda)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = -\bar{v}_k \overline{\beta_k},\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{k+N} &:= c_k^{-1} \iint\limits_C \frac{1}{\mu} q_k(-\mu,-\bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = i c_k^{-1} \partial_x^{-1} \beta_k,\\ \beta_{k+N} &:= c_k \iint\limits_C \lambda p_k(-\lambda,-\bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = i c_k \alpha_{kx},\end{aligned} \tag{47}$$

где $|v_k|^2 = 1$ и $(k = 1,\ldots,N)$. Наборы функциональных параметров α_k и β_k, в силу (46) и (47), имеют следующую структуру:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2N}) := (\alpha_1,\ldots,\alpha_N; i c_1^{-1}\partial_x^{-1}\beta_1,\ldots, i c_N^{-1}\partial_x^{-1}\beta_N), \tag{48}$$

$$(\beta_1,\ldots,\beta_{2N}) := (\beta_1,\ldots,\beta_N; i c_1 \alpha_{1x},\ldots, i c_N \alpha_{Nx}), \tag{49}$$

таким образом, оба набора выражаются через $2N$ независимых комплексных параметров $(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ и $(\beta_1,\ldots,\beta_N)$, для которых выполняются соотношения (46).

Класс точных решений с функциональными параметрами, соответствующий ядру R_0 вида (30), дается общей формулой (23) с функциональными параметрами, определенными в (48) и (49). Построенные решения, таким образом, зависят только от $2N$ функциональных параметров $(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ и $(\beta_1,\ldots,\beta_N)$.

В простейшем случае $N = 1$ вследствие (46), (48) и (49) определитель матрицы A (17) дается следующим выражением:

$$\det A = \left(1 - \frac{1}{4}\alpha_1 \partial_x^{-1}\beta_1 + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\alpha_1\beta_1\right)^2 = \Delta^2. \tag{50}$$

Соответствующее решение u вычисляется с помощью формулы реконструкции (23) и имеет вид

$$u = \frac{3}{2\Delta^2}\left[\Delta\left(\alpha_1\beta_{1x} - \alpha_{1xx}\partial_x^{-1}\beta_1\right) - \frac{1}{4}\left(\alpha_1\beta_1 - \alpha_{1x}\partial_x^{-1}\beta_1\right)^2\right]. \tag{51}$$

Из выражения (50) для $\det A$ следует, что построенное решение (51) является несингулярным при выборе функциональных параметров α_1, β_1, удовлетворяющих неравенству $-\frac{1}{4}\alpha_1\partial_x^{-1}\beta_1 + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\alpha_1\beta_1 > 0$.

Выбор дельта-функционных функциональных параметров в спектральном представлении в виде $p_k(\mu,\bar{\mu}) = A_k\delta(\mu - i\mu_{k0})$, $q_k(\lambda,\bar{\lambda}) = B_k\delta(\lambda - i\lambda_{k0})$, $k = 1,\dots,N$, удовлетворяющих условиям (29) и (36), где в соответствии с (36) $A_k = \nu_k \bar{A}_k$, $B_k = \nu_k \bar{B}_k$ и λ_{k0}, μ_{k0} – некоторые вещественные параметры, приводит к многосолитонным решениям уравнения 2DCK. Соответствующие функциональные параметры в координатном представлении (18) имеют вид

$$\alpha_k = -2iA_k e^{F(i\mu_{k0})}, \quad \beta_k = -2iB_k e^{-F(i\lambda_{k0})}. \tag{52}$$

В простейшем случае $N = 1$ из (50), (51) и с учетом (52) получаем, при условии $A_1 B_1 \dfrac{\mu_{10} + \lambda_{10}}{\lambda_{10}(\mu_{10} - \lambda_{10})} = e^{\varphi_0} > 0$, точное несингулярное линейное односолитонное решение уравнения 2DCK вида

$$u(x,y,t) = \frac{3(\mu_{10} - \lambda_{10})^2}{2\cosh^2\left(\dfrac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)}, \tag{53}$$

где $\varphi = F(i\mu_{10}) - F(i\lambda_{10})$. Это решение было ранее вычислено в работе [21]. В случае $N = 2$ получаем точное двухсолитонное решение уравнения 2DCK.

