

УДК 621.321

Обобщенный ПИД-регулятор двухмассовой системы с наибольшим запасом устойчивости*

А.Н. КОРЮКИН

Для двух массовой системы выписаны явные формулы наиболее устойчивого по Гурвицу обобщенного ПИД-регулятора (числитель его передаточной функции – квадратный трехчлен; знаменатель – линейный с единичным старшим коэффициентом). Сила приложена только к одной из масс; наблюдаем за отклонением той же массы.

Ключевые слова: модальный синтез, регуляторы пониженного порядка, устойчивость по Гурвицу, ПИД-регулятор, наибольший запас устойчивости, наибольшая степень устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследуется устойчивость двух массовой системы с обобщенным ПИД-регулятором. Это задача синтеза регулятора пониженного порядка. Цель – найти наибольшую степень устойчивости. Данное исследование является продолжением работы [1] и развивает ряд идей работы [2]. Обозначения из [1] могут быть использованы без оговорок и пояснений. Цель – получить формулы обобщенного ПИД-регулятора, обеспечивающего наибольшую степень устойчивости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

По определению передаточной функции регулятора, $u = G_c e$, где u – вход; $e = v - y$ – невязка, рассогласование; v – задание; y – выход. Передаточная функция обобщенного ПИД-регулятора имеет вид $G_c = (a_0 s^2 + a_1 s + a_2) / (s + b) = a_0 s + r_1 + r_2 / (s + b)$,

где $r_1 = a_1 - b a_0$, $r_2 = a_2 - b a_1 + b^2 a_0$. (1)

По аналогии с ПИД-регулятором a_0 , r_1 , r_2 назовем коэффициентами дифференциальной, пропорциональной и интегральной составляющей.

Цель работы – найти явные формулы наиболее устойчивого обобщенного ПИД-регулятора, т. е. найти параметры b , a_0 , r_1 , r_2 . Эти формулы зависят от входа и выхода (2 случая). Согласно теореме из [1] каждый из них разобьется на два подслучая: $T > 4$ и $T \leq 4$, где $T = t - 1$; t – параметр объекта, определенный в [1], от которого зависит единственная связь коэффициентов характеристического полинома. В итоге нужно будет рассматривать 4 случая. Сначала лучше вывести явные формулы в зависимости от параметров объекта p_i , где $i = 0, 1, 2, 3$ [1], а уже потом специализировать формулы в зависимости от входа и выхода.

* Статья получена 3 сентября 2012 г. Повторно после исправления 20 марта 2013 г.

Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки по проекту «Исследование предельных точностей оптических методов измерения параметров движения и мехатронных методов управления движением и разработка новых робототехнических и электромеханических систем». Тем. план, проект № 7.559.2011, гос. рег. номер НИИР № 01201255056.

Коэффициенты обобщенного ПИД-регулятора выражаются через исходные в работе [1] коэффициенты b , a_i , выражающиеся по формулам (14) из [1] через параметры объекта p_i ($i = 0, 1, 2, 3$) и через коэффициенты C_j характеристического полинома $f(s)$ ($j = 1, \dots, 5$).

Интересно, что как при входе 1 и выходе 1, так и при входе 2 и выходе 2 параметр объекта $p_3 - p_1 p_2 + p_1^2$ одинаково выражается через исходные параметры объекта (массы и жесткости): $p_3 - p_1 p_2 + p_1^2 = -n_1 n_2 k_2^2$ (n_i – обратные к массам; k_i – жесткости).

Теперь из формулы (18) из [1] получим формулу для параметра T :

$$T = t - 1 = (-p_3 + p_1 p_2) / p_1^2 - 1 = (-p_3 + p_1 p_2 - p_1^2) / p_1^2 = n_1 n_2 k_2^2 / p_1^2.$$

Отсюда

$$p_3 - p_1 p_2 + p_1^2 = -T p_1^2. \quad (2)$$

Исследование наилучшей устойчивости движения сводится к изучению полинома $F(S)$ [1], полученного из характеристического полинома изменением масштаба времени. Поэтому в формулах для параметров регулятора имеет смысл заменить коэффициенты характеристического полинома на коэффициенты полинома $F(S)$: $C_j = K_j A^j$, где K_j – коэффициент полинома $F(S)$ при степени $5 - j$; $A = \sqrt{p_1}$ – единица измерения корней, зависящая от параметров объекта.

