Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2(51)

УДК 519.6

Разработка и применение метаэвристических алгоритмов для решения задач геометрического покрытия*

С.Л. ЗАБЕЛИН, В.Д. ФРОЛОВСКИЙ

Задача геометрического покрытия относиться к классу *NP*-трудных задач комбинаторной оптимизации и исследуется в рамках проблемы «раскроя и упаковки». Требуется расположить некоторые геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком с наименьшей площадью перекрытий и промахов объектов, а также использовать наименьшее количество объектов. В статье предлагаются алгоритмы и программы, которые применяются к решению соответствующих оптимизационных задач в агротехнических системах полива. Реализованы следующие алгоритмы: первый подходящий, вероятностный, экстремальный, генетический, муравьиных колоний и др.

Ключевые слова: метаэвристические алгоритмы, задачи геометрического покрытия, *NP*-трудные задачи, муравьиный алгоритм, вероятностный алгоритм, экстремальный алгоритм, задачи оптимизации покрытия.

ВВЕДЕНИЕ

Области применения задач геометрического покрытия охватывают большое количество сфер деятельности человека. Они появляются в системах воздушного и космического наблюдения, системах безопасности, системах освещения, агротехнических системах, системах проектирования, рационального использования материалов и др. Задача геометрического покрытия принадлежит к классу задач «раскроя и упаковки» (*Cutting and Packing, C&P*). В течение последних шестидесяти лет эта проблема привлекает внимание научных исследователей и производственников. Научное начало рациональному использованию материалов заложено работой Л.В. Канторовича, И.В. Залгаллера [1], которая была впервые опубликована в 1951 г. К фундаментальным работам этого направления относятся работы И.В. Романовского [3], Э.А. Мухачевой [2], Ю.Г. Стояна [4]. В отличие от других задач этого класса, задачи покрытия мало изучены на сегодняшний день [5, 6]. Актуальность задачи покрытия обусловлена также её принадлежностью к классу *NP*-трудных задач. Все точные методы, известные для решения подобных задач, имеют экспоненциальную вычислительную сложность. Поэтому возникает проблема разработки приближенных и эвристических методов, позволяющих находить субоптимальные решения. Эффективным является использование метаэвристических методов [5–7].

В настоящее время развитие методов рационального использования материалов направлено, с одной стороны, на создание формального математического аппарата и выявление особенностей данного класса задач на основе единого подхода к их описанию, с другой стороны, на разработку практичных моделей и оптимизационных методов для решения соответствующих задач в конкретных технологических условиях.

---

* *Статья получена 12 февраля 2013 г.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в двумерном пространстве имеется покрываемая поверхность S_0 и покрывающие геометрические объекты $S_1,...,S_m$, где m – общее количество заданных объектов различной формы (прямоугольники, треугольники, окружности и их теоретико-множественные комбинации). Требуется расположить геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком, т. е. должно выполняться следующее условие: $S_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right) = S_0$, где n – общее количество использованных объектов (в общем случае $n \neq m$, т.к. некоторые объекты могут быть использованы несколько раз или не использованы совсем). Задан один из следующих критериев оптимизации:

$$K = S_0 \Bigg/ \left(S_0 + \bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \to \max,$$ очевидно, что $0 \le K \le 1$;

$K_1 = n \to \min$, где n – количество использованных геометрических объектов;

$K_2 = \sum_{i=1}^{n} P_i \to \min$, где P_i – стоимость использования i-го объекта;

$K_3 = \bigcap_{i=1}^{n} S_i + \left(\sum_{i=1}^{n} S_i - \bigcap_{i=1}^{n} S_i - S_0 \right) \to \min$, где $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ – площадь пересечений использованных геометрических объектов, $\left(\sum_{i=1}^{n} S_i - \bigcap_{i=1}^{n} S_i - S_0 \right)$ – площадь частей геометрических объектов, вышедших за края покрываемой поверхности. Кроме того, можно использовать комплексный критерий (аддитивный или мультипликативный). В рассматриваемом подходе принято, что все объекты имеют растровую структуру.

2. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ И МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

Исходная поверхность S_0, имеет ширину a и высоту b, вычисляемую по самой дальней точке. В алгоритме покрытия двумерными матрицами каждая покрываемая область представляется в виде матрицы, размерность которой увеличена справа и слева на размер самого большого покрывающего объекта. Данная матрица имеет размерность x на y, где x – количество столбцов, а y – количество строк. Эту область необходимо покрыть объектами из множества S, в котором описан каждый объект S_i, имеющий размеры c_i и d_i. В двумерной матрице каждая ячейка представляет собой пиксель на плоскости (Ox; Oy), который может принимать следующие значения: «0» – значение точки, которая не лежит в области S_0; «1» – значение точки (*SkIp*), которая лежит в области S_0; «2» – значение точки (*Success*), которая однократно покрыта объектом S_i и находится на поверхности S_0; «*a,b,c,…*» – значение точки (*Miss*), которая покрыта определенное количество раз объектами S_i, но находится вне поверхности S_0; «*A, B, C,…*» – значение точки (*Overflow*), которая покрыта определенное количество раз объектами S_i и находится на поверхности S_0. Введены следующие обозначения: I – количество пропусков «*SkIp*» (точки со значением «1»); L – количество успехов «*Success*» (точки со значением «2»); M – количество промахов «*Miss*» (точки со значением «*a, b, c,…*»); O – количество переполнений «*Overflow*» (точки со значением «*A, B, C,…*»); *Sum* – количество точек всех используемых покрывающих объектов S_i.

Для определения эффективности покрытия введены дополнительно четыре растровых коэффициента:

$$K_L = L/Sum;\ K_M = M/Sum;\ K_O = O/Sum;\ K_I = I/Sum;$$

Коэффициент K_L «*Success*» отражает эффективность покрытия поверхности S_0 ($0 < K_L \leq 1,\ K_L \to 1$). Коэффициент K_M «*Miss*» показывает часть точек, которые выходят за границы покрываемой поверхности ($K_M \to 0$). Коэффициент K_O «*Overflow*» показывает часть точек, которые перекрываются разными объектами S_i внутри покрываемой поверхности ($K_O \to 0$). Коэффициент K_I «*SkIp*» показывает часть точек покрываемой поверхности, которые были не покрыты объектами S_i ($K_I \to 0$). Программа реализует следующие оптимизационные алгоритмы:

Алгоритм «первый подходящий» (*First Fit*)**.** Алгоритм предполагает простую укладку геометрических объектов на первую встреченную пустую область на покрываемой поверхности. Он является однопроходным и не гарантирует получения хорошего результата, но дает возможность построения хорошего начального приближения.

Вероятностный алгоритм (*Probabilistic Algorithm*)**.** В вероятностном алгоритме каждому из m объектов присваивается некоторая вероятность использования (например, в зависимости от площади объекта). Затем объекты упорядочиваются по уменьшению вероятности использования. Далее поверхность покрывают при помощи алгоритма «первый подходящий». Процесс повторяется N раз. Затем выбирают решение с лучшим значением критерия оптимизации.

Рекурсивный алгоритм. Рекурсия – мощный подход, позволяющий разбивать сложную задачу на части всё меньшего и меньшего размера до тех пор, пока они не станут настолько малы, что решение этих подзадач сведется к набору простых операций. Решение небольших подзадач автоматически приводит к решению больших задач, которые из них составлены. Рекурсия базируется на принципах иерархичности, которая присуща всем живым организмам. Рекурсивный подход к решению задачи оптимального геометрического покрытия предполагает последовательное разбиение покрываемой поверхности на меньшие «подповерхности», которые затем покрываются объектами при помощи другого алгоритма. Очевидно, что сравнительно небольшую поверхность проще покрыть объектами. Кроме того, удачное покрытие одной части поверхности можно продублировать на другие её части, имеющие ту же форму.

Генетический алгоритм (*Genetic Algorithm*) — это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Он состоит из нескольких этапов: формирование начальной популяции, селекция, выполнение операций скрещивания, мутация и формирование новой популяции. Эффективность алгоритма очень сильно зависит от параметров (размер начальной популяции, тип селекции, уровень мутации, уровень элитизма и др.), подбираемых опытным путём.

