Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2(51)

УДК 539.3

Методика вычисления параметров больших поворотов поперечных сечений гибкого стержня при расчетах в рамках его дифференциальной модели. Часть 1*

Н.В. ПУСТОВОЙ, В.Е. ЛЕВИН, Д.А. КРАСНОРУЦКИЙ

В задаче о больших перемещениях и поворотах гибкого криволинейного стержня в качестве параметров поворота удобно использовать компоненты вектора конечного поворота, но при численной реализации алгоритма решения нелинейной краевой задачи возникают определенные затруднения для значений модуля этого вектора, кратных полному обороту (2π). Они выражаются в невозможности определения производных от компонентов вектора поворота по длине стержня (определитель соответствующей СЛАУ становится равным нулю), что, в свою очередь, приводит к невозможности получения численного решения. В данной статье предложена методика, позволяющая использовать в численном алгоритме вектор конечного поворота для описания деформирования стержня для любых углов поворота поперечного сечения стержня (больше 2π), описан численный подход и представлен алгоритм подпрограммы для ЭВМ.

Ключевые слова: тонкий упругий стержень, вектор конечного поворота, особенность при больших поворотах, нелинейная краевая задача, численное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается дифференциальная модель тонкого упругого стержня [1, 2]. Стержень представляется осевой линией с прикрепленными в каждой точке трехгранниками, две оси которых совпадают с направлениями главных осей инерции поперечного сечения стержня, а третья направлена по касательной к осевой линии. Для описания поворотов этих трехгранников при деформировании тонкого стержня используется вектор конечного поворота [3]. Уравнения, связывающие кривизну осевой линии с внутренними моментами тонкого упругого стержня [1], имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\lambda_{mn}}{\partial s}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{2k} &= \frac{M_p\beta_{1k}\lambda_{kp}}{EJ_1},\\
\frac{\partial\lambda_{mn}}{\partial s}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{1k} &= \frac{M_p\beta_{2k}\lambda_{kp}}{EJ_2},\\
\frac{\partial\lambda_{mn}}{\partial s}\beta_{1m}\lambda_{kn}\beta_{2k} &= \frac{M_p\beta_{3k}\lambda_{kp}}{GJ_P}.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь $\lambda(s)$ – матрица поворота тройки ортов, связанных с поперечным сечением стержня, до деформирования они ориентированны так же, как орты глобальной системы координат; $\beta(s)$ – матрица поворота, описывающая начальную ориентацию трехгранников (главных осей

* *Статья получена 28 февраля 2013 г.*

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта Министерства образования и науки РФ № 7.822.2011.

инерции), связанных с поперечным сечением стержня; $M_{1,2,3}(s)$ – глобальные проекции внутреннего момента, возникающего в стержне при деформации; $EJ_{1,2}(s)$ – изгибные жесткости, $GJ_P(s)$ – жесткость на кручение; s – естественная координата – текущая длина осевой линии стержня.

При использовании проекций вектора конечного поворота $\vec{\omega}$ $\left(\lambda = \lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right)$ в качестве параметров, определяющих поворот поперечных сечений стержня при деформировании, выражения (1) принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial \lambda_{mn}}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{ds}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{2k} = \frac{M_p\beta_{1k}\lambda_{kp}}{EJ_1},\\
\frac{\partial \lambda_{mn}}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{ds}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{1k} = \frac{M_p\beta_{2k}\lambda_{kp}}{EJ_2},\\
\frac{\partial \lambda_{mn}}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{ds}\beta_{1m}\lambda_{kn}\beta_{2k} = \frac{M_p\beta_{3k}\lambda_{kp}}{GJ_P},\\
m, n, j, k, p = 1, 2, 3\,.
\end{gathered} \tag{2}
$$

При описании поворота с помощью вектора конечного поворота [3] определитель системы (2) становится равным нулю для значений модуля вектора поворота кратных 2π [4]. При таких поворотах становится невозможно определить из (2) производные вектора конечного поворота по длине стержня $\frac{\partial \omega_k}{\partial s}$, $k = 1, 2, 3$.

1. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ КОМПОНЕНТ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА

Исследуем уравнения (1), в матричной форме записи они имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
-\beta_3^T\frac{\partial \lambda}{\partial s}\lambda^T\beta_2 = \frac{1}{EJ_1}\beta_1^T\lambda\{M\},\\
\beta_3^T\frac{\partial \lambda}{\partial s}\lambda^T\beta_1 = \frac{1}{EJ_2}\beta_2^T\lambda\{M\},\\
\beta_1^T\frac{\partial \lambda}{\partial s}\lambda^T\beta_2 = \frac{1}{GJ_P}\beta_3^T\lambda\{M\},
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $\beta_k = \{\beta_{k1} \quad \beta_{k2} \quad \beta_{k3}\}^T$, $\{M\} = \{M_1 \quad M_2 \quad M_3\}^T$.

