

УДК 621.391

Точность оценки временного положения сейсмического сигнала в системах охранного наблюдения*

С.Г. ФИЛАТОВА

Определение потенциальной точности алгоритма оценки временного положения сейсмического сигнала является важным этапом при его реализации. Она позволяет объективно судить о качестве получаемых оценок. В статье определена нижняя граница условной дисперсии ошибок, удовлетворяющая неравенству Крамера-Рао. Приведены результаты сравнения точности алгоритма, в котором для определения временного положения сигнала используются оценки его локальных мощностей.

Ключевые слова: оценка максимального правдоподобия, временное положение, сейсмические системы охраны, потенциальная точность.

ВВЕДЕНИЕ

При разработке алгоритма определения временных положений сейсмических сигналов [1] используется модель, согласно которой наблюдаемый процесс представляется в виде суммы:

$$\vec{X} = \vec{\Phi} + \vec{S}. \quad (1)$$

Здесь $\vec{\Phi} = \left\| \Phi [1], \Phi [2] \dots \Phi [I] \right\|^T$ – фон, который является белым гауссовым шумом с нулевым средним и дисперсией D_{Φ} ; $\vec{S} = \left\| S [1], S [2] \dots S [I] \right\|^T$ – полезный сигнал, который является гауссовым процессом с нулевым средним и дисперсией, меняющейся по правилу:

$$D[i, i_{\text{пп}}] = F_{\text{п}}[i, i_{\text{пп}}] \sum_{k=1}^K F_k[i], \quad i = 1..I. \quad (2)$$

Функция $F_{\text{п}}[i, i_{\text{пп}}]$ описывает огибающую пачки импульсов (рис. 1), соответствующую законченному проходу человека мимо датчика, а $F_k[i]$ – распределения интенсивности K сигналов (импульсов), соответствующих шагам человека. Огибающая пачки импульсов аппроксимируется функцией

$$F_{\text{п}}[i, i_{\text{пп}}] = D_{\text{п}} e^{\left(-\frac{(i-i_{\text{пп}})^2}{2\tau_{\text{пп}}^2} \right)}, \quad i = 1..I, \quad (3)$$

где $D_{\text{п}}$ – максимальная дисперсия пачки импульсов, $i_{\text{пп}}$ – временное положение пачки, $\tau_{\text{пп}}$ – параметр, определяющий длительность пачки.

* Статья получена 9 октября 2012 г.

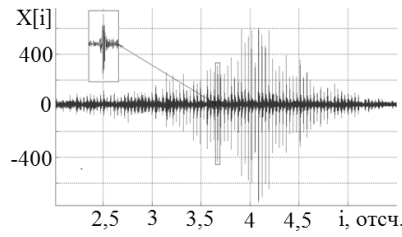


Рис. 1. Пример сейсмического сигнала, полученного после выбеливания

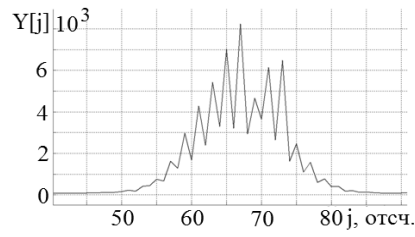


Рис. 2. Вспомогательная последовательность $\bar{Y}$, $\Delta = 500$

Огибающая импульса аппроксимируется функцией вида:

$$F_k [i] = e^{\left(-\frac{(i-i_k)^2}{2\tau_k^2} \right)}, \quad i = 1..I, \quad (4)$$

где i_k – временное положение k -го импульса, τ_k – его длительность. Неравномерный характер перемещения объекта наблюдения вводится в модель соотношением:

$$i_k = i_{k-1} + T + \Delta T_k, \quad (5)$$

в котором T – средний период следования импульсов, ΔT_k – случайная составляющая, определяющая отклонение от среднего периода для k -го импульса.

