

УДК 532: 517.4

**Численное моделирование
осесимметричных турбулентных следов
с варьируемым суммарным избыточным импульсом ***

А.Г. ДЕМЕНКОВ, Г.Г. ЧЕРНЫХ

С применением модифицированной $e \sim \varepsilon$ модели турбулентности осуществлено численное моделирование динамики осесимметричных турбулентных следов в однородной жидкости. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Исследовано асимптотическое вырождение турбулентных следов с малым суммарным избыточным импульсом.

Ключевые слова: осесимметричные турбулентные следы, численное моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Осесимметричные турбулентные следы рассматривались в большом числе экспериментальных, теоретических и вычислительных работ. Отметим лишь немногие [1–29]. В них можно найти обзоры и более подробную библиографию. В связи с этим мы упомянем лишь некоторые из недавно опубликованных работ. В [21] осуществлено численное моделирование дальнего турбулентного безымпульсного следа за телом вращения в пассивно стратифицированной среде. Применяется иерархия математических моделей второго порядка, включающая модели с нелинейной аппроксимацией корреляций с пульсациями давления в уравнениях переноса моментов второго порядка. Анализируется асимптотическое вырождение безымпульсных турбулентных следов. Дополнительно к математическим моделям второго порядка к описанию течения в осесимметричном безымпульсном следе привлекаются модели третьего порядка [23], применение которых позволило более детально описать экспериментальные данные [16, 17]. Как и в предыдущей работе [21], обсуждается вопрос об асимптотическом вырождении следа. Работа [22] в основном посвящена численному моделированию закрученных безымпульсных турбулентных следов. В качестве примера рассмотрен безымпульсный незакрученный турбулентный след. Применяется полуэмпирическая модель, включающая уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации ε . Результаты расчетов широкого класса задач сопоставляются с известными результатами расчетов других авторов и экспериментальными данными. Оцениваются границы применимости численной модели.

В [24] выполнен теоретико-групповой анализ двух полуэмпирических моделей плоского и осесимметричного дальних турбулентных следов. Построены автомодельные решения и проведено сопоставление с известными экспериментальными данными. Асимптотический и численный анализ эволюции осесимметричных безымпульсных турбулентных следов, основанный на применении полуэмпирической модели турбулентности второго порядка, выполнен в [27]. Автомодельные решения получены аналитически, а процесс перехода к автомодельности изучен численно. Проведено сопоставление с известными экспериментальными данными.

* Статья получена 17 октября 2012 г.

В [28, 29] дан подробный анализ исследований по турбулентным следам в однородной и стратифицированной жидкостях, включая труднодоступные работы. В [28] на основе подхода DNS (прямое численное моделирование) рассмотрена динамика турбулентных следов с малым и умеренным суммарным избыточным импульсом. Представлены результаты расчетов, демонстрирующие неприменимость гипотезы постоянной турбулентной вязкости и расчету турбулентных следов за самодвижущимися телами. В [29] приведены результаты расчетов динамики безыmpульсного следа в однородной жидкости на основе двухпараметрической $e \sim \varepsilon$ модели турбулентности. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [2]. Задача о динамике турбулентного следа в [29] является модельной. Основная задача работы – расчет течения в гидротурбине. Роль малого суммарного избыточного импульса в развитии следа за самодвижущимся телом обсуждается в [6, 9, 13, 18, 20, 25, 26, 28]. Турбулентные следы с умеренным суммарным избыточным импульсом рассматривались в [9, 13, 20, 28].

Анализируя известные работы по численному моделированию осесимметричных турбулентных следов можно сделать вывод о том, что основанные на полуэмпирических моделях турбулентности численные модели турбулентных следов недостаточно полны. Следы являются ярким примером струйных турбулентных течений с варьируемым значением суммарного избыточного импульса. Турбулентные следы характеризуются также значительным варьированием отношения P/ε , где P – порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения, ε – скорость диссиляции энергии турбулентности в тепло. В безыmpульсных турбулентных следах [16] уже на расстояниях порядка десяти диаметров тела это отношение достаточно мало. В турбулентных следах за буксируемыми удлиненными телами вращения в значительной части области поперечного сечения следа отношение P/ε близко к единице. В настоящей работе с применением модифицированной $e \sim \varepsilon$ модели Роди [4] осуществлено исследование ряда турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом. Результаты расчетов согласуются с известными экспериментальными данными. Рассмотрено асимптотическое вырождение осесимметричных турбулентных следов с малым ненулевым суммарным избыточным импульсом. Работа является продолжением [20].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания течения в турбулентных следах привлекается система осредненных уравнений движения в приближении тонкого сдвигового вязкого слоя [1, 3]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle) + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} yv \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} y \langle u'v' \rangle, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} yV = 0. \quad (2)$$

Здесь U , V – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости осредненного движения; $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle u'v' \rangle$ – компоненты тензора рейнольдсовых напряжений; v – коэффициент кинематической вязкости; знак $\langle \rangle$ – знак осреднения.