Пусть поперечное сечение в точке s стержня совершило некоторый конечный поворот, описываемый вектором $\vec{\omega}(s)$. Поворот близкого к s поперечного сечения описывается вектором конечного поворота $\vec{\omega}(s+\Delta s) = \vec{\omega}^*$. Представим поворот $\vec{\omega}^*$ в виде двух поворотов, сначала на некоторый вектор $\Delta\vec{\omega}$, затем на $\vec{\omega}$. Таким образом, матрицу поворота можно записать в следующем виде

$$
\lambda\left(\vec{\omega}^*\right) = \lambda\left[\vec{\omega}(s+\Delta s)\right] = \lambda(\vec{\omega})\cdot\lambda(\Delta\vec{\omega}) \equiv \lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}. \tag{4}
$$

Подставим (4) в первое уравнение (3):

$$-\beta_3^T \frac{\partial\left(\lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}\right)}{\partial s}\left(\lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}\right)^T\beta_2=\frac{1}{EJ_1}\beta_1^T\left(\lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}\right)\{M\}\,;$$

$$-\beta_3^T\left(\frac{\partial\lambda^{(\omega)}}{\partial s}\lambda^{(\Delta\omega)}+\lambda^{(\omega)}\frac{\partial\lambda^{(\Delta\omega)}}{\partial s}\right)\left(\lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}\right)^T\beta_2=$$

$$=\frac{1}{EJ_1}\beta_1^T\left(\lambda^{(\omega)}\cdot\lambda^{(\Delta\omega)}\right)\{M\}\,. \tag{5}$$

Представление матрицы поворота (4) предполагает, что приращение вектора поворота достигается только за счет $\Delta\vec{\omega}$, а вектор $\vec{\omega}$ не меняется по координате s, следовательно, соответствующая производная матрицы поворота $\dfrac{\partial\lambda^{(\omega)}}{\partial s}=0$. Устремим $\Delta s\to 0$, тогда $\Delta\vec{\omega}\to 0$, матрица $\lambda^{(\Delta\omega)}\to E$, (5) примет следующий вид:

$$-\beta_3^T\lambda^{(\omega)}\frac{\partial\lambda^{(0)}}{\partial s}\lambda^{(\omega)T}\beta_2=\frac{1}{EJ_1}\beta_1^T\lambda^{(\omega)}\{M\},$$

где $\dfrac{\partial\lambda^{(0)}}{\partial s}\equiv\left.\dfrac{\partial\lambda}{\partial s}\right|_{\vec{\omega}=0}$, аналогично преобразуются уравнения 2 и 3 из (3):

$$\beta_3^T\lambda^{(\omega)}\frac{\partial\lambda^{(0)}}{\partial s}\lambda^{(\omega)T}\beta_1=\frac{1}{EJ_2}\beta_2^T\lambda^{(\omega)}\{M\},$$

$$\beta_1^T\lambda^{(\omega)}\frac{\partial\lambda^{(0)}}{\partial s}\lambda^{(\omega)T}\beta_2=\frac{1}{GJ_P}\beta_3^T\lambda^{(\omega)}\{M\}. \tag{6}$$

Сохраним прежние обозначения для текущей матрицы поворота $\lambda^{(\omega)}\equiv\lambda$. В индексной форме записи уравнения (6) перепишутся следующим образом

$$-\frac{\partial\lambda_{mn}^{(0)}}{\partial s}\beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p}=\frac{M_p\beta_{1k}\lambda_{kp}}{EJ_1},$$

$$\frac{\partial\lambda_{mn}^{(0)}}{\partial s}\beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{1p}=\frac{M_p\beta_{2k}\lambda_{kp}}{EJ_2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\lambda_{mn}^{(0)}}{\partial s}\beta_{1k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p}=\frac{M_p\beta_{3k}\lambda_{kp}}{GJ_P}.$$

Справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial\lambda_{mn}^{(0)}}{\partial s}=\frac{\partial\lambda_{mn}^{(0)}}{\partial\omega_j}\frac{d\Delta\omega_j}{ds}\,;$$

в итоге, получим

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial \lambda_{mn}^{(0)}}{\partial \omega_j} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p} = \frac{M_p\beta_{1k}\lambda_{kp}}{EJ_1}, \\
\frac{\partial \lambda_{mn}^{(0)}}{\partial \omega_j} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{1p} = \frac{M_p\beta_{2k}\lambda_{kp}}{EJ_2}, \\
\frac{\partial \lambda_{mn}^{(0)}}{\partial \omega_j} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{1k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p} = \frac{M_p\beta_{3k}\lambda_{kp}}{GJ_P}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