В случае B (34) условия вещественности (14) и редукции (12) или (26), в силу (29), (30) и (38) будут удовлетворены при выборе ядра R_0 вида

$$R_0(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}) = \pi\sum_{k=1}^{N}[\nu_k^{-1}\lambda p_k(\mu,\bar{\mu})\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda)} - \nu_k^{-1}\lambda\overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})], \tag{54}$$

где $\nu_k = \nu_{k0}$ – произвольные вещественные константы. Используя (54), определяем наборы f и g функций f_k, g_k, $k = 1,\dots,2N$,

$$f := (f_1,\dots,f_{2N}) =$$

$$= \left(p_1(\mu,\bar{\mu}),\dots,p_N(\mu,\bar{\mu}); -\nu_1^{-1}\overline{p_1(-\bar{\mu},-\mu)},\dots,-\nu_N^{-1}\overline{p_N(-\bar{\mu},-\mu)}\right), \tag{55}$$

$$g := (g_1,\dots,g_{2N}) =$$

$$= \left(\nu_1^{-1}\lambda\overline{p_1(\bar{\lambda},\lambda,)},\dots,\nu_N^{-1}\lambda\overline{p_1(\bar{\lambda},\lambda,)}; \lambda p_1(-\lambda,-\bar{\lambda}),\dots,\lambda p_N(-\lambda,-\bar{\lambda})\right). \tag{56}$$

С помощью определений (18) получаем из (55) и (56) соотношения между функциональными параметрами в координатном представлении:

$$\beta_k := \nu_k^{-1}\iint_C \lambda\overline{p_k(\bar{\lambda},\lambda,)}e^{-F(\lambda)}d\lambda\wedge d\bar{\lambda} = -i\nu_k^{-1}\bar{\alpha}_{kx}, \qquad k = 1,\dots,N, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+N} &:= -\nu_k^{-1}\iint_C \overline{p_k(-\bar{\mu},-\mu)}e^{F(\mu)}d\mu\wedge d\bar{\mu} = \nu_k^{-1}\bar{\alpha}_k, \\ \beta_{k+N} &:= \iint_C \lambda p_k(-\lambda,-\bar{\lambda})e^{-F(\lambda)}d\lambda\wedge d\bar{\lambda} = i\alpha_{kx}, \end{aligned} \tag{58}$$

где $\nu_k = \nu_{k0}$ – произвольные вещественные константы. Из (57), (58) получаем наборы функциональных параметров в координатном представлении:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{2N}) := (\alpha_1,\dots,\alpha_N;\nu_1^{-1}\overline{\alpha}_1,\dots,\nu_N^{-1}\overline{\alpha}_N), \tag{59}$$

$$(\beta_1,\dots,\beta_{2N}) := (-i\nu_1^{-1}\overline{\alpha}_{1x},\dots,-i\nu_N^{-1}\overline{\alpha}_{Nx};i\alpha_{1x},\dots,i\alpha_{Nx}), \tag{60}$$

таким образом, оба набора выражаются через N независимых комплексных функциональных параметров $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$.

Общая детерминантная формула (23), в рассматриваемом случае ядра R_0 (56), с функциональными параметрами, определенными в (59) и (60), приводит к классу точных решений с функциональными параметрами уравнения 2DCK (1). Построенные решения зависят только от N комплексных функциональных параметров $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$.

В простейшем случае $N=1$, в силу (59) и (60) определитель матрицы A (17) дается выражением

$$\det A = \left(1+\frac{i}{4\nu_1}\partial_x^{-1}(\alpha_{1x}\overline{\alpha}_1-\alpha_1\overline{\alpha}_{1x})\right)^2 = \Delta^2. \tag{61}$$

Соответствующее решение u вычисляется с помощью формулы реконструкции (23) и с учетом (61) имеет вид

$$u = \frac{3}{2\nu_1\Delta^2}\left[i\Delta\left(\alpha_{1xx}\overline{\alpha}_1-\alpha_1\overline{\alpha}_{1xx}\right)+\frac{1}{4\nu_1}\left(\alpha_{1x}\overline{\alpha}_1-\alpha_1\overline{\alpha}_{1x}\right)^2\right]. \tag{62}$$