Система уравнений (1)–(2) незамкнута; одной из рассмотренных в настоящей работе моделей является модифицированная $e \sim \varepsilon$ модель турбулентности [4] (Модель 1), в которой используются аппроксимации

$$-\langle u'v' \rangle = v_t \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle = 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P, \quad (3)$$

где

$$v_t = \frac{2}{3} \Phi \left(1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad P = v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2, \quad \Phi = \frac{1 - c_2}{c_1 - 1 + \frac{P}{\varepsilon}},$$

c_1, c_2 – эмпирические постоянные.

В дополнение к (1)–(3) привлекаются уравнения трансформации энергии турбулентности e и скорости диссипации ε :

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y(v_t + v) \frac{\partial e}{\partial y} \right] + P - \varepsilon, \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + v \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon}{e} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (5)$$

Здесь $c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \sigma_\varepsilon$ – эмпирические постоянные.

Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием характерных масштабов скорости U_0 и длины D (D – диаметр тела, U_0 – скорость невозмущенного потока). Переменная x играет роль времени; при $x = x_0$ задаются начальные распределения U, e, ε . При $y = 0$ ставятся условия симметрии (в настоящей работе рассматриваются именно такие течения). В качестве граничных условий при $y \rightarrow \infty$ задаются значения U, e, ε , согласующиеся с физическими соображениями об условиях невозмущенного потока и экспериментальными данными. Значения эмпирических постоянных следующие: $c_1 = 2.2, c_2 = 0.55, c_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_\varepsilon = 1.3$.

Наряду с приведенной выше математической моделью (1)–(5) в работе рассматривался также аналог модифицированной $e \sim \varepsilon$ модели, учитывающей существенное варьирование турбулентного числа Рейнольдса $R_\lambda = \sqrt{2e\lambda} / v$ в процессе вырождения турбулентного течения (Модель 2). Здесь $\lambda = \sqrt{10ev/\varepsilon}$ – тейлоровский микромасштаб течения. В результате применения аппроксимации [4] к уравнениям переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений [14] в соотношениях и уравнениях (3)–(5) роль эмпирических постоянных $c_1, c_2, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}$ будут играть функции

$$c'_1 = c_1(1 - d_u), \quad c'_2 = c_2(1 - d_u), \quad c'_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 1}(1 - d_u) + 1.225d_u, \quad c'_{\varepsilon 2} = c_{\varepsilon 2} - (13/30)d_u,$$

$$d_u = \frac{2800}{\left(R_\lambda + \sqrt{R_\lambda^2 + 2800} \right)^2}. \quad (6)$$

Значения части эмпирических постоянных в соотношениях (6) в сравнении с их значениями в [14] изменены так, что при $R_\lambda \gg 1$ функции $c'_1, c'_2, c'_{\varepsilon 1}, c'_{\varepsilon 2}$ становятся близкими к постоянным $c_1, c_2, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}$.

Сами модифицированные уравнения (4), (5) будут иметь аналогичный вид.

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ

В качестве первого шага при построении алгоритма вводится в рассмотрение функция тока $\Psi : yU = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -yV = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Уравнение (2) при этом выполняется тождественно; величины Ψ и V определяются из соотношений

$$\Psi = \Psi(x, 0) + \int_0^y yU dy, \quad V = -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Для построения численного алгоритма решения задачи осуществляется переход к новым независимым переменным $x' = x, y' = \varphi(x, y) (x = x', y = q(x', y'))$. Система уравнений (1), (4), (5), (7) переписывается с применением новых переменных. При этом уравнение (1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} J y U U_1 - \frac{\partial}{\partial y'} y_{x'} y^j U U_1 + \frac{\partial}{\partial y'} U_1 y V = & \frac{\partial}{\partial y'} (y v_t / J) \frac{\partial U_1}{\partial y'} + 2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(y J \Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right) - \\ & - 2 \frac{\partial}{\partial y'} \left(y_{x'} y \Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $U_1 = U - U_0$ – дефект продольной составляющей скорости, U_0 – скорость невозмущенного потока (x – компонента). Остальные уравнения переписываются аналогично. Следствием уравнения (8), граничных условий и симметрии течения является закон сохранения импульса [1, 3]

$$2\pi\rho_0 \int_0^\infty y J \left(U U_1 - 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right) dy' = F_0, \quad J = \frac{\partial y}{\partial y'} = y_{y'}. \quad (9)$$

Алгоритмы решения задачи (на примере Модели 1) сводятся к последовательному интегрированию уравнений и соотношений (4), (5), (7), (8) на каждом слое по x' , играющем роль времени. Конечно-разностная сетка по переменной y' выбирается постоянной ($h' = \text{const}$) .