В уравнениях (8) производные $\dfrac{\partial \lambda_{mn}^{(0)}}{\partial \omega_j}$ являются константами:

$$
\frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \omega_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \omega_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \omega_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

легко заметить, что $\dfrac{\partial \lambda_{mn}^{(0)}}{\partial \omega_j} = \varepsilon_{jmn}$, где $\varepsilon_{jmn} = \left(\vec{i}_j \cdot \vec{i}_m \cdot \vec{i}_n\right)$ – символы Леви-Чивиты. Таким образом, (8) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon_{jmn} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p} = \frac{M_p\beta_{1k}\lambda_{kp}}{EJ_1}, \\
\varepsilon_{jmn} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{3k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{1p} = \frac{M_p\beta_{2k}\lambda_{kp}}{EJ_2}, \\
\varepsilon_{jmn} \frac{d\Delta\omega_j}{ds} \beta_{1k}\lambda_{km}\lambda_{pn}\beta_{2p} = \frac{M_p\beta_{3k}\lambda_{kp}}{GJ_P}.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Система уравнений (9) (она же (8)) является системой линейных алгебраических уравнений относительно разыскиваемых производных $\dfrac{d\Delta\omega_j}{ds}$. Определитель такой системы всегда равен единице, в отличие от определителя системы (2), который стремится к нулю при стремлении модуля вектора конечного поворота к величинам кратным 2π. Можно получить:

$$
\beta \cdot \lambda \cdot \frac{d\Delta\vec{\omega}}{ds} = C \cdot \beta \cdot \lambda \cdot \{M\}, \text{ где } C = \begin{pmatrix} EJ_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & GJ_P^{-1} \end{pmatrix}. \tag{10}
$$

Умножим на $\beta^{-1} \equiv \beta^T$ слева, затем на $\lambda^{-1} \equiv \lambda^T$, получим

$$
\frac{d\Delta\vec{\omega}}{ds} = \lambda^T \beta^T \cdot C \cdot \beta \cdot \lambda \cdot \{M\}. \tag{11}
$$

Или в индексной форме записи

$$\frac{d\Delta\omega_j}{ds} = \lambda_{mj}\beta_{im}C_{ii}\beta_{ik}\lambda_{kp}M_p\,. \tag{12}$$

Найдем производную матрицы поворота, используя (4)

$$\frac{\partial\lambda(\omega)}{\partial s} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\lambda\left(\vec\omega(s+\Delta s)\right)-\lambda\left(\vec\omega(s)\right)}{\Delta s}\right) = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\lambda(\vec\omega)\cdot\lambda(\Delta\vec\omega)-\lambda(\vec\omega)}{\Delta s}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\lambda(\vec\omega)\cdot\lambda\left(\Delta\vec\omega_{,s}\cdot\Delta s\right)-\lambda(\vec\omega)}{\Delta s}\right) = (\text{ так как } \Delta\vec\omega_{,s}\Delta s\to 0\,)$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{1}{\Delta s}\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \Delta\omega_{3,s}\Delta s & -\Delta\omega_{2,s}\Delta s\\ -\Delta\omega_{3,s}\Delta s & 1 & \Delta\omega_{1,s}\Delta s\\ \Delta\omega_{2,s}\Delta s & -\Delta\omega_{1,s}\Delta s & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}\end{pmatrix}\right]\right),$$

где $\Delta\omega_{k,s} \equiv \dfrac{d\Delta\omega_k}{ds}$ – определяются из (12).

В итоге имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s} = \begin{pmatrix}\left(\lambda_{13}\Delta\omega_{2,s}-\lambda_{12}\Delta\omega_{3,s}\right) & \left(\lambda_{11}\Delta\omega_{3,s}-\lambda_{13}\Delta\omega_{1,s}\right) & \left(\lambda_{12}\Delta\omega_{1,s}-\lambda_{11}\Delta\omega_{2,s}\right)\\ \left(\lambda_{23}\Delta\omega_{2,s}-\lambda_{22}\Delta\omega_{3,s}\right) & \left(\lambda_{21}\Delta\omega_{3,s}-\lambda_{23}\Delta\omega_{1,s}\right) & \left(\lambda_{22}\Delta\omega_{1,s}-\lambda_{21}\Delta\omega_{2,s}\right)\\ \left(\lambda_{33}\Delta\omega_{2,s}-\lambda_{32}\Delta\omega_{3,s}\right) & \left(\lambda_{31}\Delta\omega_{3,s}-\lambda_{33}\Delta\omega_{1,s}\right) & \left(\lambda_{32}\Delta\omega_{1,s}-\lambda_{31}\Delta\omega_{2,s}\right)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Таким образом, с помощью представления (4) из трех уравнений (1) получили в явном виде выражения для 9 компонент производной матрицы поворота $\dfrac{\partial\lambda}{\partial s}$.