Через коэффициенты полинома $F(S)$ выразим параметр b : в знаменателе правой части первого из равенств (14) из [1] сделаем замену (2), а в числителе – замену $C_j = K_j A^j$.

$$\begin{aligned} \text{При этом } A^2 = p_1. \text{ Для } K = K_1 - K_3 + K_5 \text{ получим } b &= -\frac{-p_1 K_3 A^3 + K_5 A^5 K_1 A p_1^2}{T p_1^2} = \\ &= -\frac{K_1 - K_3 + K_5}{T} \frac{A^5}{p_1^2} = -\frac{KA}{T}. \end{aligned}$$

Во всех остальных равенствах (14) из [1] в знаменателях правых частей используется параметр p_0 . Из его определения в зависимости от входа и выхода (равенства (8), (9) из [1]) следует, что этот параметр обратен наблюдаемой и управляемой массе $M = 1 / p_0$. Для выражения параметра a_0 в знаменателе правой части второго из равенств (14) из [1] сделаем замены $p_0 = 1 / M$, (2), а в числителе – замену $C_j = K_j A^j$. Получим

$$\begin{aligned} a_0 &= M \frac{-p_1 C_3 + C_1(-p_3 + p_1 p_2) + C_5}{p_1^2 T} = M \frac{p_1^2 C_1 - p_1 C_3 + C_5 + C_1(-p_3 + p_1 p_2 - p_1^2)}{p_1^2 T} = \\ &= M \frac{p_1^2 K_1 A - p_1 K_3 A^3 + K_5 A^5 + K_1 A(-p_3 + p_1 p_2 - p_1^2)}{p_1^2 T} = M \frac{KA^5 + K_1 A T p_1^2}{p_1^2 T} = MA \left(\frac{K}{T} + K_1 \right). \end{aligned}$$

Аналогично из последнего из равенств (14) из [1] получим

$$\begin{aligned} a_2 &= M \frac{p_3 K_1 A^3 + p_2 K_5 A^5 - K_3 A^3 p_3 - p_1 K_5 A^5}{T p_1^2} = MA^3 \frac{p_3(K_1 - K_3) + K_5(p_2 - p_1)A^2}{T p_1^2} = \\ &= MA^3 \frac{p_3(K_1 - K_3 + K_5) + K_5(-p_3 + p_1 p_2 - p_1^2)}{T p_1^2} = MA^3 \frac{p_3 K + K_5 T p_1^2}{T p_1^2} = M \left(\frac{p_3}{TA} K + A^3 K_5 \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$b = -AK / T, \quad a_0 = MA(K_1 + K / T), \quad a_1 = M(K_2 A^2 - p_2), \quad a_2 = M(K_5 A^3 + p_3 K / (TA)). \quad (3)$$

Теперь выразим коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих регулятора:

$$\begin{aligned} r_1 &= M(T^2 K_2 A^2 - T^2 p_2 + A^2 K K_1 T + A^2 K^2) / T^2; \\ r_2 &= M(T^3 K_5 A^4 + T^2 p_3 K + A^4 K T^2 K_2 - A^2 K T^2 p_2 + A^4 K^2 K_1 T + A^4 K^3) / (T^3 A). \end{aligned} \quad (4)$$

2. НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВЫЙ ПОЛИНОМ $F(S)$ ПРИ $T > 4$

В случае $T > 4$ для обобщенного ПИД-регулятора наилучшая устойчивость не достигается, но к ней можно приближаться на четырехкратных корнях на правой вертикали (теорема из [1]). Рассмотрим полином

$$\begin{aligned} F(S) &= (S - z)(S + 1)^3(S + 1 - x) = S^5 + (-z + 4 - x)S^4 + (-3x - 4z + zx + 6)S^3 + \\ &+ (4 - 3x + 3zx - 6z)S^2 + (-4z + 3zx - x + 1)S + zx - z \end{aligned}$$

($x > 0$ – произвольное положительное число). Полином имеет корни z , $-1 + x$, и трехкратный корень -1 . Единственная связь коэффициентов этого полинома: $-4 + T + 2x + 2zx = 0$. Разрешим ее относительно z :

$$z = -1 - (T - 4) / (2x). \quad (5)$$

Из последнего равенства при $T > 4$, $x > 0$ получим $z < -1$. Значит, полином $F(S)$ зависит от параметра $x > 0$; для коэффициентов этого полинома выполнена единственная связь для обобщенного ПИД-регулятора; при уменьшении x правая вертикаль полинома приближается к -1 (правый корень полинома – это $-1 + x$).