Для определения временного положения пачки импульсов $i_{\text{пи}}$ методом максимального правдоподобия образуется вспомогательная последовательность $\bar{Y} = \| Y[1], Y[2] .. Y[J] \|^T$ (рис. 2):

$$Y[j] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=t-\Delta/2}^{t+\Delta/2} X^2[i], \quad j = 1..J. \quad (6)$$

Её элементы независимы и имеют смысл локальных мощностей исходного сигнала. Оценки временного положения импульсов находятся путём совместного решения уравнений максимального правдоподобия [1]:

$$\sum_{j=1}^J \frac{j-i_{\text{пи}}^*}{\tau_{\text{пи}}'^2} H[j] e^{\left(-\frac{(j-i_{\text{пи}}^*)^2}{2\tau_{\text{пи}}'^2} \right)} = \frac{f_0}{2} \left(e^{\left(-\frac{(i_{\text{пи}}^*-1)^2}{\tau_{\text{пи}}'^2} \right)} - e^{\left(-\frac{(i_{\text{пи}}^*-J)^2}{\tau_{\text{пи}}'^2} \right)} \right), \quad (7)$$

$$f_0 = \left(\sum_{j=1}^J e^{\left(-\frac{(j-i_{\text{пи}}')^2}{\tau_{\text{пи}}'^2} \right)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^J (Y[j] - D_{\Phi}) e^{\left(-\frac{(j-i_{\text{пи}}')^2}{2\tau_{\text{пи}}'^2} \right)}. \quad (8)$$

1. АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ

Показателем эффективности при использовании небайесовских оценок параметра служит граница Крамера-Рао [2, 3]. Для несмещённых оценок неравенство Крамера-Рао записывается в виде

$$\sigma^2 \{ \hat{\theta} | \theta \} \geq \left\{ \left[\frac{d \ln w(X | \theta)}{d\theta} \right]^2 \right\}^{-1} = - \left[\frac{d^2 \ln w(X | \theta)}{d\theta^2} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Для независимой выборки $\bar{X} = \| X[1], X[2] \dots X[I] \| ^T$: $\ln w(\bar{X} | \theta) = \sum_{i=1}^I \ln w(X[i] | \theta)$.

Поскольку наблюдаемый процесс $\bar{X}$ является гауссовым с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной сумме (см. (1)) дисперсий фона D_Φ и полезного сигнала $D[i, i_{\text{пн}}]$, а также с учётом того, что параметром, подлежащим оцениванию, является временное положение пачки $i_{\text{пн}}$, одноэлементная функция правдоподобия $w(X[i] | \theta)$ записывается следующим образом:

$$w(X[i] | i_{\text{пн}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)}} \exp \left(-\frac{X^2[i]}{2(D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)} \right). \quad (10)$$

Логарифмируя и вычисляя вторую производную, получаем:

$$\frac{d^2 \ln w(\bar{X} | i_{\text{пн}})}{di_{\text{пн}}^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I (X^2[i] A[i, i_{\text{пн}}] + B[i, i_{\text{пн}}]),$$

где

$$A[i, i_{\text{пн}}] = \frac{D[i, i_{\text{пн}}]}{\tau_{\text{пн}}^2 (D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)^2} \left(1 + \frac{2(i - i_{\text{пн}})^2 D[i, i_{\text{пн}}]}{\tau_{\text{пн}}^2 (D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)} - \frac{(i - i_{\text{пн}})^2}{\tau_{\text{пн}}^2} \right), \quad (11)$$

$$B[i, i_{\text{пн}}] = \frac{D[i, i_{\text{пн}}]}{\tau_{\text{пн}}^2 (D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)} \left(\frac{(i - i_{\text{пн}})^2}{\tau_{\text{пн}}^2} - \frac{(i - i_{\text{пн}})^2 D[i, i_{\text{пн}}]}{\tau_{\text{пн}}^2 (D[i, i_{\text{пн}}] + D_\Phi)} - 1 \right). \quad (12)$$

Усредняя, получаем:

$$\frac{d^2 \ln w(\bar{X} | i_{\text{пн}})}{di_{\text{пн}}^2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^I (D[i, i_{\text{пн}}] A[i, i_{\text{пн}}] + B[i, i_{\text{пн}}]).$$

Окончательно из (9):

$$\sigma_{\min}^2 \{ \hat{i}_{\text{пн}} | i_{\text{пн}} \} = - \left[\frac{d^2 \ln w(\bar{X} | i_{\text{пн}})}{di_{\text{пн}}^2} \right]^{-1} = 2 \left[\sum_{i=1}^I (D[i, i_{\text{пн}}] A[i, i_{\text{пн}}] + B[i, i_{\text{пн}}]) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Функция (13) зависит от нескольких параметров: дисперсии фона D_Φ , длительности пачки импульсов $\tau_{\text{пи}}$, её пиковой мощности $D_{\text{п}}$, среднего периода следования импульсов T и их длительности τ_k . Очевидно, что на неё не влияет истинное значение временного положения пачки импульсов $i_{\text{пи}}$.