Самонастраивающийся генетический алгоритм. В связи с многочисленностью параметров в обычном генетическом алгоритме и сложностью их настройки был разработан самонастраивающийся генетический алгоритм, который предполагает автоматический подбор части параметров в процессе работы алгоритма. Для этого в процессе поиска решения отслеживается какой тип селекции (уровень мутации, элитизма и др. параметры) позволяет получать решения с наилучшими значениями критерия оптимизации. В дальнейшем эти значения параметров применяются с большей вероятностью. Кроме того, самонастраивающийся генетический алгоритм предполагает использование стратегии инцеста, т. е. чем больше родители похожи между собой, тем больше вероятность мутации для потомка. Такой подход позволяет значительно упростить сложную процедуру подборки параметров и повысить эффективность генетического алгоритма.

Гибридный генетический алгоритм (*Hybrid Algorithms*). Идея гибридных алгоритмов заключается в сочетании генетического алгоритма с другим методом поиска, подходящим для поставленной задачи. В каждом поколении все сгенерированные потомки оптимизируются выбранным методом и затем заносятся в новую популяцию. Таким образом, каждая особь в популяции достигает локального оптимума, вблизи которого она находится. Эффективность гибридных алгоритмов обычно очень высока, так как попадание одной из особей в область глобального максимума обычно достаточно велика. В данной работе рассматривается сочетание генетического алгоритма с рекурсивным алгоритмом.

Экстремальный алгоритм (*Extreme Algorithm*)**.** В отличие от генетического алгоритма, экстремальный алгоритм работает не с популяцией, а только с одним решением, которое шаг за шагом улучшается. Поверхность покрытия последовательно разбивается на равные по площади части, на наихудшей из которых производится перестановка геометрических объектов. Основная стратегия метода в том, чтобы найти те компоненты решения, которые влияют на него наихудшим образом, и постепенно улучшать их.

Метод муравьиных колоний (*Ant Colony Algorithm*)**.** Алгоритм основан на тех же принципах, по которым муравьи находят кратчайший путь между двумя точками. Геометрические объекты по одному случайным образом добавляются на покрываемую поверхность, затем отыскивается заданное число пробных решений. Расстановки геометрических объектов, которые дают наилучшие результаты, в дальнейшем выпадают с большей вероятностью.

Перечисленные методы обладают большой степенью универсальности, но являются по существу лишь методологической основой для построения конструктивных вычислительных схем решения конкретных прикладных задач и следовательно, требуется разработка специальных алгоритмических процедур.

Предложенный целочисленный алгоритм наложения двумерных матриц позволяет значительно сократить вычислительные затраты на анализ вариантов решений в оптимизационных процедурах. Интерфейс выполнен в виде диалоговых окон, которые изображены на рис. 1.

Во время работы программы в нижней части стартового окна можно видеть процесс выполнения алгоритмов в виде трех строк состояния. Окно программы разбито на шесть областей. Слева три области используются для добавления покрываемых поверхностей и групп покрывающих объектов. В средней части расположены алгоритмы, реализованные в программе. Выбранный алгоритм перемещается в нижнее окно выполнения. В крайней правой области при выборе определенного выполнения алгоритма появляются его настраиваемые и отображаемые параметры. В выводимых параметрах алгоритма можно получить числовые результаты для всех вариантов выполнения программы. Для этих данных рассчитывается математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение критериев эффективности покрытия поверхности для конкретного варианта покрытия: K , K_L , n и др.