В качестве первого (Алгоритм 1) рассмотрен алгоритм, являющийся следствием центрально-разностных аппроксимаций конвективных слагаемых. При этом конечно-разностный аналог (8) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{(Jy)_i^{n+1,s,\alpha} U_i^{n+1,s,\alpha} U_{li}^{n+1,s+1,\alpha} - (Jy U U_1)_i^n}{\tau^{n+1}} + \frac{A_{i+1}^{n+1,s+1,\alpha} - A_{i-1}^{n+1,s+1,\alpha}}{2h'} = \\ \frac{K_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,s,\alpha} U_{li+1}^{n+1,s+1,\alpha} - \left(K_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,s,\alpha} + K_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,s,\alpha} \right) U_{li}^{n+1,s+1,\alpha} + K_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,s,\alpha} U_{li-1}^{n+1,s+1,\alpha}}{h'^2} + \\ + 2 \frac{(Jy)_i^{n+1} \left(\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right)_i^{n+1,s,\alpha} - (Jy)_i^n \left(\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right)_i^n}{\tau^{n+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) величины s, α означают номера итераций по нелинейности; s относится к внутренним (в данном случае нелинейность относительно U_1), α – к внешним итерациям, когда итерируются все конечно-разностные аналоги системы уравнений (4), (5), (7), (8) одновременно;

$$U_i^{n+1} \equiv U\left(x_n + \tau^{n+1}, y'_i\right),$$

$y'_i = ih'$, $i = 1, \dots, M - 1$; τ^{n+1} – величина шага сетки по переменной x' ; $n = 0, \dots, N$; M – число узлов расчетной сетки в поперечном направлении, N – в продольном.

$$A = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3, \quad \tilde{A}_1 = -y_{x'} y U U_1, \quad \tilde{A}_2 = y U V, \quad \tilde{A}_3 = -2 y_{x'} y \Phi \frac{e}{\varepsilon} P,$$

$$K_{i \pm \frac{1}{2}} = 0.5(K_i + K_{i \pm 1}), \quad K = y(v + v_t)/J, \quad (y_{x'})_i^{n+1} = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau^{n+1}}, \quad (11)$$

$$(\tilde{A}_1)_i^{n+1, s+1, \alpha} = -(y_{x'} y U)_i^{n+1, s, \alpha} (U_1)_i^{n+1, s+1, \alpha}.$$

В Алгоритме 2 с целью получения консервативного [30, 31] по отношению к закону сохранения (9) алгоритма конвективные слагаемые аппроксимировались односторонними разностями:

$$\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial y'} \sim \frac{\tilde{A}_{1i+1} - \tilde{A}_{1i}}{h'}, \quad \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial y'} \sim \frac{\tilde{A}_{2i} - \tilde{A}_{2i-1}}{h'}, \quad \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial y'} \sim \frac{\tilde{A}_{3i} - \tilde{A}_{3i-1}}{h'}.$$

При реализации первого соотношения (7) использовалась простейшая квадратурная формула трапеций. Конечно-разностный аналог условий симметрии для величины дефекта продольной компоненты скорости U_1 принимался в виде:

$$(U_1)_0^{n+1, s+1, \alpha} = (U_1)_1^{n+1, s+1, \alpha}. \quad (12)$$

Для величин e и ε аналогично.

Недивергентность конечно-разностной задачи при использовании аппроксимации (10) обусловлена несогласованностью (10) и краевыми условиями (12). Поэтому приходится применять конечно-разностную схему с односторонними разностями. При использовании Алгоритма 2 консервативность по отношению к закону сохранения импульса достигается при специальном выборе сетки: $y_1^n = q_1^n = h'$, $n = 0, \dots, N$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Наиболее полными из известных авторам экспериментальными данными о вырождении безимпульсных турбулентных следов являются данные работ [16, 17]. Результаты расчетов, основанные на применении Моделей 1, 2 представлены в табл. 2, 3, 5; в табл. 1, 4 приведены экспериментальные данные [16, 17]. Начальные данные при проведении расчетов задавались при $x/D = 10$ (в отсутствие фона) и при $x/D = 20$ (ненулевой фон) согласованными с результатами экспериментов. Рассчитанные по обеим моделям характеристики течения близки экспериментально измеренным.

Таблица 1

Экспериментальные данные для осесимметричного безымпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона [17]

x/D	20	60	70	100	120
U_1 / U_0	0.05	0.009	—	—	—
E / U_0^2	392×10^{-5}	73×10^{-5}	58×10^{-5}	35×10^{-5}	27×10^{-5}
$\varepsilon D / U_0^3$	27.8×10^{-5}	—	1.3×10^{-5}	—	—
r_l	0.9	1.36	1.42	1.6	1.84

Таблица 2

Расчетные данные (Модель 1) для осесимметричного безымпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона

x/D	20	60	70	100	120
U_1 / U_0	0.05	0.0086	0.0068	0.0039	0.0029
E / U_0^2	392×10^{-5}	67×10^{-5}	53×10^{-5}	35×10^{-5}	25×10^{-5}
$\varepsilon D / U_0^3$	27.8×10^{-5}	2.0×10^{-5}	0.93×10^{-5}	0.38×10^{-5}	0.24×10^{-5}
r_l	0.9	1.24	1.29	1.38	1.42

Таблица 3

Расчетные данные (Модель 2) для осесимметричного безымпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона

x/D	20	60	70	100	120
U_1 / U_0	0.05	0.0080	0.0063	0.0035	0.0026
E / U_0^2	392×10^{-5}	65×10^{-5}	51×10^{-5}	31×10^{-5}	24×10^{-5}
$\varepsilon D / U_0^3$	27.8×10^{-5}	1.36×10^{-5}	0.91×10^{-5}	0.37×10^{-5}	0.24×10^{-5}
r_l	0.9	1.35	1.43	1.63	1.74