Так как оценка (13) требует знания зависимости дисперсии $D[i, i_{\text{пи}}]$ от времени в пределах пачки импульсов, при анализе поведения оценки $\sigma_{\min}^2 \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ в различных условиях задавались параметры, описывающие дисперсию процесса $X[i]$ ((2)–(5)), затем производился расчёт по (11)–(13). При этом длительности импульсов и средний период следования устанавливались постоянными для всех экспериментов ($\tau_k = 20$ отсч., $T = 300$ отсч.), а длительность пачки $\tau_{\text{пи}}$ определялась через произведение среднего периода и количества импульсов в пачке K .

Заметим, что флуктуации временных положений импульсов «внутри» пачки (5), вызванные неравномерным характером перемещения объекта наблюдения в зоне действия сейсмической системы охраны, приводят к тому, что измеренные значения $\sigma_{\min}^2 \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ являются случайными при фиксированных прочих параметрах (D_Φ , $\tau_{\text{пи}}$, $D_{\text{п}}$, T , τ_k). Усреднение случайных величин $\sigma_{\min}^2 \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ по указанному параметру является достаточно сложной задачей, поэтому изучение влияния флуктуаций производилось следующим образом. Временные положения импульсов относительно центра пачки фиксировались, далее анализировались два случая. В первом параметры функций (2)–(5) задавались таким образом, чтобы центр пачки находился между импульсами, во втором – чтобы центр пачки совпадал с центром одного из импульсов.

Рис. 3–5 иллюстрируют зависимость потенциальной среднеквадратической ошибки (СКО) оценки временного положения пачки $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от флуктуации временных положений импульсов «внутри» пачки. На графиках приведены зависимости потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ при различном количестве импульсов в пачке K , длительности наблюдения I и отношения сигнал-шум (ОСШ) в момент максимальной интенсивности сигнала пачки $q^2 = \frac{D_{\text{п}}}{D_\Phi}$. Верхним кривым на графиках соответствует случай, когда центр пачки находится между импульсами, а нижним кривым – центр пачки совпадает с центром импульса.

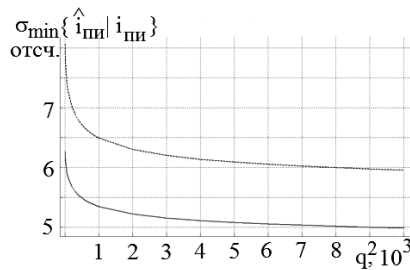


Рис. 3. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от q^2 при различном расположении импульсов относительно центра пачки, $K = 10$, $I = 4000$ отсч.

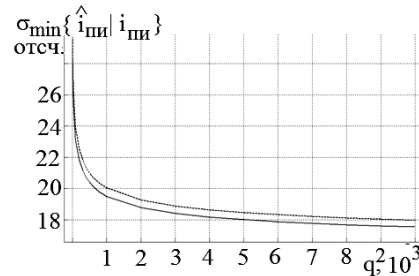
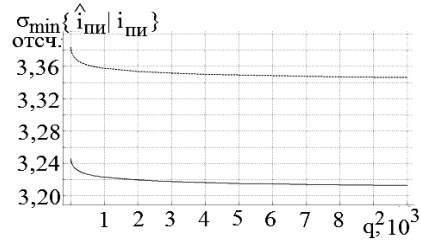


Рис. 4. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от q^2 при различном расположении импульсов относительно центра пачки, $K = 50$, $I = 17000$ отсч.

Рис. 5. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от q^2 при различном Расположении импульсов относительно центра пачки, $K = 50$, $I = 50000$ отсч.