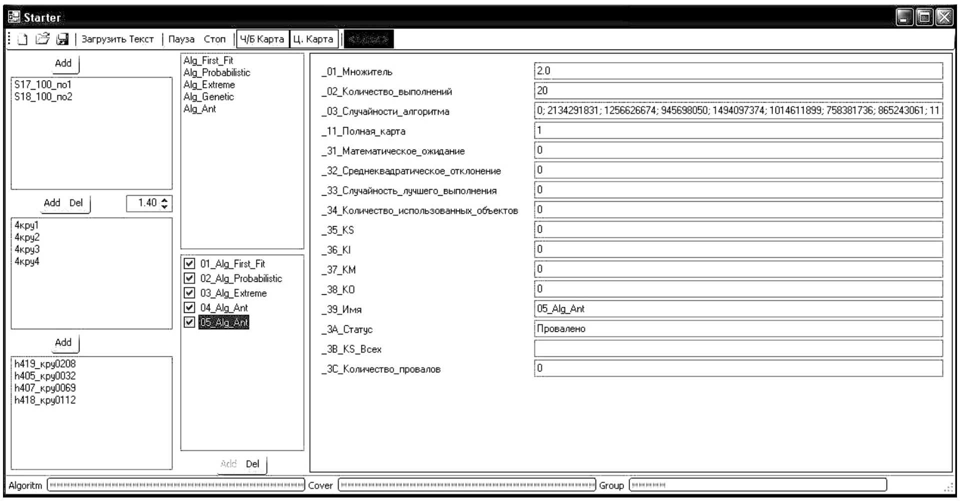

Рис. 1. Окно «*Starter*» интерфейса программы

3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Все рассмотренные выше алгоритмы были многократно протестированы для различных типов геометрических объектов: квадраты, прямоугольники, Г-образные объекты, Т-образные объекты, П-образные объекты, круги, смешанные наборы (см. рис. 2).

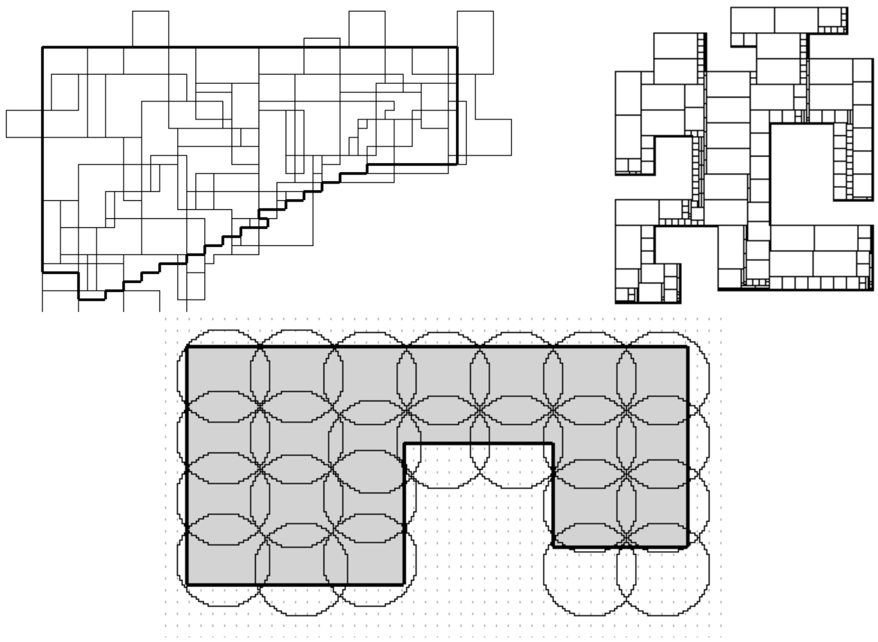

Рис. 2. Примеры геометрических покрытий для различных областей и объектов

Результаты сравнительного анализа работы алгоритмов представлены в табл. 1. Вычислительные эксперименты показали, что наилучшие результаты дает самонастраивающийся генетический алгоритм и метод муравьиных колоний. Они достаточно просты в настройке, но требуют больших временных затрат.

Разработанный эффективный целочисленный способ кодирования геометрических объектов и решений позволяет достаточно быстро обрабатывать промежуточные варианты решений, производить с ними необходимые для каждого конкретного алгоритма оптимизационные процедуры.

Таблица 1

Эффективность алгоритмов покрытия сложных ортогональных областей объектами различного типа

Типы геометрических объектов	**Среднее значение критерия оптимизации K для различных алгоритмов**			
	Вероятностный алгоритм	Генетический алгоритм	Самонастраивающийся алгоритм	Алгоритм муравьиных колоний
Квадраты	0,96	0,98	0,99	0,98
Прямоугольники	0,88	0,95	0,97	0,93
Г-образные объекты	0,81	0,84	0,94	0,84
Т-образные объекты	0,77	0,84	0,91	0,81
П-образные объекты	0,68	0,72	0,83	0,67
Круги	0,58	0,64	0,70	0,61
Смешанные наборы	0,57	0,72	0,72	0,62

4. АГРОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПОЛИВА

Организация системы полива начинается с выбора и размещения оборудования для полива, от которого зависит организация трубопроводов. Зона полива определяется мощностью насосов. Сокращение количества оборудования уменьшит бюджет системы, а визуальное отображение позволит убедиться в полном покрытии нужного участка (рис. 3). Оборудование для полива образует диаграмму в виде кругов с различным диаметром. В примере используются круги с диаметром 5, 9, 12, 16, 20, 24, 28 пикселей. В табл. 2 приведены результаты работы алгоритмов по организации системы полива. Покрывающие объекты сформированы в группы по 4 круга с постепенным ростом диаметра полива.

Пример организации системы полива на рисунке 4 представлен компанией «Аквабаланс» на сайте *http://www.aquabalance.ru.*

Из табл. 2 видно, что хорошие результаты по коэффициенту покрытия дают экстремальный алгоритм, муравьиный алгоритм и в некоторых случаях даже первый подходящий алгоритм показывает приемлемые результаты вследствие применения вероятностных процедур и выполнения большого количества перебора вариантов.

Экстремальный алгоритм имеет глубину рекурсии равную 1000 и за 50 выполнений достигает высоко результата по коэффициенту эффективности покрытия, однако для лучшего покрытия он использует круги меньшего диаметра, что приводит к увеличению числа используемых объектов. Такой результат работы алгоритма на практике можно тоже использовать для специфических реализаций, но основной целью программы является сокращение количества использованных разбрызгивателей без потери эффективности покрытия. Лучшим в данном случае является муравьиный алгоритм по полной карте.

Благодаря использованию полной карты муравьиный алгоритм размещает покрывающие объекты, не привязываясь к краям покрываемой поверхности. Также он использует группирование объектов по площади и размещает объекты сначала наилучшим способом, а потом подставляет объекты, начиная с наименьшей площади, заполняя пустоты.

Благодаря рациональному выбору места размещения и перебору групп объектов алгоритм муравьиных колоний достигает хорошего результата, который можно использовать для оптимизации проекта.

Таблица 2

Результаты работы алгоритмов по размещению оборудования системы полива

Группа № п/п	Вариант алгоритма	Показатели результатов покрытий	
		K_L	n
1 круги диаметром 5,9,12,16	*Первый подходящий*	0,41091	18
	Вероятностный	0,39187	10
	Экстремальный	0,45028	27
	Муравьиных колоний	0,21815	15
2 круги диаметром 9,12,16,20	*Первый подходящий*	0,34170	12
	Вероятностный	0,24216	9
	Экстремальный	0,38730	16
	Муравьиных колоний	0,29078	7
3 круги диаметром 12,16,20,24	*Первый подходящий*	0,28956	9
	Вероятностный	0,16125	8
	Экстремальный	0,37304	12
	Муравьиных колоний	0,29099	5
4 круги диаметром 16,20,24,28	*Первый подходящий*	0,28472	6
	Вероятностный	0,29428	7
	Экстремальный	0,34876	8
	Муравьиных колоний	0,38767	5