Из выражения (61) следует, что построенное решение (62) несингулярно при выборе функционального параметра α_1, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{i}{4\nu_1}\partial_x^{-1}(\alpha_{1x}\overline{\alpha}_1-\alpha_1\overline{\alpha}_{1x})>0\,.$$

При выборе дельта-функционных функциональных параметров вида $p_k(\mu,\overline{\mu}) = A_k\delta(\mu+\mu_k)$, $k=1,\dots,N$, функциональные параметры α_k (18) в координатном представлении имеют вид

$$\alpha_k = -2iA_k e^{F(\mu_k)}. \tag{63}$$

Указанный выбор функциональных параметров приводит к многосолитонным решениям.

В простейшем случае $N=1$ из (61), (62) с учетом (63) при выполнении условия $\dfrac{|A_1|^2}{\nu_1}\dfrac{\mu_{1R}}{\mu_{1I}} = e^{\varphi_0}>0$ получаем точное несингулярное односолитонное решение уравнения 2DCK:

$$u(x,y,t) = \frac{6\mu_{1I}^2}{\cosh^2\left(\dfrac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)}, \tag{64}$$

где $\varphi = F(\mu_1)-F(\overline{\mu_1})$. Полученное решение было вычислено ранее в работе [21]. Аналогичные, достаточно простые выражения приводят к двухсолитонному решению уравнения 2DCK.

3. Простые периодические решения уравнения 2DСК

В настоящем разделе строится подкласс решений с функциональными параметрами для уравнения 2DСК (2) – простые периодические решения. Такие решения строятся следующим образом. Сначала с помощью общей детерминантной формулы (23) строится комплексное решение, удовлетворяющее лишь условию редукции (12) или (26).

Простые периодические решения уравнения 2DСК вычисляются аналогично случаю уравнения 2DКК. Сначала ищется решение u, удовлетворяющее только условию редукции (12) или (26), в случае $N=1$ в (30) это решение имеет вид (23), где определитель матрицы A, в силу (17) и (29), дается выражением

$$\det A=\left(1-\frac{1}{4}\alpha_1\partial_x^{-1}\beta_1+\frac{1}{2}\partial_x^{-1}\alpha_1\beta_1\right)^2=\Delta^2. \tag{65}$$

Выбирая дельта-функционные функциональные параметры $f_1:=A_1\delta(\mu-\mu_1)$ и $g_1:=B_1\delta(\lambda-\lambda_1)$ в спектральном представлении, получаем с помощью (18) функциональные параметры $\alpha_1=-2iA_1e^{F(\mu_1)}$ и $\beta_1=-2iB_1e^{-F(\lambda_1)}$ в координатном представлении.

Далее с помощью общей детерминантной формулы (23) строится решение, удовлетворяющее только условию редукции. В рассматриваемом случае получаем

$$u(x,y,t)=\frac{-6a(\mu_1^2-\lambda_1^2)}{\lambda_1\det A}e^{\varphi(x,y,t)}, \tag{66}$$

где $a:=iA_1B_1$, $\varphi=F(\mu_1)-F(\lambda_1)$ и

$$\det A=\left[1+a\frac{\mu_1+\lambda_1}{\lambda_1(\mu_1-\lambda_1)}e^{\varphi(x,y,t)}\right]^2. \tag{67}$$

Условие вещественности ($u=\overline{u}$), налагаемое на решение (66) и требование мнимости фазы $\varphi=-\overline{\varphi}=i\phi$ приводят к следующим ограничениям на параметры:

$$\mu_1=\overline{\mu_1}=\mu_{10},\quad \lambda_1=\overline{\lambda_1}=\lambda_{10},\quad a=|a|e^{i\phi_a}=\left|\frac{\lambda_{10}(\mu_{10}-\lambda_{10})}{\mu_{10}+\lambda_{10}}\right|e^{i\phi_a}. \tag{68}$$

Подставляя формулы (68) в (66), получаем простое сингулярное периодическое решение уравнения 2DСК:

$$u(x,y,t)=\frac{-3(\mu_{10}-\lambda_{10})^2}{2\cos^2\left(\frac{\phi+\phi_a}{2}\right)},\ \text{при}\ \frac{\lambda_{10}(\mu_{10}-\lambda_{10})}{\mu_{10}+\lambda_{10}}>0 \tag{69}$$