Итак, одно параметрическое семейство этих полиномов для обобщенного ПИД-регулятора при $T > 4$ обеспечивает приближение к пределу устойчивости (уменьшая x , мы приближаемся к пределу устойчивости).

Подставляя (5) в коэффициенты полинома $F(S)$, получим

$$\begin{aligned} K_1 &= (T - 4) / (2x) + 5 - x, \quad K_2 = 2(T - 4) / x - T / 2 + 12 - 4x, \quad K_3 = 3(T - 4) / x + 16 - 3T / 2 - 6x; \\ K_4 &= 2(T - 4) / x - 3T / 2 + 11 - 4x, \quad K_5 = (T - 4) / (2x) + 3 - T / 2 - x. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти коэффициенты разложены в ряд Лорана. Выразим теперь параметр

$$K = K_1 - K_3 + K_5 = -2(T - 4) / x - 8 + T + 4x. \quad (7)$$

3. НАИБОЛЬШАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ $T > 4$

Из равенств (3), (4), (6), (7) найдем коэффициенты регулятора, приближающего при $T > 4$ к пределу устойчивости:

$$b = A(2(T - 4) / x + 8 - T - 4x) / T; \quad a_0 = MA((T - 4)^2 / x + 4(3T - 4) - 2(T - 4)x(2T));$$

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{M}{2T^2} \left(\frac{2A^2(T - 4)^3}{x^2} - \frac{A^2(5T - 16)(T - 4)^2}{x} + 176A^2T + 2T^2p_2 - \right. \\ &\left. - 44A^2T^2 + A^2T^3 - 256A^2 + 2A^2(5T - 16)(T - 4)x + 8A^2(T - 4)x^2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & -\frac{M}{T^3 A} \left(-2 \frac{A^4 (T-4)^4}{x^3} + 6 \frac{A^4 (T-4)^4}{x^2} - \right. \\
& -2(T-4)(2A^4 T^3 - T^2 p_3 + A^2 T^2 p_2 - 43A^4 T^2 + 192A^4 T - 288A^4) / x + \\
& + (-8A^2 T^2 + A^2 T^3) p_2 + (8T^2 - T^3) p_3 + \\
& + 2048A^4 + A^4 T^4 - 49A^4 T^3 + 488A^4 T^2 - 1664A^4 T + \\
& + (8A^4 T^3 - 1152A^4 - 172A^4 T^2 - 4T^2 p_3 + 768A^4 T + 4A^2 T^2 p_2) x + \\
& \left. + 24A^4 (T-4)^2 x^2 + 16A^4 (T-4) x^3 \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Полиномы в правых частях равенств (8) разложены в ряд Лорана.

Для входа 1 и выхода 1 формулы для параметров T , A через исходные параметры объекта получаются из равенств (20) из [1] (ведь $T = t - 1$):

$$A = \sqrt{k_2 / m_2}, \quad T = m_2 / m_1. \tag{9}$$

Из последнего равенства видно, что для входа 1 и выхода 1 условие $T > 4$ превращается в $m_2 > 4m_1$. Теперь коэффициенты регулятора из равенств (8) с помощью равенств (9), (8) из [1] специализируем для входа 1 и выхода 1:

$$\begin{aligned}
b = & \left(2 \frac{m_2 - 4m_1}{x} + 8m_1 - m_2 - 4m_1 x \right) \frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \\
a_0 = & \frac{1}{2m_2} \left(\frac{(4m_1 - m_2)^2}{x} - 4m_1 (-3m_2 + 4m_1) + 2m_1 (4m_1 - m_2) x \right) \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \\
r_1 = & \frac{1}{2m_2^3} \left(2 \frac{k_2 (4m_1 - m_2)^3}{x^2} - \frac{k_2 (16m_1 - 5m_2) (4m_1 - m_2)^2}{x} - \right. \\
& - 3k_2 m_2^3 - 176k_2 m_2 m_1^2 + 42k_2 m_1 m_2^2 + 256k_2 m_1^3 - 2m_2^3 k_1 - 2k_2 m_1 - \\
& \left. - (4m_1 - m_2) (16m_1 - 5m_2) x + 8k_2 m_1^2 (4m_1 - m_2) x^2 \right); \\
r_2 = & -2k_2^2 (m_2 - 4m_1) ((m_2 - 4m_1) (-1/x + 1) + 2m_1 x)^3 (m_2 / k_2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Так как $T = t - 1$, то для входа 2 и выхода 2 формулы для параметров T , A через исходные параметры объекта легко получаются из равенств (21) из [1]:

$$A = \sqrt{(k_2 + k_1) / m_1}, \quad T = (m_1 / m_2) (k_2 / (k_2 + k_1))^2. \tag{10}$$

Из последнего равенства видно, что для входа 2 и выхода 2 условие $T > 4$ превращается в $m_1 k_2^2 > 4(m_2 (k_1 + k_2)^2)$. Теперь коэффициенты обобщенного ПИД-регулятора из равенств (8) с помощью равенств $k = k_1 + k_2$, (10), (9) из [1] специализируем для входа 2 и выхода 2:

$$\begin{aligned}
b = & \frac{1}{m_1 k_2^2} \left(2 \frac{m_1 k_2^2 - 4k^2 m_2}{x} + 8k^2 m_2 - m_1 k_2^2 - 4k^2 m_2 x \right) \sqrt{\frac{k}{m_1}}; \\
a_0 = & \frac{1}{2 m_1 k_2^2 k^2} ((4m_2 k^2 - m_1 k_2^2)^2 / x - 4m_2 k^2 (4m_2 k^2 - 3m_1 k_2^2) + \\
& + 2m_2 k^2 (4m_2 (k_1 + k_2)^2 - m_1 k_2^2) x) \sqrt{k / m_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 = & \frac{1}{2} \frac{1}{m_1^3 k_2^4 k} \left(2 \frac{(4m_2 k^2 - m_1 k_2^2)^3}{x^2} - \right. \\
& -(16m_2 k^2 - 5m_1 k_2^2)(4m_2 k^2 - m_1 k_2^2)^2 / x + \\
& + 3840m_2^3 k_1^2 k_2^4 + 256m_2^3 k_1^6 - 176m_2^2 k_1^4 m_1 k_2^2 - \\
& - 704m_2^2 k_1^3 m_1 k_2^3 - 1056m_2^2 k_1^2 m_1 k_2^4 - 704m_2^2 k_1 k_2^5 m_1 + \\
& + 42m_2 k_1^2 m_1^2 k_2^4 + 84m_2 k_1 k_2^5 m_1^2 - 3m_1^3 k_2^6 + 256m_2^3 k_2^6 + \\
& + 1536m_2^3 k_1^5 k_2 + 3840m_2^3 k_1^4 k_2^2 + 5120m_2^3 k_1^3 k_2^3 + \\
& + 1536m_2^3 k_1 k_2^5 - 176m_2^2 k_2^6 m_1 + 42m_2 k_2^6 m_1^2 - 2m_1^3 k_2^5 k_1 - \\
& \left. - 2m_2 k^2 (4m_2 k^2 - m_1 k_2^2)(16m_2 k^2 - 5m_1 k_2^2)x + 8m_2^2 k^4 (4m_2 k^2 - m_1 k_2^2)x^2 \right); \\
r_2 = & 2(m_1 k_2^2 - 4m_2 k^2) / (m_1^5 k_2^6) \times ((m_1 k_2^2 - 4m_2 k^2)(1/x - 1) - 2m_2 k^2 x)^3 (m_1 / k)^{1/2}.
\end{aligned}$$

4. НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ПИД-РЕГУЛЯТОР ПРИ $T \leq 4$ НЕЗАВИСИМО ОТ ВХОДА И ВЫХОДА

По теореме из [1] для обобщенного ПИД-регулятора при $T \leq 4$ наилучшая устойчивость движения достигается на пятикратных корнях полинома $F(S)$. Рассмотрим полином $F(S)$ с пятикратным корнем x :

$$F(S) = (S - x)^5 = S^5 - 5S^4x + 10S^3x^2 - 10S^2x^3 + 5Sx^4 - x^5.$$

Коэффициенты этого полинома:

$$K_1 = -5x, \quad K_2 = 10x^2, \quad K_3 = -10x^3, \quad K_4 = 5x^4, \quad K_5 = -x^5. \quad (11)$$