Таблица 4

Экспериментальные данные для осесимметричного безымпульсного следа за сферой в условиях нулевого турбулентного фона [16]

x/D	10	20	70	100
U_1 / U_0	0.0464	—	—	—
E / U_0^2	534×10^{-5}	172×10^{-5}	15×10^{-5}	8.2×10^{-5}
$\varepsilon D / U_0^3$	78.0×10^{-5}	10.7×10^{-5}	0.29×10^{-5}	—

Таблица 5

Расчетные данные (Модель 1) для осесимметричного безымпульсного следа за сферой в условиях нулевого турбулентного фона

x/D	10	20	70	100
U_1 / U_0	0.0464	0.013	0.0022	0.0013
E / U_0^2	534×10^{-5}	128×10^{-5}	16×10^{-5}	9.2×10^{-5}
$\varepsilon D / U_0^3$	78.0×10^{-5}	8.43×10^{-5}	0.27×10^{-5}	0.11×10^{-5}

Другими достаточно хорошо известными данными о вырождении турбулентных следов являются данные лабораторных измерений [9, 18]. В этих работах с целью анализа влияния начальных условий на развитие следа для компенсации силы сопротивления тела в кормовой части тела выдувалась струя. Режим «переходная инжекция» соответствовал безыmpульсному следу; «сильная инжекция» – турбулентной струе в спутном потоке. На рис. 1, а–в рассчитанные для различных режимов движения профили дефекта продольной компоненты скорости сопоставляются с результатами измерений осесимметричного следа [9, 18]. Экспериментальные данные на различных расстояниях от тела представлены значками; результаты расчетов изображены сплошной линией и соответствуют результатам расчетов при $x/D = 90$.

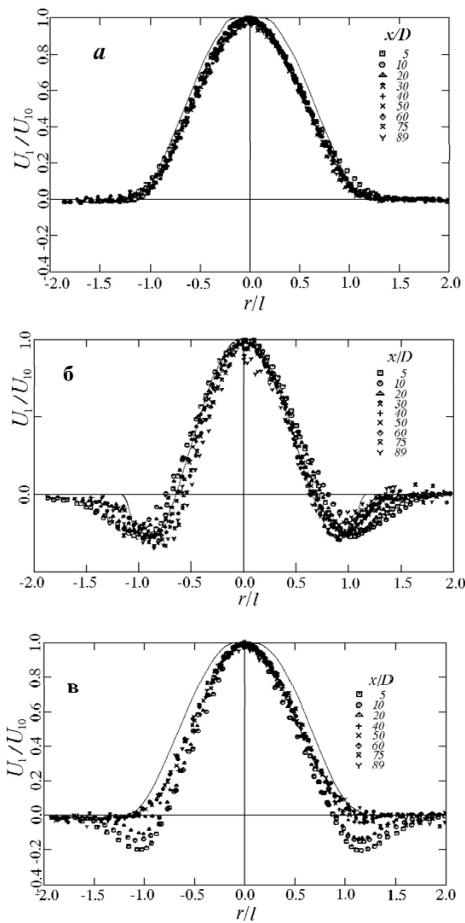


Рис. 1. Экспериментальные и рассчитанные профили дефекта продольной компоненты средней скорости в осесимметричном следе для различных режимов течения:
а – чистый след; б – переходная инжекция;
в – сильная инжекция

а – чистый след; б – переходная инжекция;
в – сильная инжекция

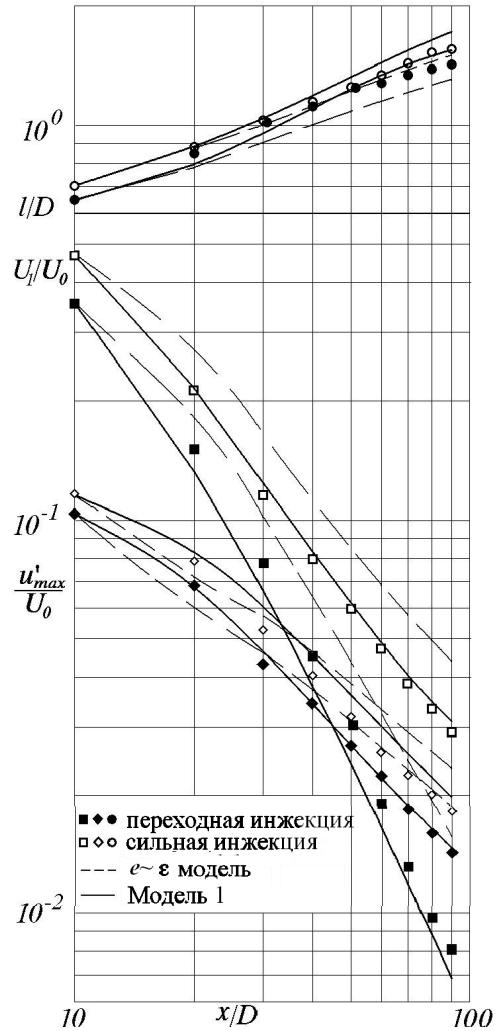


Рис. 2. Вырождение осевых значений дефекта скорости U_1 , максимальных в сечении значений интенсивности флюкутации продольной компоненты скорости $u' = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ и размера следа l : $u'(x, l) = 0.5u'(x, 0)$

На рис. 2 результаты расчетов характерного размера следа, осевых значений дефекта продольной компоненты скорости и интенсивности турбулентных флюкутаций скорости с

применением Модели 1 сопоставляются с экспериментальными данными [9, 18]. Пунктирная линия – расчеты на основе классической $e \sim \varepsilon$ модели. Начальные данные задавались согласованными с экспериментальными при $x/D = 10$. Совпадение с применением Модели 1 достаточно хорошее.