и

$$u(x,y,t)=\frac{-3(\mu_{10}-\lambda_{10})^2}{2\sin^2\left(\frac{\phi+\phi_a}{2}\right)},\ \text{при}\ \frac{\lambda_{10}(\mu_{10}-\lambda_{10})}{\mu_{10}+\lambda_{10}}<0, \tag{70}$$

здесь $\phi=(\mu_{10}-\lambda_{10})x+(\mu_{10}^3-\lambda_{10}^3)y+9(\mu_{10}^5-\lambda_{10}^5)t$ и ϕ_a – произвольная вещественная константа.

К другой возможности удовлетворения условия вещественности $u = \overline{u}$ решения (66) и требования мнимости фазы $\varphi = -\overline{\varphi} = i\phi$ приводят следующие ограничения на параметры:

$$\lambda_1 = -\overline{\mu}_1, \quad a = |a| e^{i\phi_a} = \left|\frac{\mu_{1R}}{\mu_{1I}}\right| |\mu_1| e^{i\phi_a}. \tag{71}$$

Налагая на решение u (66) эти ограничения, получаем еще одно простое сингулярное периодическое решение уравнения 2DСК (1):

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{-6\mu_{1R}^2}{\cos^2\left(\frac{\phi+\phi_a}{2}\right)}, \text{ при } \frac{\mu_{1R}}{\mu_{1I}} > 0, \\ u(x,y,t) &= \frac{-6\mu_{1R}^2}{\sin^2\left(\frac{\phi+\phi_a}{2}\right)}, \text{ при } \frac{\mu_{1R}}{\mu_{1I}} < 0, \end{aligned} \tag{72}$$

здесь $\phi = (\mu_1 + \overline{\mu_1})x + (\mu_1^3 + \overline{\mu_1^3})y + (\mu_1^5 + \overline{\mu_1^5})t$ и ϕ_a – произвольная вещественная константа.

Заключение

Уравнение 2DСК возникает как специальная редукция (11) ($u_0 = 0$) более общей системы нелинейных уравнений для некоторых полевых переменных, напомним, что уравнению 2DКК соответствует редукция $u_0 = \frac{1}{2}u_x$, см. [21]. Такие редукции приводят к определенным нелинейным ограничениям на коэффициенты разложения волновой функции χ линейных вспомогательных задач.

В данной статье показано, как можно удовлетворить этим нелинейным ограничениям, с помощью метода $\overline{\partial}$-одевания. В результате для уравнения 2DСК (1) были построены новые классы точных решений с функциональными параметрами и рассмотрены частные случаи таких решений – периодические решения.

Отметим, что в статье [23] была дана калибровочная формулировка интегрируемой 2DКК-2DСК системы нелинейных уравнений. Там было показано, что уравнения 2DКК и 2DСК (1) допускают калибровочно-инвариантную формулировку, но эти уравнения не являются калибровочно инвариантными друг другу. Именно поэтому удовлетворение редукций ($u_0 = 0$ и $u_0 = \frac{1}{2}u_x$ для указанных уравнений выполняется заметно различным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дрюма В.С.** Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега-Де Вриза (КДВ) // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19, вып. 12. – С. 753–755.
2. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 45–53.
3. **Davey A., Stewartson K.** On three-dimensional packet of surface waves [Electronic resource] // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1974. – Vol. 338, iss. 1613. – P. 101–110. – URL: http://dx.doi.org/ 10.1098/rspa.1974.0076 (accessed: 09.11.2014).