Далее возможен вариант перехода от 12-ти неизвестных функций к 18-ти, то есть вместо 3-х проекций вектора конечного поворота за неизвестные можно принять 9 компонент матрицы поворота. В работе [5] представлена система 18-ти дифференциальных уравнений первого порядка, в которой поворот описывается, по сути, направляющими косинусами векторов $\vec e_k$, ориентированными вдоль главных осей инерции поперечного сечения. Использование в качестве неизвестных направляющих косинусов для описания поворотов избавляет краевую задачу от особенностей при любых углах поворота [5]. Необходимо отметить, что остальные 9 функций [5] совпадают с используемыми в этой статье: проекции векторов перемещений, внутренних усилий и моментов на глобальные (неподвижные) оси координат. Качественное различие уравнений [1] с использованием (13) от 18-ти уравнений из [5] состоит в том, что в [1] не входит начальная кривизна осевой линии, что позволяет рассматривать стержни с изломами и скачками кривизны исходной осевой линии.

Возможными трудностями использования в качестве неизвестных функций направляющие косинусы (компоненты матрицы поворота) являются следующие обстоятельства. Во-первых, из 9-ти компонент матрицы поворота независимыми являются только 3, поэтому их вычисление, по всей видимости, требует привлечения уравнений связи между компонентами матрицы поворота. Во-вторых, могут возникнуть некоторые неудобства, выражающиеся в необходимости построения специальных алгоритмов, если в качестве краевого условия задавать углы поворота в подвижной системе координат. Использование вектора конечного поворота для описания поворотов поперечных сечений при деформировании стержня позволяет убрать указанные обстоятельства, а также уменьшает количество неизвестных функций.

Три проекции вектора поворота всегда однозначно определяют матрицу поворота, однако, матрица поворота неоднозначно определяет вектор поворота. Помимо того, что одно и то же конечное положение поперечного сечения можно определить минимум двумя векторами поворота (разные направления вращения), так ещё и при поворотах кратных 2π тройка ортов приходит в первоначальное состояние (соответствующая матрица поворота стала единичной матрицей) и такой поворот может быть описан бесконечным числом разнонаправленных векторов конечного поворота длиной $2\pi n$, $n = 0,1...$. По всей видимости, этот факт является причиной наличия особенности в уравнениях деформирования стержня при использовании вектора конечного поворота. В данной статье разработан численный подход для разрешения данной проблемы – оказалось возможным оставить вектор конечного поворота для описания деформирования стержня для любых поворотов его поперечных сечений.

2. ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД. ЗАМЕНА УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОСОБЕННОСТЬ

Ранее для решения нелинейной краевой задачи использовалась подпрограмма DBVPFD библиотеки IMSL, которая составлена по алгоритмам [6]. Согласно [6], неизвестные разыскиваются в дискретных узлах, а дифференциальные уравнения аппроксимируются по правилу трапеций:

$$\frac{W_{j+1} - W_j}{h_j} = \frac{1}{2}\left[f\left(s_j, W_j\right) + f\left(s_{j+1}, W_{j+1}\right)\right], \; j = 1,2..N, \tag{14}$$

где в нашем случае системы уравнений стержня:

$0 = s_1 < s_2 < ... < s_{N+1} = \ell$ – узлы, в которых разыскиваются значения неизвестных функций; $h_j = s_{j+1} - s_j$ – шаг сетки;

$W_j = \left\{U_1, U_2, U_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, Q_1, Q_2, Q_3, M_1, M_2, M_3\right\}^T\Big|_{s=s_j}$ – вектор-столбец 12 узловых неизвестных;

$f\left(s, W\right)$ – правая часть системы дифференциальных уравнений тонкого упругого стержня [1, 2].