Связь $1 + T - K_2 + K_4 = 0$ коэффициентов полинома:

$$1 + T - 10x^2 + 5x^4 = 0. \quad (12)$$

Эту связь можно переписать в виде $(x^2 - 1)^2 = (4 - T) / 5$. Правая часть последнего равенства неотрицательна (ведь $T \leq 4$). Согласно теореме из [1], при $T \leq 4$ и при наилучшей устойчивости движения $x \leq -1$, а поэтому

$$x^2 - 1 \geq 0, \quad x^2 - 1 = \sqrt{(4 - T) / 5}, \quad x = -\sqrt{1 + \sqrt{(4 - T) / 5}}. \quad (13)$$

Вычислим параметр

$$K = K_1 - K_3 + K_5 = -5x + 10x^3 - x^5 = x(40x^2 - 24 + T) / 5. \quad (14)$$

Последний полином получен как остаток при делении полинома $-5x + 10x^3 - x^5$ на полином от x из левой части связи (12). Значит,

$$K = x(40(x^2 - 1) + 16 + T) / 5 = x(16 + T + 40\sqrt{(4 - T) / 5}) / 5.$$

Из первого из равенств (3) получим формулу для вычисления параметра b в зависимости от пятикратного корня x и независимо от входа и выхода:

$$b = -AK / T = -Ax(40(x^2 - 1) + 16 + T) / (5T) = -Ax(16 + T + 40\sqrt{(4 - T) / 5}) / (5T).$$

Выведем формулу для коэффициента a_0 дифференциальной составляющей регулятора в зависимости от пятикратного корня x и независимо от входа и выхода. Из второго из равенств (3) и из равенств получим

$$\begin{aligned} a_0 &= MA \left(K_1 + \frac{K}{T} \right) = \frac{MA}{T} (K + K_1 T) = \frac{MA}{T} \left(\frac{x}{5} \left(16 + T + 40 \sqrt{\frac{4-T}{5}} \right) - 5xT \right) = \\ &= MAx(16 - 24T + 40\sqrt{(4-T)/5}) / (5T) = 8MAx(2 - 3T + 5\sqrt{(4-T)/5}) / (5T). \end{aligned}$$

Выражая в равенствах (3) коэффициенты полинома $F(S)$ из равенств (11), получим формулы параметров b , a_i обобщенного ПИД-регулятора в зависимости от пятикратного корня x и независимо от входа и выхода:

$$\begin{aligned} b &= -A(-5x + 10x^3 - x^5) / T; \quad a_0 = MA(-5xT - 5x + 10x^3 - x^5) / T; \\ a_1 &= M(10x^2 p_1 - p_2); \quad a_2 = M(-x^5 p_1^2 T + p_3(-5x + 10x^3 - x^5)) / (TA). \end{aligned} \quad (15)$$

Выведем формулу для коэффициента r_1 пропорциональной составляющей регулятора в зависимости от пятикратного корня x и независимо от входа и выхода. Из $r_1 = -ba_0 + a_1$ и из (15) получим $r_1 = MR_1 / T^2$, где

$$\begin{aligned} R_1 &= p_1 x^{10} - 20p_1 x^8 + (110p_1 + 5p_1 T)x^6 + \\ &+ (-100p_1 - 50p_1 T)x^4 + (10T^2 p_1 + 25p_1 T + 25p_1)x^2 - T^2 p_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Правая часть равенства (16) – полином от x . При этом x является корнем полинома четвертой степени из левой части связи (12). Значит, полином от x из правой части равенства (16) можно заменить на остаток при делении этого полинома на полином от x из левой части связи (12): $R_1 = \alpha_1 x^2 + \beta_1$, где

$$\alpha_1 = \frac{2}{25}(113T - 352)(T - 4)p_1; \quad \beta_1 = \frac{1}{25}(184T^2 - 72T - 256)p_1 - T^2 p_2.$$

Теперь

$$R_1 = \alpha_1(x^2 - 1) + \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 \sqrt{(4-T)/5} + \alpha_1 + \beta_1,$$