Отметим, что в рассмотренных вариантах течение в следе характеризуется значениями $I = \int_0^\infty y J \left(UU_1 - 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right) dy' = 0.140 \times 10^{-2}$ (переходная инжекция), $I = 0.223 \times 10^{-1}$ (сильная инжекция). Величина I связана с суммарным избыточным импульсом F_0 соотношением $F_0 = 2\pi\rho_0 I$. В [11] представлены начальные данные для экспериментов Линя и Пао; турбулентный след за буксируемым телом характеризуется $I = 0.120 \times 10^{-1}$. Таким образом, суммарный избыточный импульс в рассмотренных вариантах течения в следе меняется весьма существенно.

Для случая динамики безымпульсного турбулентного следа в условиях ненулевого, близкого к изотропному, фона [17] проводились также основанные на Модели 2 расчеты вплоть до весьма больших расстояний от тела $x \leq 5 \cdot 10^5 D$. Применились Алгоритмы 1, 2. Результаты расчетов иллюстрируются рис. 3, на котором приведено распределение безразмерного дефекта скорости на оси следа в зависимости от расстояния от тела. Кривая 1 получена с использованием Алгоритма 2, обладающего свойством консервативности по отношению к закону сохранения импульса (9); кривая 2 – с применением Алгоритма 1, не обладающего таким свойством. Можно видеть, что результаты расчетов близки для $x/D < 10^3$; при больших x наблюдается значительное расхождение, увеличивающееся с ростом x . Примеры проявления неконсервативности алгоритмов решения задач математической физики достаточно хорошо известны [30, 31]. Рис. 3 – еще одна иллюстрация нарушения свойства консервативности.

Рис. 4–5 относятся к расчетам течения в следе за сферой в условиях нулевого турбулентного фона [16]. Цель этих расчетов – демонстрация влияния величины суммарного избыточного импульса на развитие течения в дальнем следе. По-прежнему, начальные данные, согласованные с экспериментальными, задавались при $x/D = 10$, но они незначительно изменялись для того, чтобы получать различные значения величины I . Было проведено три варианта расчета: I – для $I = 4.0 \times 10^{-9}$, II – для $I = -9.0 \times 10^{-4}$, III – для $I = 9.3 \times 10^{-4}$. Все данные приводятся в безразмерном виде. Величина $I = 4.0 \times 10^{-9}$ соответствовала безымпульсной конфигурации следа. На рис. 4 показано вырождение осевых значений дефекта скорости и энергии турбулентности в зависимости от расстояния x/D . Сплошные линии – результаты расчетов, пунктирные – автомодельные законы вырождения характеристик безымпульсных и классических турбулентных следов. Следует обратить внимание на тот факт, что на рис. 4 для варианта II для больших расстояний от тела приведен не сам дефект продольной компоненты скорости, а его абсолютная величина. Вариант II на больших расстояниях от тела соответствует течению в турбулентной струе в спутном потоке [3]; вариант III – классическому турбулентному следу с ненулевым суммарным избыточным импульсом. Законы вырождения турбулентных следов для вариантов II, III близки к представленным в [3]. Результаты расчетов со-

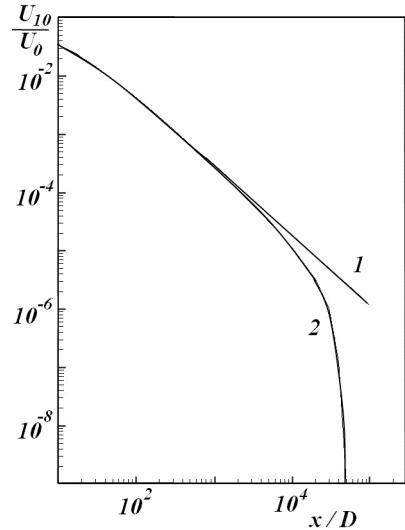


Рис. 3. Рассчитанные осевые значения дефекта средней скорости в осесимметричном безымпульсном следе за сферой. Проявление неконсервативности численного алгоритма

численного физики достаточно хорошо известны [30, 31]. Рис. 3 – еще одна иллюстрация нарушения свойства консервативности.

гласуются также с результатами работы [13]. Можно видеть, что на рассмотренных расстояниях влияние ненулевого малого избыточного импульса в большей мере оказывается на вырождении дефекта продольной компоненты скорости. Обращает на себя внимание то, что на больших расстояниях от тела законы вырождения следа в вариантах II, III согласуются с законами вырождения в ламинарном режиме течения [3].