На рис. 3 приведены зависимости потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от ОСШ в момент максимальной интенсивности сигнала пачки при различном расположении импульсов относительно центра пачки, при количестве импульсов $K = 10$ и длительности наблюдения $I = 4000$ отсч. Длительность пачки при этом составляла $\tau_{\text{пи}} = 3000$ отсч. На рис. 4–5 показаны зависимости потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от ОСШ в момент максимальной интенсивности сигнала пачки при различном расположении импульсов относительно центра пачки, при количестве импульсов $K = 50$, а также длительности наблюдения $I = 17000$ отсч. и $I = 50000$ отсч., соответственно. Длительность пачки при этом $\tau_{\text{пи}} = 15000$ отсч. Различие между верхней кривой, когда центр пачки находится между импульсами, и нижней кривой, когда центр пачки совпадает с центром импульса, невелико. Так, для рис. 3 различие между кривыми составляет приблизительно один отсчёт, а для рис. 4 и 5 – меньше одного отсчёта. Поэтому для дальнейшей оценки потенциальной точности используется случай, для которого центр пачки совпадает с центром импульса (нижняя кривая).

Увеличение ОСШ приводит к уменьшению потенциальной СКО оценки временного положения пачки $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ (рис. 3–5). При увеличении интервала наблюдения (рис. 4–5) имеет место резкое снижение величины потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$, что также подтверждается рис. 6. На рис. 6 приведены зависимости потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от размера интервала наблюдения при различных ОСШ в момент максимальной интенсивности сигнала пачки. Исследования проводились для пачки длительностью $\tau_{\text{пи}} = 15000$, содержащей $K = 50$ импульсов. При интервале наблюдения, меньшем длительности пачки, СКО ошибок оценки временного положения пачки не превышает среднего периода следования импульсов. С ростом ОСШ в момент максимальной интенсивности сигнала пачки наблюдается уменьшение $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$.

На рис. 7 показана зависимость потенциальной СКО оценки временного положения пачки $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от длительности импульса при различных ОСШ в момент максимальной интенсивности сигнала пачки. Увеличение длительности импульса приводит к увеличению энергии наблюдаемого сигнала, что в свою очередь вызывает уменьшение потенциальной СКО $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ оценки временного положения пачки.

Рис. 8 иллюстрирует поведение потенциальной СКО оценки временного положения пачки $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ в зависимости от количества импульсов K при различных ОСШ. При получении этих зависимостей принималось, что длительность пачки $\tau_{\text{пи}} = T \cdot K$, при этом длительность наблюдения выбиралась по правилу: $I = \tau_{\text{пи}} + 2000$ (отсч.). Увеличение числа импульсов в пачке при фиксированных длительности импульса ($\tau_k = 20$ отсч.) и среднем периоде следования ($T = 300$ отсчетов) приводит к повышению нижней границы среднеквадрати-

ческих ошибок $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ (рис. 4–5, 8). При увеличении числа импульсов энергия пачки возрастает, что ведёт к получению более точных оценок. Однако увеличение количества импульсов приводит к уменьшению эффективной полосы спектра сигнала, что, в свою очередь, ухудшает оценки. Взаимодействие этих противоположных механизмов и ведёт, в итоге, к росту потенциальных ошибок.

Этот же эффект объясняет и увеличение $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ с ростом среднего периода следования импульсов, что иллюстрируется рис. 9, на котором приведена зависимость потенциальной СКО оценки временного положения пачки от среднего периода следования импульсов T при различных ОСШ и фиксированных длительности импульса ($\tau_k = 20$ отсч.) и количестве импульсов $K = 50$. При этом длительность пачки $\tau_{\text{пи}} = T \cdot K$, а длительность наблюдения $I = \tau_{\text{пи}} + 2000$ (отсч.).

