

УДК 539.1:534.1

Исследование устойчивости кольцевых пластин методом конечных элементов*

Ж.Б. БАКИРОВ, М.Ж. БАКИРОВ

Методом конечных элементов исследуется устойчивость кольцевых пластин при действии сосредоточенных и неравномерно распределенных контурных нагрузок. Конечно-элементная модель строится на базе четырехугольных изопараметрических элементов второго порядка, а для решения задач используется программный комплекс ANSYS.

Ключевые слова: устойчивость, кольцевые пластины, метод конечных элементов, матрица начальных усилий, собственные значения, критический параметр нагрузки, форма потери устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Круглые и кольцевые пластины являются элементами многих технологических и энергетических машин, летательных аппаратов, аппаратов химической и пищевой промышленности, встречаются в судостроении и строительстве. Многие из них в процессе эксплуатации испытывают сложное термостатическое воздействие в срединной плоскости. Для таких пластин критерием работоспособности чаще всего является устойчивость первоначальной формы равновесия.

Задачи устойчивости кольцевых пластин в однородном поле напряжений и чистом сдвиге решаются точными методами и хорошо изучены. Задачи устойчивости кольцевых пластин в общем случае осесимметричного нагружения контуров имеют точное решение лишь в частных случаях, но могут быть решены аналитическими методами на основе вариационного принципа или энергетического подхода. Эти методы изложены в классических работах С.П. Тимошенко, Э.И. Григолюка, А.С. Вольмира.

Вместе с тем в элементах конструкций нередко встречаются кольцевые пластины, нагруженные по контуру сосредоточенными и неравномерно распределенными нагрузками. Так дисковые фрезы для прорезания пазов, колеса торцевых волновых передач, диски эпициклических и фрикционных механизмов нагружены на свободном контуре локальными силами. Дисковые исполнительные органы с алмазными сегментами, применяемые для разрушения крепких горных пород и в камнеобработке нагружены на части наружного контура неравномерно касательными и радиальными силами (силы резания и подачи). Исследование устойчивости таких пластин возможно приближенными методами на основе энергетического критерия, не требующего точного определения докритического напряженного состояния. При действии распределенных нагрузок можно использовать смягченный энергетический критерий устойчивости Тимошенко, а при действии сосредоточенных сил используется критерий устойчивости Алфутова–Балабуха, основанный на построении статически возможного докритического напряженного состояния в пластине. Обоснование, математическая формулировка этих критериев и применение метода Ритца для них изложено в монографиях [1, 2]. Ряд задач по устойчивости кольцевых пластин с помощью такого подхода решены Л.Г. Алехиным [3]. Однако практическая реализация этих методов ограничена трудностями определения вторичных перемещений и построения статически возможного поля напряжений.

В настоящее время многие сложные задачи устойчивости кольцевых пластин решаются численными методами с использованием ЭВМ. Среди этих методов наибольшее применение

* Статья получена 5 марта 2011 г.

имеет метод конечных элементов (МКЭ). Так С. Моут разработал треугольные конечные элементы с двенадцатью степенями свободы и применил их для исследования устойчивости кольцевых пластин под действием локальных сил [4]. Сринивасен и Рамамурти раскладывали внешние нагрузки в ряд Фурье и применяли полуаналитический метод конечных элементов [5]. Всё же даже методом конечных элементов (МКЭ) рассмотрено мало задач об устойчивости кольцевых пластин при действии локальных нагрузок.

Данная работа посвящена применению МКЭ для исследования устойчивости кольцевых пластин под действием сосредоточенных контурных нагрузок.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН

Решение задач устойчивости МКЭ состоит из следующих этапов:

– решение плоской задачи теории упругости о напряженно-деформированном состоянии пластины;

– формирование матрицы изгибной жесткости;

– формирование матрицы начальных напряжений;

– решение задачи о собственных значениях.

Для реализации первых трех этапов существуют основные соотношения, получаемые на основе вариационных принципов.