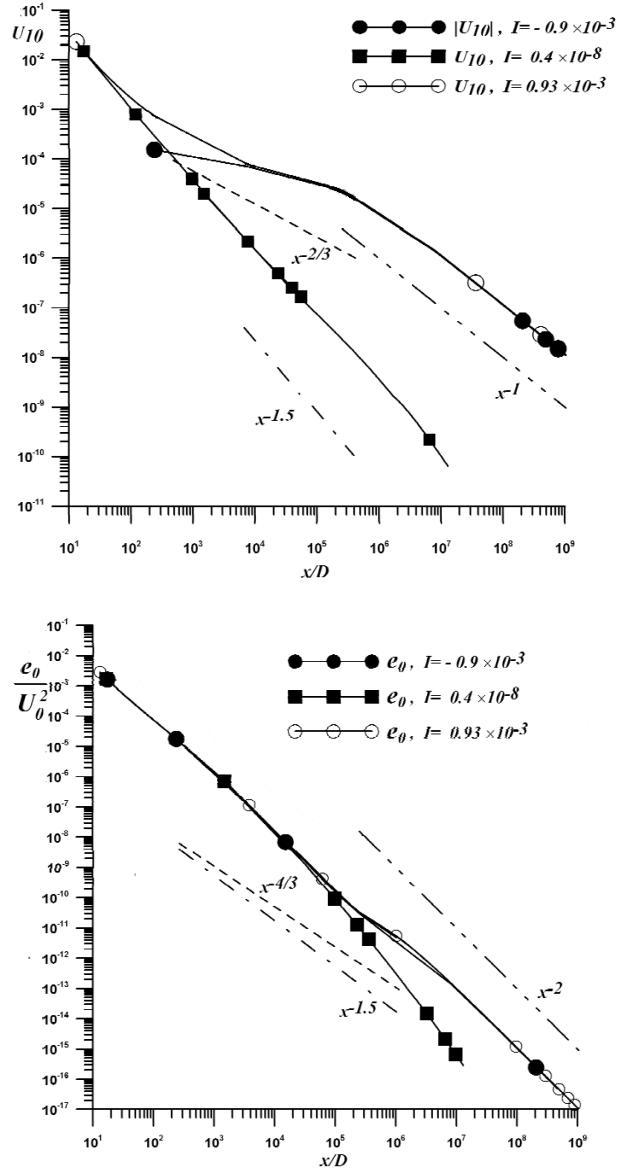
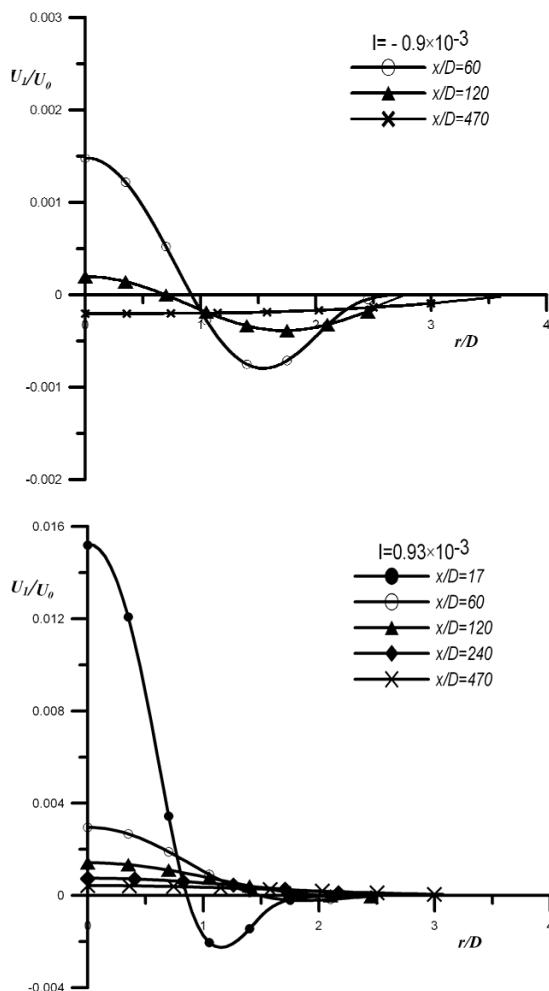


Рис. 4. Влияние величины I на вырождение дефекта средней скорости U_{10} и энергии турбулентности e_0 .

Профиля дефекта скорости для случаев $I = -9.0 \times 10^{-4}$ и $I = 9.3 \times 10^{-4}$ приведены соответственно на рис. 5. Видно, что с ростом расстояния от тела происходит перерождение следов с малым отличием от нуля импульсом либо в классический импульсный турбулентный след, либо в турбулентную струю (в зависимости от знака I). Форма же профиля дефекта продольной компоненты скорости в варианте II на этих расстояниях остается без изменения.