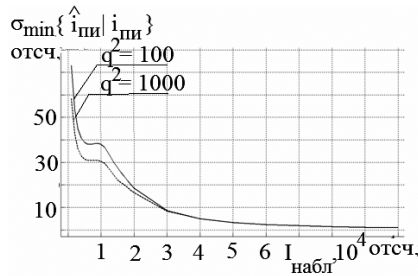


Рис. 6. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от $I_{\text{набл}}$

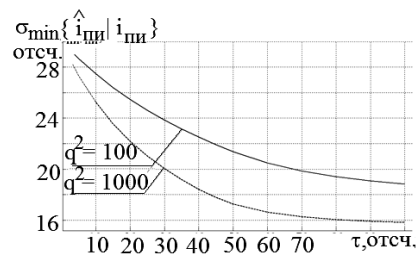


Рис. 7. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от τ_k

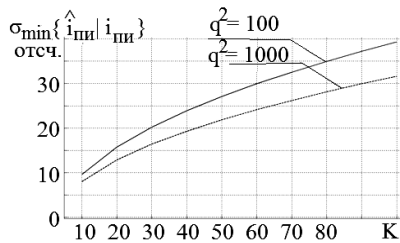


Рис. 8. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от K

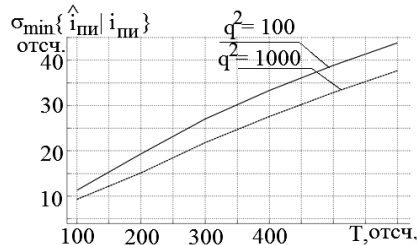


Рис. 9. Зависимость $\sigma_{\min} \{ \hat{i}_{\text{пи}} | i_{\text{пи}} \}$ от T

2. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Разработанный в [1] алгоритм, в котором для определения временного положения сигнала используются оценки его локальных мощностей, был исследован методом статистического моделирования. Эксперимент проводился путем генерирования и обработки ансамбля из 100 сигналов. При сопоставлении истинного $i_{\text{пи}}$ и измеренного $i_{\text{пи}}^*$ временного положения импульсов определялась ошибка измерения $\varepsilon_i = i_{\text{пи}} - i_{\text{пи}}^*$, а по совокупности экспериментов находились смещение и среднеквадратическая ошибка. На рис. 10 изображены зависимости СКО оценки временного положения пачки импульсов от ОСШ при различных размерах окна. С увеличением ОСШ точность получаемых оценок возрастает. Также наблюдается зависимость от длительности окна.

Рис. 11–12 иллюстрируют зависимости смещения и СКО оценки временного положения пачки импульсов от размера окна при различных ОСШ. С ростом Δ СКО ошибок увеличивается. Кроме того, как при больших, так и при малых размерах окна наблюдается наличие смещения получаемых оценок. Смещение, которым можно пренебречь, получается при длительности окна от 500 до 700 отсч. Зависимости СКО оценки временного положения пачки импульсов от количества импульсов в пачке при $q^2 = 100$ и различных размерах окна показаны на рис. 13. Видно, что с ростом количества импульсов ошибка возрастает, что вызвано сужением эффективной полосы частот сигнала.

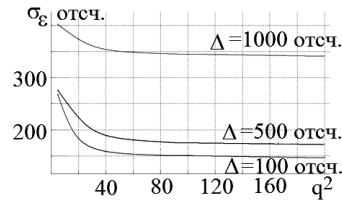


Рис. 10. Зависимость СКО оценки $i_{\text{пи}}$ от q^2

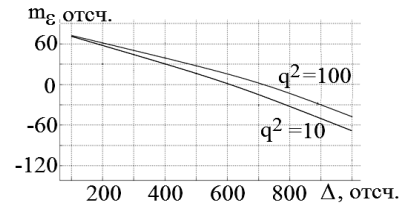


Рис. 11. Зависимость смещения оценки $i_{\text{пи}}$ от Δ

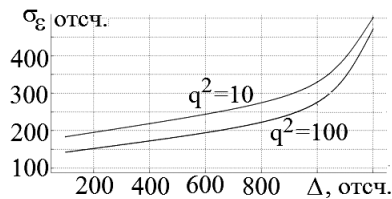


Рис. 12. Зависимость СКО оценки $i_{\text{пи}}$ от Δ

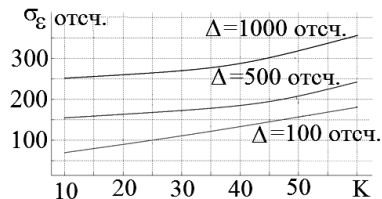


Рис. 13. Зависимость СКО оценки $i_{\text{пи}}$ от количества импульсов, $q^2 = 100$

Поскольку основная цель разработки алгоритма, в котором для определения временного положения сигнала используются оценки его локальных мощностей, состояла в уменьшении задержек выдачи результата при условии сохранения приемлемой точности, были проанализированы зависимости смещения и СКО оценки временного положения пачки от длительности наблюдения $I_{\text{набл}}$ при $q^2 = 100$ и различных размерах окна, изображённые на рис. 14–15. Они показывают, что приемлемая точность достигается при наблюдении не менее чем половины пачки импульсов. При аппроксимации огибающей пачки по наблюдению меньше половины пачки, оценка центра пачки является смещённой и сильно флюктуирующей. В этом случае качество оценок снижается значительно в условиях априорной неопределённости относительно параметров сигнала.