Краевые условия в нашем случае представляются в виде: $g_1\left(W_1\right) = 0$, $g_2\left(W_{N+1}\right) = 0$, где $g_{1,2}$ – векторы-столбцы, состоящие из 6 строк (по 6 краевых условий на каждом конце стержня) и, таким образом, в дискретной форме краевая задача может быть представлена в следующем виде

$$F_\pi\left(W\right) = 0, \tag{15}$$

где

$$W \equiv \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ ... \\ W_{N+1} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} W_{1,1} \\ W_{2,1} \\ ... \\ W_{12,1} \\ W_{1,2} \\ ... \\ W_{12,N+1} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ ... \\ M_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} \\ ... \\ M_3^{(N+1)} \end{Bmatrix}, \; F_\pi\left(W\right) \equiv \begin{Bmatrix} g_1\left(W_1\right) \\ W_2 - W_1 - h_1\left(f_1 + f_2\right)/2 \\ W_3 - W_2 - h_2\left(f_2 + f_3\right)/2 \\ ... \\ W_{N+1} - W_N - h_N\left(f_N + f_{N+1}\right)/2 \\ g_2\left(W_{N+1}\right) \end{Bmatrix},$$

где $f_j \equiv f\left(s_j, W_j\right)$, $h_j = s_{j+1} - s_j$, $j = 1,2...N$.

Решение разыскивается итерационным способом:

$$W^{\nu+1} = W^{\nu} + \mu_{\nu} \cdot \Delta W^{\nu} = W^{\nu} + \mu_{\nu} \cdot F_W\left(W^{\nu}\right)^{-1} F_{\pi}\left(W^{\nu}\right), \qquad (16)$$

где $F_W\left(W^{\nu}\right)$ – Якобиан системы уравнений (15) в точке W^{ν} для ν-го приближения, μ_{ν} – параметр контроля шага, определяется особым образом [6]. Якобиан имеет следующую структуру:

$$F_W\left(W^{\nu}\right) = \begin{bmatrix} g_{1W_1}(W_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(-I - \dfrac{f_{1W}h_1}{2}\right) & \left(I - \dfrac{f_{2W}h_1}{2}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(-I - \dfrac{f_{2W}h_2}{2}\right) & \left(I - \dfrac{f_{3W}h_2}{2}\right) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(-I - \dfrac{f_{3W}h_3}{2}\right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(I - \dfrac{f_{(N+1)W}h_N}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{2W_{N+1}}(W_{N+1}) \end{bmatrix}.$$

Для определения неизвестных узловых значений функций используется система нелинейных уравнений (15). Как было отмечено ранее, особенность при использовании вектора конечного поворота заключается в невозможности определить производные вектора по естественной координате s, которые стремятся к бесконечности при приближении модуля вектора к величинам кратным 2π. Поэтому при численной реализации (15) в уравнениях появляются большие величины, приводящие к расхождению итерационного процесса (16).

Предлагается заменить в (15) уравнения для узловых значений проекций вектора конечного поворота

$$\omega_{k,j+1} - \omega_{k,j} - h_j\left(f_{3+k,j} + f_{3+k,j+1}\right)/2 = 0, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,2\dots N, \qquad (17)$$

на другие уравнения, в которых не будет возникать особенностей при любых поворотах. Такими уравнениями являются уравнения для компонент матрицы поворота (направляющих косинусов) (13)–(12), т. е. имеем 9 уравнений

$$\lambda_{kn,j+1} - \lambda_{kn,j} - h_j\left(f^*_{kn,j} + f^*_{kn,j+1}\right)/2 = 0, \quad k,n = 1,2,3, \quad j = 1,2\dots N. \qquad (18)$$

где $\lambda_{kn,j} \equiv \lambda_{kn}\left(s_j, \omega_1, \omega_2, \omega_3\right)$, $f^*_{kn,j} \equiv \dfrac{\partial \lambda_{kn}\left(s_j, \omega_{1,2,3}, M_{1,2,3}\right)}{\partial s}$ из (13).

Таким образом, имеем 9 уравнений (18), а необходимо только 3 уравнения. Выбор независимых уравнений зависит от текущего достигнутого поворота. Можно заметить, что строки матрицы поворота – это проекции ортов $\vec{e}_k^*$ (направления главных осей инерции) после деформации на орты до деформации $\vec{e}_k$:

$$\lambda_{ij}=\left(\vec{e}_i^*\cdot\vec{e}_j\right)=\begin{pmatrix}\left(\vec{e}_1^*\cdot\vec{e}_1\right) & \left(\vec{e}_1^*\cdot\vec{e}_2\right) & \left(\vec{e}_1^*\cdot\vec{e}_3\right)\\ \left(\vec{e}_2^*\cdot\vec{e}_1\right) & \left(\vec{e}_2^*\cdot\vec{e}_2\right) & \left(\vec{e}_2^*\cdot\vec{e}_3\right)\\ \left(\vec{e}_3^*\cdot\vec{e}_1\right) & \left(\vec{e}_3^*\cdot\vec{e}_2\right) & \left(\vec{e}_3^*\cdot\vec{e}_3\right)\end{pmatrix}, \text{ следовательно } \frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial s}=\left(\frac{\partial\vec{e}_i^*}{\partial s}\cdot\vec{e}_j\right).$$