или
$$R_1 = \frac{2}{25}(352 - 113T)(4 - T)p_1 \sqrt{\frac{4-T}{5}} + \frac{1}{5}(512 + 82T^2 - 336T)p_1 - T^2 p_2;$$

$$r_1 = \frac{M}{T^2} \left(\frac{2}{25}(352 - 113T)(4 - T)p_1 \sqrt{\frac{4-T}{5}} + \frac{1}{5}(512 + 82T^2 - 336T)p_1 - T^2 p_2 \right). \quad (17)$$

Выведем формулу для коэффициента r_2 . Из $r_2 = a_2 - ba_1 + b^2 a_0$ и из равенств (15) получим $r_2 = -MxR_2 / (T^3 A)$, где

$$\begin{aligned} R_2 &= p_1^2 x^{14} - 30p_1^2 x^{12} + (315p_1^2 + 5p_1^2 T)x^{10} + (-1300p_1^2 - 100p_1^2 T)x^8 + \\ &+ (10p_1^2 T^2 + 1575p_1^2 + 550p_1^2 T)x^6 + \\ &+ (T^3 p_1^2 - 750p_1^2 - p_1 T^2 p_2 - 100p_1^2 T^2 + T^2 p_3 - 500p_1^2 T)x^4 + \\ &+ (50p_1^2 T^2 - 10T^2 p_3 + 10p_1 T^2 p_2 + 125p_1^2 T + 125p_1^2)x^2 + 5T^2 p_3 - 5p_1 T^2 p_2. \end{aligned}$$

Правую часть последнего равенства рассмотрим как полином от x и поделим с остатком на полином четвертой степени из левой части связи (12). Тогда R_2 будет равно этому остатку. Для упрощения записи в этом остатке сделаем замену $p_3 = p_1 p_2 - (1+T)p_1^2$ (последнее равенство очевидным образом получается как из равенства (18) из [1], так и из равенства (2). Получим

$$R_2 = 1024 p_1^2 (T-4)^2 ((T-9)x^2 + 1+T) / 125.$$

Так как при этом

$$(T-9)x^2 + 1+T = (T-9)(x^2 - 1) + 2T - 8 = (T-9)\sqrt{(4-T)/5} + 2(T-4),$$

то

$$\begin{aligned} R_2 &= -1024 p_1^2 (4-T)^2 ((9-T)\sqrt{(4-T)/5} + 2(4-T)) / 125; \\ r_2 &= 1024 M x p_1 A (4-T)^2 ((9-T)\sqrt{(4-T)/5} + 2(4-T)) / (125 T^3). \end{aligned} \quad (181)$$

Итак, получены формулы для параметра b и коэффициента дифференциальной составляющей регулятора:

$$b = -\frac{Ax}{5T} \left(16 + T + 40\sqrt{\frac{4-T}{5}} \right); \quad a_0 = \frac{8MAx}{5T} \left(2 - 3T + 5\sqrt{\frac{4-T}{5}} \right). \quad (19)$$

а также формулы для коэффициентов пропорциональной (17) и интегральной (18) составляющей регулятора – при $T \leq 4$ в зависимости от наиболее устойчивого пятикратного корня x , и независимо от входа и выхода.

5. НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВЫЙ РЕГУЛЯТОР ПРИ $T \leq 4$

Рассмотрим случай вход 1 и выход 1. Согласно (9) $T = m_2 / m_1$. Теперь условие $T \leq 4$ приобретает смысл $m_2 \leq 4m_1$ (вторая масса не очень тяжелая по сравнению с первой массой).

В равенствах (19), (17), (18) сделаем замену $M = m_1$ (наблюдаемая масса), а также $p_1 = k_2 / m_2$, $p_2 = (k_1 + k_2) / m_1 + k_2 / m_2$ (формулы (8) из [1]); выразим параметры A , T через массы и жесткости по формулам (9). В итоге

$$\begin{aligned} b &= -\frac{m_1}{5m_2} \left(16 + \frac{m_2}{m_1} + 40Q \right) x \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad a_0 = -\frac{8m_1^2}{5m_2} \left(2 - 3\frac{m_2}{m_1} + 5Q \right) x \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \\ r_1 &= \frac{1}{25} \frac{1}{m_2^3} (2k_2 m_1 (4m_1 - m_2) (352m_1 - 113m_2) Q + \\ &\quad + 5(-5m_2^3 k_1 + (512m_1^3 + 77m_2^2 m_1 - 336m_1^2 m_2 - 5m_2^3) k_2)); \\ r_2 &= \frac{1024}{125} \frac{m_1 k_2^2 (4m_1 - m_2)^2}{m_2^5} (2(4m_1 - m_2) + (9m_1 - m_2) Q) x \sqrt{\frac{m_2}{k_2}}, \end{aligned}$$

где $x = -\sqrt{1 + \sqrt{(4m_1 - m_2) / (5m_1)}}$ (из равенства (13) выразили параметр x через массы и жесткости); $Q = \sqrt{(4-T) / 5} = \sqrt{(4m_1 - m_2) / (5m_1)}$.