Сравнение графиков рис. 3–9 и рис. 10–15 показывает различие между потенциальной точностью оценки временного положения пачки и точностью алгоритма, в котором для определения временного положения сигнала используются оценки его локальных мощностей. Оно вызвано преобразованием (6), которое изменяет шкалу времени с «быстрого» на «медленное». Шумы, обусловленные этим преобразованием, являются аддитивными с равномерным распределением и дисперсией $\sigma_{\text{пр}}^2 = \Delta^2/12$.

В табл. 1 приведена зависимость СКО шумов преобразования $\sigma_{\text{пр}}$ от длительности окна Δ . При этом очевидно значительное (по сравнению с потенциальной точностью) ухудшение точности алгоритма при $\Delta = 1000$ отсч. и $\Delta = 500$ отсч., что подтверждается экспериментальными данными (рис. 10–15).

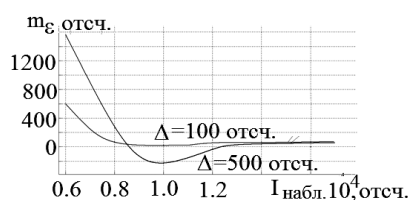


Рис. 14. Зависимость смещения оценки $i_{\text{ти}}$ от $I_{\text{набл}}$, $q^2 = 100$

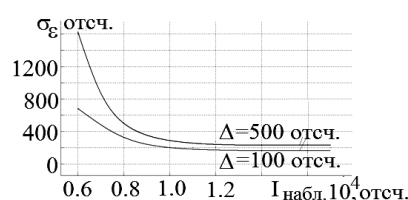


Рис. 15. Зависимость СКО оценки $i_{\text{ти}}$ от $I_{\text{набл}}$, $q^2 = 100$

Таблица 1

Зависимость СКО шумов преобразования от длительности окна Δ

Δ , отсч.	1000	500	100
$\sigma_{\text{шр}}$, отсч.	289	144	29

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм, в котором для определения временного положения сигнала используются оценки его локальных мощностей, позволяет получать оценки центра пачки с приемлемой точностью при наблюдении не менее половины пачки. Этот алгоритм, в отличие от алгоритма, который мог бы обеспечить точность, сравнимую с потенциальной, не требует знания параметров, описывающих «внутреннюю» структуру пачки – длительность импульсов, период их следования. Кроме того, использование оценок локальных мощностей вместо отсчетов сигнала (преобразование (6)) позволяет сократить объём вычислений, а значит и время ожидания результата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Спектор А.А. Определение временных положений сигналов для оценки движения человека в сейсмической системе охранного наблюдения / С.Г. Филатова, А.А. Спектор // Научный вестник НГТУ. – Новосибирск: ИПЦ ГОУ ВПО НГТУ, 2009. – Вып. 3 (36) – С. 57–66.
- [2] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
- [3] Казаринов Ю.М. Радиотехнические системы: учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / Ю.П. Гришин, В.П. Ипатов, Ю.М. Казаринов [и др.]; под ред. Ю.М. Казаринова. – М.: Высш. шк, 1990. – 496 с.

Филатова Светлана Геннадьевна, ассистент кафедры Теоретических основ радиотехники НГТУ. Основное направление научных исследований: статистическая обработка сигналов и изображений. Имеет 15 публикаций. E-mail: filatovasg@ngs.ru

Filatova S.G.

The precision of seismic signal time position estimation in a guard system

Determination of potential accuracy of seismic signal time position estimation algorithm is important stage of its implementation. It allows to judge about received estimation quality objectively. In this paper the lower bound of error conditional variance satisfied Kramer-Rao inequality is determined. The precision of algorithm based on local power estimation usage is compared with potential accuracy.

Key words: maximum likelihood method, time position, seismic guard system, potential accuracy.