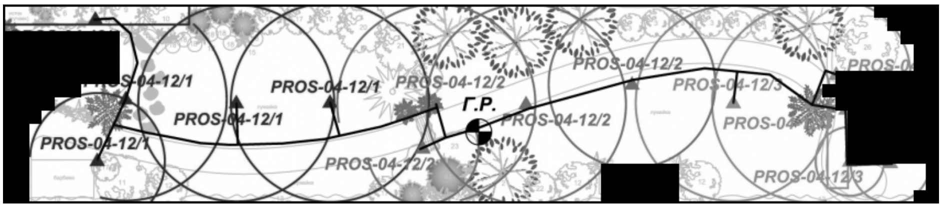

Рис. 3. План участка полива

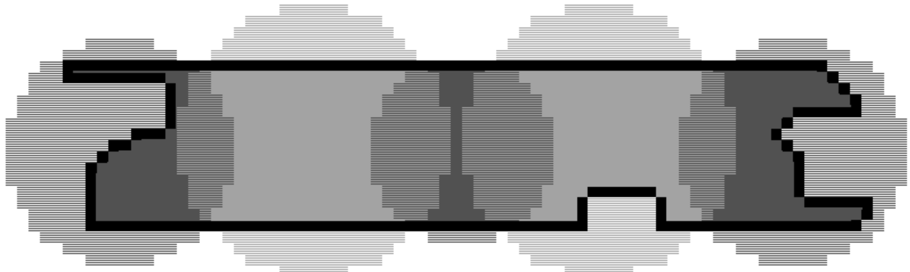

Рис. 4. Результат покрытия алгоритмом муравьиных колоний участка полива группой №4

Для реального проекта согласно существующим размещениям используется 11 разбрызгивателей, а алгоритм муравьиных колоний расположил 5 разбрызгивателей (рис. 3, 4). Таким образом, уменьшилось на шесть количество разбрызгивателей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение разработанных алгоритмов и программ может существенно помочь в проектировании агротехнических системах полива и других систем, например, систем охранной и пожарной сигнализации, видеонаблюдения, сотовой связи, телекоммуникаций, систем рационального использования материалов и площадей и т.п. Формируя различные группы объектов в зависимости от формы диаграммы направленности и стоимость оборудования, можно получать разные схемы покрытия. Из полученных результатов выбирается наиболее приемлемый исходя из индивидуальных особенностей системы и покрываемой поверхности. Для использования этих покрытий в проектировании нужна доработка, так как все особенности покрываемой поверхности и объектов учесть нельзя, однако использование оптимизационных алгоритмов и соответствующих программ значительно упрощает ручную проработку и предохраняет от ошибки. Графическая визуализация результатов дает наглядное представление о покрытии, а численное выражение параметров качества покрытия позволяет оценить и сравнить варианты решения задачи и результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Канторович Л.В.** Рациональный раскрой промышленных материалов / Л.В. Канторович, В.А. Заллгаллер. – СПб.: Невский диалект, 2012. – 304 с.

[2] **Мухачева Э.А.** Модели и методы расчета раскроя-упаковки геометрических объектов / Э.А. Мухачева, М.А. Верхотуров, В.В. Мартынов. – Уфа: УГАТУ, 1998. – 216 с.

[3] **Романовский И.В.** Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. – М.: Наука, 1977. – 420 с.

[4] **Стоян Ю.Г.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – Киев: Наукова думка, 1986. – 268 с.

[5] **Филиппова А.С.** Задачи о минимальном покрытии ортогональных многоугольников с запретными участками / А.С. Филиппова, В.Ю. Кузнецов // Информационные технологии. – 2008. – № 9 (145). – С. 60–65.

[6] **Фроловский В.Д.** Оптимизация раскроя материалов на оборудовании с ЧПУ (модели, методы, алгоритмы) / В.Д. Фроловский. – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 124 с.

[7] **Dorigo M.** The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents / M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Colorni // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1996. – № 26. – P. 29–41.

Забелин Сергей Леонидович, аспирант Сибирского государственного университета телекоммуникации и информатики. Основное направление научных исследований: оптимальное размещение геометрических объектов в задачах «раскроя–упаковки–покрытия». Имеет 10 публикаций. E-mail: zabelinsl@mail.ru.

Фроловский Владимир Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований: моделирование и автоматизация процессов геометрического проектирования. Имеет более 100 публикаций, в том числе 2 монографии, 5 учебных пособий. E-mail: frolovsky@asu.cs.nstu.ru.

Zabelin S.L., Frolovsky V.D.

Development and application of metaheuristic algorithms for solving the problem of covering

The problem of geometric coverage is a special case of the problem of optimal design and belongs to the class of "cutting and packaging." Required to place certain geometric objects on the substrate in such a way that the entire surface was covered entirely with the smallest area overlaps and misses objects, and use the least amount of objects. Described program helps to solve problems in agricultural irrigation. Implemented the first fit, probabilistic, extreme, genetic, ant algorithms and other.

Key words: metaheuristic algorithms, geometric coverage problems, *NP*-completeness problems, ant algorithms, probabilistic algorithm, extreme algorithm, the optimization problem of the coverage.