4. **Нижник Л.П.** Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Доклады Академии наук СССР. – 1980. – Т. 254, № 2. – С. 332–335.
5. **Веселов А.П., Новиков С.П.** Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 20–24.
6. Теория солитонов: метод обратной задачи / С.П. Новиков, В.Е. Захаров, С.В. Манаков, Л.В. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
7. **Ablowitz M.J., Clarkson P.A.** Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
8. **Konopelchenko B.G.** Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. – New York: Plenum Press, 1992. – 292 p.
9. **Konopelchenko B.G.** Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Scientific, 1993. – 304 p.
10. **Manakov S.V.** The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1981. – Vol. 3, iss. 1–2. – P. 420–427. – doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
11. **Beals R., Coifman R.R.** The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1986. – Vol. 18, iss. 1–3. – P. 242–249. – doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
12. **Захаров В.Е., Манаков С.В.** Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19, вып. 2. – С. 11–25.
13. **Zakharov V. E.** Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$- problem // Plasma theory and Nonlinear and turbulent processes in Physics / ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. – Kiev: Naukova Dumka, 1988. – Vol. 1. – P. 152–158.
14. **Bogdanov L.V., Manakov S.V.** The non-local $\bar{\partial}$- problem and (2+1)-dimensional soliton equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1988. – Vol. 21, N 10. – P. L537–L544. – doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
15. **Fokas A.S., Ablowitz M.J.** The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems // Lecture Notes in Physics. – 1983. – Vol. 189. – P. 137–183.
16. **Beals R., Coifman R.R.** Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$- method // Inverse Problems. – 1989. – Vol. 5, N 2. – P. 87–130. – doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
17. **Zakharov V.E.** On the dressing method // Inverse Methods in Action / ed. by P.C. Sabatier. – Berlin: Springer, 1990. – P. 602–623.
18. **Konopelchenko B.G., Dubrovsky V.G.** Some new integrable nonlinear evolution equations in 2+1 dimensions // Physics Letters A. – 1984. – Vol. 102, iss. 1–2. – P. 15–17. – doi: 10.1016/0375-9601(84)90442-0.
19. Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation: transformation groups for soliton equation III / E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miva // Journal of the Physical Society of Japan. – 1981. – Vol. 50, N 11. – P. 3806–3812. – doi: 10.1143/JPSJ.50.3806.
20. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функциональный анализ и его приложения. – 1979. – Т. 13, вып. 3. – С. 13–22.
21. **Dubrovsky V.G., Lisitsyn Ya.V.** The construction of exact solutions of two-dimensional generalizations of Kaup-Kupershmidt and Sawada-Kotera equations // Physics Letters A. – 2002. – Vol. 295, iss. 4. – P. 198–207. – doi: 10.1016/S0375-9601(02)00154-8.
22. **Hu X.-B., Wang D.-L., Qian X.-M.** Soliton solutions and symmetries of the 2+1 dimensional Kaup-Kupershmidt equation // Physics Letters A. – 1999. – Vol. 262, iss. 6. – P. 409–415. – doi: 10.1016/S0375-9601(99)00683-0.
23. **Дубровский В.Г., Грамолин А.В.** Калибровочно-инвариантное описание некоторых (2+1)-мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 160, № 1. – С. 35–48. – doi: 10.4213/tmf6376.
24. **Дубровский В.Г., Топовский А.В., Басалаев М.Ю.** Новые точные решения двумерных интегрируемых уравнений НВН, 2DКК и 2DСК, полученные с помощью метода $\bar{\partial}$- одевания // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 167, № 3. – С. 377–393. – doi: 10.4213/tmf6648.

SOLUTIONS WITH FUNCTIONAL PARAMETERS OF 2+1 DIMENSIONAL INTEGRABLE NONLINEAR EQUATIONS. TWO-DIMENSIONAL INTEGRABLE GENERALIZATION OF THE SAWADA-KOTERA EQUATION

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Basalaev M.Yu.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