Теперь рассмотрим случай вход 2 и выход 2. Согласно (10) $T = (m_1 / m_2)(k_2 / k)^2$. Условие $T \leq 4$ приобретает вид $m_1 k_2^2 \leq 4m_2 k^2$.

В формулах (19), (17), (18) используется параметр $\sqrt{(4-T)/5} = \sqrt{(4k^2m_2 - m_1k_2^2)/(5k^2m_2)} = q/k$, где $q = \sqrt{(4k^2m_2 - m_1k_2^2)/(5m_2)}$. Теперь из равенства (13) выразим параметр x через массы и жесткости: $x = -\sqrt{1 + \sqrt{(4k^2m_2 - m_1k_2^2)/(5k^2m_2)}}$. В равенствах (19), (17), (18) сделаем замену $M = m_2$ (наблюдаемая масса), а также $p_1 = k/m_1$, $p_2 = k/m_1 + k_2/m_2$ (формулы (9) из [1]); выразим параметры A , T через массы и жесткости по формулам (10): $A = \sqrt{k/m_1}$, $T = (m_1/m_2)(k_2/k)^2$. В итоге

$$b = -\frac{1}{5} \frac{16m_2k^2 + m_1k_2^2 + 40qm_2k}{m_1k_2^2} y; \quad a_0 = \frac{8}{5} m_2 \frac{2m_2k^2 - 3m_1k_2^2 + 5qm_2k}{m_1k_2^2} y;$$

$$r_1 = (385km_2m_1^2k_2^4 - 1680k^3m_2^2m_1k_2^2 - 25m_1^3k_2^5 + 2560k^5m_2^3 +$$

$$+ 2m_2(4m_2k^2 - m_1k_2^2)(352m_2k^2 - 113m_1k_2^2)q) / 25m_1^3k_2^4;$$

$$r_2 = \frac{1024}{125} \frac{m_2(4m_2k^2 - m_1k_2^2)^2}{m_1^4k_2^6} (2k(4m_2k^2 - m_1k_2^2) + (9m_2k^2 - m_1k_2^2)q) y,$$

где $q = \sqrt{(4k^2m_2 - m_1k_2^2)/(5m_2)}$; $x = -\sqrt{1 + q/k}$; $y = x\sqrt{k/m_1}$; $k = k_1 + k_2$ (сумма жесткостей).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены явные формулы наиболее устойчивого обобщенного ПИД-регулятора. Сначала выведены явные формулы в зависимости от параметров объекта p_i , где $i = 0, 1, 2, 3$ [1], а уже потом эти формулы специализированы в зависимости от входа и выхода (2 случая). Согласно теореме из [1] каждый из них разобьется на два подслучая: $T > 4$ и $T \leq 4$, где $T = t - 1$; t – параметр объекта, определенный в [2], от которого зависит единственная связь коэффициентов характеристического полинома.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости для одноканальной двухмассовой системы с обобщенным ПИД-регулятором / А.Н. Корюкин // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 4(49). – С. 178–185.
 [2] Воевода А.А. Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка / А.А. Воевода, А.В. Чехонадских // Автометрия. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 113–123.

Корюкин Анатолий Николаевич, кандидат физико-математических наук, докторант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований – ассоциативные некоммутативные кольца и теория автоматического управления. Имеет более 40 публикаций. E-mail: koryukin@sibmail.ru

A.N. Koryukin

The generalized PID-regulator of the two-mass system with the greatest stock of stability

For the two mass systems obvious formulas are written out the generalized PID-regulator steadiest on Gurvits (the numerator of its transfer function is a square trinomial; the denominator is linear with single senior coefficient). The force is applied only to one of masses; we watch a deviation of the same weight.

Key words: modal synthesis, regulators of the lowered order, stability according to Gurvits, PID-regulator, the greatest stock of stability, the greatest degree of stability.