Рис. 5. Профили дефекта скорости при разных значениях I

Изменение в зависимости от расстояния от тела турбулентного числа Рейнольдса R_λ представлено на рис. 6. Можно видеть, что для $x / D < 500$ в рамках принятой модели эта величина достаточно велика и турбулентное течение в следе изменяется по законам, близким к законам вырождения развитого турбулентного течения. С ростом расстояния от тела турбулентное число Рейнольдса убывает и турбулентность в следе уже не может считаться развитой. Поскольку нас интересует асимптотическое вырождение следа и влияние на его эволюцию малого суммарного избыточного импульса, в настоящей работе используется полуэмпирическая модель турбулентности, учитывающая варьирование турбулентного числа Рейнольдса.

Заметим следующее. В замкнутой математической Модели 1 весьма весомую роль играет отношение P / ε . Анализ поведения отношения P / ε в рассмотренных задачах показывает, что при численном моделировании безымпульсного турбулентного следа в условиях лабораторных измерений [16] максимальное значение $P / \varepsilon \approx 0.13$ при $x / D = 12$, а далее оно достаточно быстро убывает. При $x / D = 80$ максимальное значение $P / \varepsilon \approx 0.014$. Для варианта экспериментальных данных [9, 18], соответствующих режиму «сильной инжекции» при $x / D = 20$ максимальное значение $P / \varepsilon \approx 0.96$; при $x / D = 400$ максимальная величина $P / \varepsilon \approx 0.42$ и далее практически не убывает. В значительной части течения в следе за удлиненным буксируемым телом $P / \varepsilon \approx 1$; в безымпульсном следе $P / \varepsilon \ll 1$.

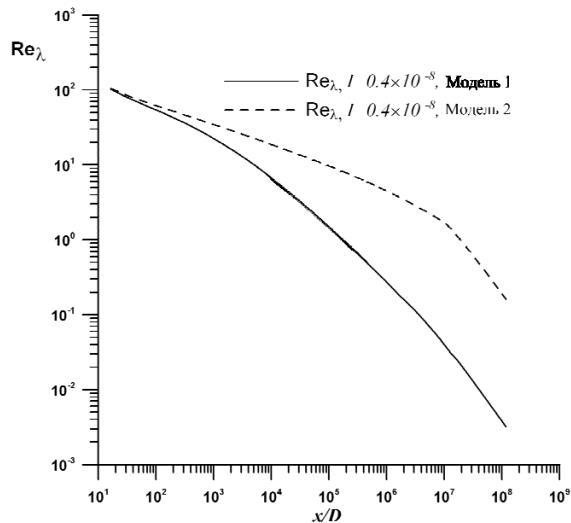


Рис. 6. Вырождение осевых значений турбулентного числа Рейнольдса

Достаточная универсальность примененной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений обусловлена возможностью учета в ней влияния параметра P/ε [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной работы сводятся к следующему. Построены численные модели осесимметричных турбулентных следов с варьируемым значением суммарного избыточного импульса, основанные на применении алгебраической модели рейнольдсовых напряжений Роди. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными. Продемонстрировано влияние малого суммарного избыточного импульса. Определено численное моделирование асимптотического (на больших расстояниях от тела) вырождения турбулентных следов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (грант 10-01-00435) и гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом / А.А. Таунсенд. – М.: ИЛ., 1959. – 399 с.
- [2] Naudascher E. Flow in the wake of a self-propelled bodies and related sources of turbulence / E. Naudascher // J. Fluid Mech. – 1965. – Vol. 22. – Pt. 4. – P. 625–656.
- [3] Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов / А.С. Гиневский. – М.: Машиностроение, 1969. – 400 с.
- [4] Rodi W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence / W. Rodi. – Ph.D.Thesis, University of London, 1972. – 310 p.
- [5] Букреев В.И. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа / В.И. Букреев, О.Ф. Васильев, Ю.М. Лыткин // Доклады Академии наук СССР. – 1972. – Т. 207. – №. 4. – С. 804–807.
- [6] Левеллен В. Применение полуэмпирических уравнений пульсационного движения к расчету осесимметричных следов / В. Левеллен, М. Теске, С. Дональдсон // Ракетная техника и космонавтика. – 1974. – Т. 12. – №. 5. – С. 53–56.
- [7] Букреев В.И. О балансе энергии турбулентности в осесимметричных следах за телами различной формы / В.И. Букреев, В.А. Костомаха, Ю.М. Лыткин // Журнал ПМТФ. – 1974. – №. 1. – С. 165–168.
- [8] Finson M.L. Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes / M.L. Finson // J. Fluid Mech. – 1975. – Vol. 71. – P. 465–479.
- [9] Higuchi H. Experimental investigation on axisymmetric turbulent wakes with zero momentum defect / H. Higuchi. – Ph.D.Thesis, California Institute of Technology, 1977. – 225 p.