Так как орты $\vec{e}_k^*$ при деформировании стержня не меняют длины, а только поворачиваются, то очевидно, что производная орта – вектор, находящийся в перпендикулярной плоскости. Так как $\left(\vec{e}_i^*\cdot\vec{e}_j^*\right)=\delta_{ij}$, то $\frac{\partial\vec{e}_1^*}{\partial s}\vec{e}_2^*=-\frac{\partial\vec{e}_2^*}{\partial s}\vec{e}_1^*$, $\frac{\partial\vec{e}_1^*}{\partial s}\vec{e}_3^*=-\frac{\partial\vec{e}_3^*}{\partial s}\vec{e}_1^*$, $\frac{\partial\vec{e}_2^*}{\partial s}\vec{e}_3^*=-\frac{\partial\vec{e}_3^*}{\partial s}\vec{e}_2^*$, остальные равны нулю. Следовательно, если направления ортов $\vec{e}_k^*$ совпадают с направлением ортов $\vec{e}_k$, тогда производная матрицы поворота имеет вид

$$\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial s}=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}, \text{ где } a=\frac{\partial\vec{e}_1^*}{\partial s}\vec{e}_2^*,\ b=\frac{\partial\vec{e}_1^*}{\partial s}\vec{e}_3^*,\ c=\frac{\partial\vec{e}_2^*}{\partial s}\vec{e}_3^*. \qquad (19)$$

Если каждый орт $\vec{e}_k^*$ повернуть на достигнутый поворот $\vec{\omega}$, тогда он совпадет с ортом $\vec{e}_k$, и его соответствующие координаты будут величинами a,b,c :

$$a=\lambda_{2k}\frac{\partial\lambda_{1k}}{\partial s},\ b=\lambda_{3k}\frac{\partial\lambda_{1k}}{\partial s},\ c=\lambda_{3k}\frac{\partial\lambda_{2k}}{\partial s}. \qquad (20)$$

Выражения (20) так же вытекают и из (19) при подстановке $\vec{e}_j^*=\lambda_{jk}\vec{e}_k$.

В итоге имеем три уравнения вместо девяти (17) для подстановки в общую систему(15) и вычисления следующего приближения (16):

$$\lambda_{2n,j}\left[\lambda_{1n,j+1}-\lambda_{1n,j}-h_j\left(f_{1n,j}^*+f_{1n,j+1}^*\right)/2\right]=0,$$

$$\lambda_{3n,j}\left[\lambda_{1n,j+1}-\lambda_{1n,j}-h_j\left(f_{1n,j}^*+f_{1n,j+1}^*\right)/2\right]=0,$$

$$\lambda_{3n,j}\left[\lambda_{2n,j+1}-\lambda_{2n,j}-h_j\left(f_{2n,j}^*+f_{2n,j+1}^*\right)/2\right]=0, \qquad (21\text{ а})$$

или, используя точку посередине между узловыми значениями, имеем

$$\left[\lambda_{1n,j+1}-\lambda_{1n,j}-h_j\left(f_{1n,j}^*+f_{1n,j+1}^*\right)/2\right]\left(\lambda_{2n,j}+\lambda_{2n,j+1}\right)/2=0,$$

$$\left[\lambda_{1n,j+1}-\lambda_{1n,j}-h_j\left(f_{1n,j}^*+f_{1n,j+1}^*\right)/2\right]\left(\lambda_{3n,j}+\lambda_{3n,j+1}\right)/2=0,$$

$$\left[\lambda_{2n,j+1}-\lambda_{2n,j}-h_j\left(f_{2n,j}^*+f_{2n,j+1}^*\right)/2\right]\left(\lambda_{3n,j}+\lambda_{3n,j+1}\right)/2=0, \qquad (21\text{ б})$$

здесь по индексу n ведется суммирование от 1 до 3-х, а по индексу j нет суммирования, он указывает на номер блока уравнений $1,2...N$.

Таким образом, удалось в явном виде получить выражения для производной матрицы поворота (13)–(12) с помощью представления (4). Это позволило при численной реализации нелинейной краевой задачи, сведенной к решению системы нелинейных уравнений (15), заменить в ней уравнения (17) содержащие особенность, на уравнения (21), что, в конечном итоге, позволило использовать вектор конечного поворота для описания деформирования стержня при углах поворота более 2π.

3. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

До сих пор в уравнениях движения для получения инерционных моментов, связанных с поворотом поперечного сечения, использовались скорости и ускорения изменения компонент вектора конечного поворота. В связи с тем, что компоненты вектора конечного поворота как функции длины могут терпеть разрыв при углах поворота поперечных сечений больше 2π, появилась необходимость получить выражения инерционных моментов через компоненты матрицы $\lambda\left(\vec{\omega}\right)$, которые при этом остаются гладкими.

Главные оси поперечного сечения после деформации имеют следующее выражение через компоненты матрицы начальной геометрии $\beta\left(s\right)$ и матрицы деформирования λ:

$$\vec{e}_j^{\,*} = \beta_{jk}\vec{i}_k^{\,*} = \beta_{jk}\lambda_{kn}\vec{i}_n .$$

Мгновенные угловые скорости поворота поперечного сечения относительно главных осей $\overset{*}{e}_{1,2,3}$ можно представить следующим образом:

$$\Omega_1 = \frac{d\vec{e}_3^{\,*}}{dt}\vec{e}_2^{\,*} = -\dot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{2k} ,$$

$$\Omega_2 = \frac{d\vec{e}_3^{\,*}}{dt}\vec{e}_1^{\,*} = \dot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{1k} ,$$

$$\Omega_3 = \frac{d\vec{e}_1^{\,*}}{dt}\vec{e}_2^{\,*} = \dot{\lambda}_{mn}\beta_{1m}\lambda_{kn}\beta_{2k} . \qquad (22)$$

Соответственно мгновенные угловые ускорения поворота поперечного сечения относительно главных осей $\overset{*}{e}_{1,2,3}$ имеют следующий вид:

$$\dot{\Omega}_1 = -\ddot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{2k} - \dot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\dot{\lambda}_{kn}\beta_{2k} ,$$

$$\dot{\Omega}_2 = \ddot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\lambda_{kn}\beta_{1k} + \dot{\lambda}_{mn}\beta_{3m}\dot{\lambda}_{kn}\beta_{1k} ,$$

$$\dot{\Omega}_3 = \ddot{\lambda}_{mn}\beta_{1m}\lambda_{kn}\beta_{2k} + \dot{\lambda}_{mn}\beta_{1m}\dot{\lambda}_{kn}\beta_{2k} , \qquad (23)$$

Инерционные моменты запишутся так:

$$\vec{M}_n^J = \left[\rho J_j\left(s\right)\dot{\Omega}_j\right]\beta_{jk}\lambda_{kn}\vec{i}_n .$$

Система уравнений движения тонкого упругого стержня, описывающая любые повороты поперечных сечений при динамическом деформировании, в которой вместо естественной координаты s введен параметр ξ, имеет вид

$$\frac{dU_i}{d\xi} = \left(1+\varepsilon\right)x_{j,\xi}\lambda_{ji} - x_{i,\xi},\ i = 1,2,3 ;$$

$$\Delta\omega_{j,\xi} = \lambda_{mj}\beta_{im}C_{ii}\beta_{ik}\lambda_{kp}M_p,\ C = \begin{pmatrix} EJ_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & GJ_P^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = \begin{pmatrix} \left(\lambda_{13}\Delta\omega_{2,\xi} - \lambda_{12}\Delta\omega_{3,\xi}\right) & \left(\lambda_{11}\Delta\omega_{3,\xi} - \lambda_{13}\Delta\omega_{1,\xi}\right) & \left(\lambda_{12}\Delta\omega_{1,\xi} - \lambda_{11}\Delta\omega_{2,\xi}\right) \\ \left(\lambda_{23}\Delta\omega_{2,\xi} - \lambda_{22}\Delta\omega_{3,\xi}\right) & \left(\lambda_{21}\Delta\omega_{3,\xi} - \lambda_{23}\Delta\omega_{1,\xi}\right) & \left(\lambda_{22}\Delta\omega_{1,\xi} - \lambda_{21}\Delta\omega_{2,\xi}\right) \\ \left(\lambda_{33}\Delta\omega_{2,\xi} - \lambda_{32}\Delta\omega_{3,\xi}\right) & \left(\lambda_{31}\Delta\omega_{3,\xi} - \lambda_{33}\Delta\omega_{1,\xi}\right) & \left(\lambda_{32}\Delta\omega_{1,\xi} - \lambda_{31}\Delta\omega_{2,\xi}\right) \end{pmatrix};$$

$$\frac{dQ_i}{d\xi} = \left[\rho F(\xi)\ddot{U}_i - q_i\left(\xi, t, \dot{\vec{U}}, \vec{\omega}\right)\right]\frac{ds}{d\xi}(1+\varepsilon),\ i = 1,2,3; \tag{24}$$