In 1967 new method of exact integration of nonlinear differential equations, the Inverse Scattering Transform (IST) method was discovered. The main idea of IST method is the use the linear auxiliary problems; integrable nonlinear equation is represented as compatibility condition of these problems. At first the IST method was been developed for (1+1)-dimensional nonlinear evolution differential equations with one time and space variables. The sphere of applications of new IST method has been expanded quickly. It was discovered that the IST method is also applicable for exact integration of (2+1)-dimensional nonlinear equations such as Kadomtsev-Petviashvili, Davey-Stewardson, Nizhnik-Veselov-Novikov equations. At present nonlinear Riemann-Hilbert problem, $\bar{\partial}$- problem and more general $\bar{\partial}$- dressing method of Zakharov-Manakov, as modern methods of the theory of complex variables, are basic and powerful methods for constructions of exact solutions of (2+1)- dimensional nonlinear integrable evolution equations. In present paper $\bar{\partial}$- dressing method of Zakharov and Manakov is applied for construction of new classes of exact solutions of two dimensional integrable generalization of the Sawada-Kotera nonlinear equation (2DSK). The 2DSK equation is special reduction of more general system of equations for some field variables. It is shown how this reduction can be perform by satisfactions of nonlinear constraints on coefficients of expansions of wave function χ of linear auxiliary problems. New classes of exact solutions with functional parameters of 2DSK equation are obtained. The solitonic solutions and periodic solutions are subclasses of these classes. The principal possibility of construction of periodical solutions of two-dimensional integrable nonlinear equation via $\bar{\partial}$- dressing method is demonstrated for 2DSK equation. Developed method is applicable also for construction of periodical solutions for other integrable equations.

Keywords: integrable nonlinear equation, method of $\bar{\partial}$ -dressing, two-dimensional integrable generalization of Sawada-Kotera equation (2DSK), solutions with functional parameters, periodic solutions.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-2-7-23

REFERENCES

1. Dryuma V.S. Ob analiticheskom reshenii dvumernogo uravneniya Kortevega-De Vriza (KDV) [Analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) equation]. *Pis'ma v Zhurnal teoreticheskoi i eksperimental'noi fiziki – Soviet Physics JETP, 1974*, vol. 19, iss. 12, pp. 753–755. (In Russian)
2. Zakharov V.E., Shabat A.B. Skhema integrirovaniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki metodom obratnoi zadachi rasseyaniya [A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem]. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya – Functional Analysis and Its Applications*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 226–235. doi: 10.1007/BF01075696. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 45–53.
3. Davey A., Stewrtson K. On three-dimensional packet of surface waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1974, vol. 338, iss. 1613, pp. 101–110. Available at: http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1974.0076 (accessed 09.11.2014)
4. Nizhnik L.P. Integrirovanie mnogomernykh nelineinykh uravnenii metodom obratnoi zadachi [Integration of multidimensional nonlinear equations by the method of the inverse problem]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Soviet Physics Doklaly*, 1980, vol. 25, pp. 706–708. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 254, no. 2, pp. 332–335.
5. Veselov A.P., Novikov S.P. Konechnozonnye dvumernye potentsial'nye operatory Shredingera. Yavnye formuly i evolyutsionnye uravneniya [Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Soviet Mathematics. Doklady*, 1980, vol. 30, pp. 588–591. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR,* 1984, vol. 279, no. 1, pp. 20–24.

6. Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. *Theory of solitons: the inverse scattering method*. New York, London, Springer Science & Business Media, 1984. 276 p.
7. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge, Cambridge University Press, 1991. 516 p.
8. Konopelchenko B.G. *Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions*. New York, Plenum Press, 1992. 292 p.
9. Konopelchenko B.G. *Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method*. Singapore, World Scientific, 1993. 304 p.
10. Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1981, vol. 3, iss. 1–2, pp. 420–427. doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7
11. Beals R., Coifman R.R. The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 18, iss. 1–3, pp. 242–249. doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3
12. Zakharov V.E., Manakov S.V. Postroenie mnogomernykh nelineinykh integriruemykh sistem i ikh reshenii [Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions]. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya – Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 89–101. doi: 10.1007/*BF01078388* Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 11–25.
13. Zakharov V.E. Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$- problem. *Plasma theory and Nonlinear and turbulent processes in Physics*. Vol. 1. Ed. by Erokhin N.S., Sitenko A.G., Chernousenko V.M., Bar'yakhtar V.G., Zakharov V.E. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988. P. 152–158.
14. Bogdanov L.V., Manakov S.V. The non-local $\bar{\partial}$- problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. L537–L544. doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001
15. Fokas A.S., Ablowitz M.J. The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems. *Lecture Notes in Physics*, 1983, vol. 189, pp. 137–183. doi: 10.1007/3-540-12730-5_6
16. Beals R., Coifman R.R. Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$- method. *Inverse Problems*, 1989, vol. 5, N 2, pp. 87–130. doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002
17. Zakharov V.E. On the dressing method. *Inverse methods in action*. Ed. Sabatier P.C. Berlin, Springer, 1990, pp. 602–623.
18. Konopelchenko B.G., Dubrovsky V.G. Some new integrable nonlinear evolution equations in 2+ 1 dimensions. *Physics Letters A*, 1984, vol. 102, iss. 1–2, pp. 15–17. doi: 10.1016/0375-9601(84)90442-0
19. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miva T. Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation: Transformation groups for soliton equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1981, vol. 50, no. 11, pp. 3806–3812. doi: 10.1143/JPSJ.50.3806
20. Zakharov V.E., Shabat A.B. Integrirovanie nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki metodom obratnoi zadachi rasseyaniya. II [Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II]. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya – Functional Analysis and Its Applications*, 1979, vol. 13, iss. 3, pp. 166–174. doi: 10.1007/BF01077483. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1979, vol. 13, iss. 3, pp.13–22.
21. Dubrovsky V.G., Lisitsyn Ya.V. The construction of exact solutions of two-dimensional generalizations of Kaup-Kupershmidt and Sawada-Kotera equations. *Physics Letters A*, 2002, vol. 295, iss. 4, pp. 198–207. doi: 10.1016/S0375-9601(02)00154-8
22. Hu X.-B., Wang D.-L., Qian X.-M. Soliton solutions and symmetries of the 2+1 dimensional Kaup–Kupershmidt equation. *Physics Letters A*, 1999, vol. 262, iss. 6, pp. 409–415. doi: 10.1016/S0375-9601(99)00683-0
23. Dubrovsky V.G., Gramolin A.V. Kalibrovochno-invariantnoe opisanie nekotorykh (2+1)-mernykh integriruemykh nelineinykh evolyutsionnykh uravnenii [Gauge-invariant description of several (2+1)-dimensional integrable nonlinear evolution equations]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika – Theoretical and Mathematical Physics*, 2009, vol. 160, no. 1, pp. 905–916. doi: 10.1007/s11232-009-0080-9. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2009, vol. 160, no. 1, pp. 35–48.
24. Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Basalaev M.Yu. Novye tochnye resheniya dvumernykh integriruemykh uravnenii NVN, 2DKK i 2DSK poluchennye s pomoshch'yu metoda

$\bar{\partial}$- odevaniya [New exact solutions of two-dimensional integrable equations using the $\bar{\partial}$- dressing method]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika – Theoretical and Mathematical Physics*, 2009, vol. 167, no. 3, pp. 725–739. doi: 10.1007/s11232-011-0057-3. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2009, vol. 167, no. 3, pp. 377–393.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дубровский Владислав Георгиевич – родился в 1948 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 48 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: dubrovsky@ngs.ru).

Dubrovsky Vladislav Georgievich (b. 1948) – Doctor of Sciences (Phys. & Math.), Professor, Head of Applied and Theoretical Physics Department in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 48 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: dubrovsky@ngs.ru).

Топовский Антон Валерьевич – родился в 1985 году, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 7 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Topovsky Anton Valerevich (b. 1985) – Candidate of Sciences (Phys. & Math.), Associate Professor of the Applied and Theoretical Physics Department in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 7 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Басалаев Максим Юрьевич – родился в 1986 году, ассистент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, лазерная спектроскопия, распространение оптических импульсов. Опубликовано 8 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: mbasalaev@gmai.com).

Basalaev Maksim Yurevich (b. 1986) – assistant of the Applied and Theoretical Physics Department in the Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations; laser spectroscopy, propagation of optical pulses. He is author of 8 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: mbasalaev@gmail.com).

Статья поступила 10 ноября 2014 г.
Received November 10, 2014

To Reference:

Dubrovskii V.G., Topovskii A.V., Basalaev M.Yu. Resheniya s funktsional'nymi parametrami 2+1 mernykh integriruemykh nelineinykh uravnenii. Dvumernoe integriruemoe obobshchenie uravneniya Savady-Kotera [Solutions with functional parameters of 2+1 dimensional integrable nonlinear equations. Two-dimensional integrable generalization of the Sawada-Kotera equation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 2 (27), pp. 7–23. doi: 10.17212/1727-2769-2015-2-7-23