- [10] Городцов В.А. Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности / В.А. Городцов // Известия АН СССР. Сер. МЖГ. – 1979. – №. 1. – С. 43–50.
- [11] Hassid S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media / S. Hassid // J. Hydraulics. – 1980. – Vol. 14. – P. 25–32.
- [12] Hassid S. Similarity and decay law of momentumless wakes / S. Hassid // Phys. Fluids. – 1980. – Vol. 23. – P. 404–405.
- [13] Лучко Н.Н. Влияние погрешности определения избыточного импульса на развитие осесимметричного турбулентного следа / Н.Н. Лучко // Структура турбулентных течений. (Сборник научных трудов ИТМО АН БССР.) – Минск, 1982. – С. 35–48.
- [14] Коловандин Б.А. Влияние внешней турбулентности на поле скорости в следе за эллипсоидом вращения / Б.А. Коловандин, Н.Н. Лучко // ИФЖ – 1985. – Т. 48. – №. 4. – С. 538–546.
- [15] Ковалев И.И. Конечная стадия вырождения турбулентного поля скорости в спутном потоке / И.И. Ковалев, Б.А. Коловандин, Н.Н. Лучко // ИФЖ. – 1985. – Т. 49. – №. 2. – С. 209–214.
- [16] Алексенко Н.В. Экспериментальное исследование осесимметричного безымпульсного турбулентного струйного течения / Н.В. Алексенко, В.А. Костомаха // Журнал ПМТФ – 1987. – №. 1. – С. 65–69.
- [17] Алексенко Н.В. Экспериментальное исследование динамики безымпульсного турбулентного следа в турбулизованном внешнем потоке / Н.В. Алексенко, В.А. Костомаха // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1987. – Вып. 81. – С. 14–24.
- [18] Higuchi H. Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations / H. Higuchi, T. Kubota // Phys. Fluids A. – 1990. – Vol. 2. – № 9. – P. 1615–1623.
- [19] Chernykh G.G. Numerical models of a plane and axisymmetric turbulent wakes in homogeneous fluid / G.G. Chernykh, A.G. Demenkov, N.N. Fedorova // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, aug. 22–26, 1994. – Novosibirsk, 1994. – Pt. 2. – P. 76–81.
- [20] Chernykh G.G. On numerical simulation of jet flows of viscous incompressible fluids / G.G. Chernykh, A.G. Demenkov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1997. – Vol. 12. – № 2. – P. 111–125.
- [21] Voropaeva O.F. Dynamics of a far momentumless turbulent wake in passively stratified media / O.F. Voropaeva // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2004. – Vol. 19. – № 1. – P. 83–102.
- [22] Lu M.-H. Numerical study of the momentumless wake of an axisymmetric body / M.-H. Lu, A.I. Sirviente // 43-rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10-13 January 2005, Reno, Nevada, AIAA 2005 – 1109, 14 p.
- [23] Воропаева О.Ф. Иерархия полуэмпирических моделей турбулентности второго и третьего порядка в расчетах безымпульсных следов за телами вращения / О.Ф. Воропаева // Матем. моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 3. – С. 29–51.
- [24] Капцов О.В. Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа / О.В. Капцов, И.А. Ефремов, А.В. Шмидт // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 74–78.
- [25] Новиков Б.Г. О влиянии малого суммарного импульса на развитие следа за самодвижущимся телами / Б.Г. Новиков // Теплофизика и Аэромеханика. – 2009. – № 4. – С. 597–623.
- [26] Chernykh G.G. Dynamics of turbulent wake with small excess momentum in stratified media / G.G. Chernykh, N.P. Moshkin, A.V. Fomina // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation – 2009. –Vol. 14. – № 4. – P. 1307–1323.
- [27] Maderich V. Asymptotic and numerical analysis of momentumless turbulent wakes / V. Maderich, S. Konstantinov // Fluid Dyn. Res. – 2010. – Vol. 42. – № 4, 25 pp. DOI: 10.1088/0169-5983/42/4/045503
- [28] De Stadler M.B. Simulation of a propelled wake with moderate excess momentum in a stratified fluid / M.B. Stadler De, S. Sarkar // J. Fluid Mech. – 2012. – V. 692. – P. 28–52.
- [29] Lewis B.J. Analysis and optimization of guide vane jets to decrease the unsteady load on mixed flow hydroturbine runner blades / B.J. Lewis, J.M. Cimbala, A.M. Woudan // Proceedings of Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012, ICCFD7-1701, 13 p.
- [30] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. –М.: Наука, 1966. – 724 с.
- [31] Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Деменков Андрей Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики НГТУ, старший научный сотрудник ин-та теплофизики СО РАН. Основное направление научных исследований – численное моделирование турбулентных течений. Имеет 50 публикаций, в том числе 1 монографию и 3 учебных пособия. E-mail: demenkov@itp.nsc.ru

Черных Геннадий Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ин-та вычислительных технологий СО РАН. Основное направление научных исследований – гидродинамика свободных турбулентных течений, внутренние волны, тепловая гравитационная конвекция в мантии Земли. Имеет более 100 публикаций. E-mail: chernykh@ict.nsc.ru

A.G. Demenkov, G.G. Chernykh

Numerical modeling of axisymmetric turbulent wakes with varied total excess momentum

Based on modified $e \sim \epsilon$ turbulence model the numerical simulation of the axisymmetric turbulent wakes dynamics in homogeneous fluid was carried out. The results of calculations are in a good agreement with the experimental data. The asymptotic decay of turbulent wakes with small total excess momentum was investigated.

Key words: axisymmetric turbulent wakes, numerical modeling.