$$\frac{dM_i}{d\xi} = \begin{pmatrix} \rho J_P(\xi)\dot{\Omega}_3\beta_{3k}\lambda_{ki}\dfrac{ds}{d\xi} + \\ +\rho J_1(\xi)\dot{\Omega}_1\beta_{1k}\lambda_{ki}\dfrac{ds}{d\xi} + \rho J_2(\xi)\dot{\Omega}_2\beta_{2k}\lambda_{ki}\dfrac{ds}{d\xi} - \\ -m_i(\xi,t)\dfrac{ds}{d\xi} - x_{j,\xi}\lambda_{jp}Q_r + x_{j,\xi}\lambda_{jr}Q_p \end{pmatrix}(1+\varepsilon),\ \begin{cases} i = 1,2,3, \\ p = 2,3,1, \\ r = 3,1,2; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{x_{j,\xi}\lambda_{jk}Q_k}{EF(\xi)}\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^{-1},\ \frac{ds}{d\xi} = \left(x_{k,\xi}x_{k,\xi}\right)^{1/2}.$$

Система уравнений (24) состоит из 18-ти нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Вместо трех уравнений для компонент вектора конечного поворота $\vec{\omega}$, в разделе 1 получены девять уравнений для компонент матрицы λ, а в разделе 2 изложена методика использования в качестве неизвестных 12 функций, три из которых компоненты вектора конечного поворота $\vec{\omega}$.

К системе (24) необходимо добавить краевые условия. Численная методика решения полученной краевой задачи и алгоритм программы ЭВМ представлены в разделах 4 и 5.

Продолжение статьи будет опубликовано в следующем номере журнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Левин В.Е.** Механика деформирования криволинейных стержней: монография / В.Е. Левин, Н.В. Пустовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 208 с.

[2] **Пустовой Н.В.** Применение геометрически нелинейных уравнений стержня к расчету статики и динамики тросов. Часть 1 / Н.В. Пустовой, В.Е. Левин, Д.А. Красноруцкий // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 83–92.

[3] **Аргирис Дж.** Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Дж. Аргирис. – М.: Изд-во лит-ры по стр-ву, 1968. – 242с.

[4] **Сорокин Ф.Д.** Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота / Ф.Д. Сорокин // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 1. – С. 164–168.

[5] **Бадиков Р.Н.** Исследование влияния продольной сжимающей силы на собственную частоту колебаний цилиндрической пружины спирального грохота / Р.Н. Бадиков // Изв. вузов. Машиностр. – 2004. – № 10. – С. 15–20.

[6] **Pereyra V.** Pasva3: An adaptive finite difference fortran program for first order nonlinear, ordinary boundary problems / V. Pereyra // Lecture Notes in Computer Science. – 1979. – Vol. 76. – Pp. 67–88.

Пустовой Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор, академик МАН ВШ, член-корреспондент АИН РФ, ректор НГТУ, заведующий кафедрой прочности летательных аппаратов НГТУ. Основное направление научных исследований: устойчивость, остаточная прочность и разрушение элементов авиационных конструкций. Имеет более 60 публикаций, в том числе 5 монографий. E-mail: rector@nstu.ru

Левин Владимир Евгеньевич, доктор технических наук, доцент, зам. заведующего кафедрой прочности летательных аппаратов НГТУ. Основное направление научных исследований: динамика конструкций. Имеет более 40 публикаций, в том числе 1 монографию. E-mail: levin@craft.nstu.ru

Красноруцкий Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов НГТУ. Основное направление научных исследований: механика деформирования криволинейных стержней. Имеет более 20 публикаций. E-mail: dakras@yandex.ru

Pustovoy N.V., Levin V.E., Krasnorutskiy D.A.

The method of calculation of parameters of big rotations of cross-sections of a flexible rod using its differential model

It is convenient to use components of a rotation vector as parameters in problems of big displacements and rotations of a flexible curvilinear rod. But at numerical realization of algorithm to solve the nonlinear boundary problem are certain difficulties for values of the module of this vector multiple of 2π (full turn). Difficulties manifest itself as an impossibility to calculate derivatives of components of a rotation vector (the determinant of the corresponding system of linear equations becomes equal to zero) and to obtain the numerical solution. This paper is devoted to the technique allowing us to use rotation vector in numerical algorithm for the description of deformation of a rod for any angles of rotation of a rod's cross section (more than 2π). Numerical approach is described and the algorithm of the subroutine for the computer is presented.

Key words: thin elastic rod, rotation vector, indeterminacy at big rotations, nonlinear boundary problem, numerical solution.