Важным моментом в решении задач МКЭ является выбор типа конечного элемента. Он должен учитывать конфигурацию границ объекта. В этом смысле более универсальными являются изопараметрические элементы. Для аппроксимации перемещений в элементах применяют линейные и квадратичные функции. Были решены множество тестовых задач с использованием треугольных, четырехугольных обычных и изопараметрических элементов с линейными и квадратичными функциями формы. Сравнение полученных решений позволило сделать вывод о том, что с точки зрения точности и времени вычислений наиболее эффективным является изопараметрический восьмиузловой четырехугольный элемент [6] (рис. 1).

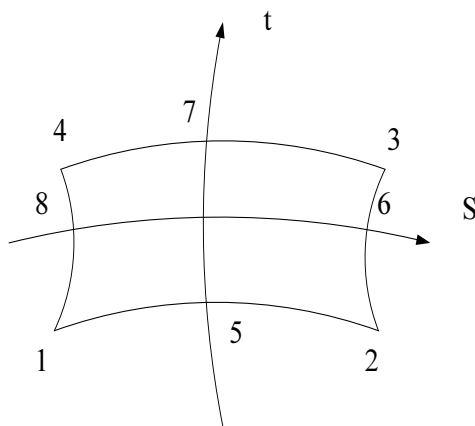


Рис. 1.

Введем локальные координаты S, t , которые меняются в каждом элементе от -1 до $+1$. Связь между локальной и глобальной (декартовой) системой координат удобно задавать с помощью специальных функций

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad (1)$$

где x_i, y_i – глобальные координаты узлов, $N_i(S, t)$ – так называемые функции формы, которые выражаются через локальные координаты. В изопараметрических элементах эти функции применяются и для аппроксимации перемещений по узловым значениям:

$$U = \sum_{i=1}^8 N_i U_i, \quad V = \sum_{i=1}^8 N_i V_i. \quad (2)$$

В рассматриваемом элементе эти функции имеют вид (рис. 1):

$$N_i = \left[(1 + SS_i)(1 + tt_i) - (1 - S^2)(1 + tt_i) - (1 - t^2)(1 + SS_i) \right] / 4, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$N_i = (1 - S^2)(1 + t \cdot t_i) / 2, \quad i = 5, 7;$$

$$N_i = (1 - t^2)(1 + S \cdot S_i) / 2, \quad i = 6, 8.$$

Эти выражения можно записать в виде одной функции:

$$N_i = S_i^2 t_i^2 \left[(1 + S_i S)(1 + t_i t) - (1 - S^2)(1 + t_i t) - (1 - t^2)(1 + S_i S) \right] / 4 + \\ + t_i^2 (1 - S^2)(1 - S_i^2)(1 + tt_i) / 2 + S_i^2 (1 - t^2)(1 - t_i^2)(1 + S_i S) / 2. \quad (3)$$

Решение плоских задач теории упругости МКЭ хорошо разработано. Выведем конкретные выражения для формирования основных матриц.

Перемещение произвольной точки элемента представим в виде

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e,$$

где

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix}.$$

Вектор узловых перемещений $\{\delta\}$ (как и вектор узловых сил) имеет 16 компонент, по две (U, V) в каждом узле.

Вектор деформации в элементе определяется по соотношениям Коши:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}^e = [B_1, B_2, \dots, B_8] \{\delta\}^e, \quad (4)$$

где

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Связь между производными по локальным и глобальным координатам легко получить, используя матрицу Якоби $[J]$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial y}{\partial S} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \left[\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial S} - \frac{\partial y}{\partial S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial t} \right] / |J|, \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \left[\frac{\partial x}{\partial S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial S} \right] / |J|, \end{aligned} \quad (6)$$

где $|J|$ – определитель матрицы Якоби.

В этих выражениях производные глобальных координат по локальным вычисляются из соотношений (1), например:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial S} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i.$$

Производные от функции формы вычисляются из соотношений (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial S} &= S_i^2 t_i^2 [S_i t(t + t_i) + 2S(1 + t t_i)] / 4 - S t_i^2 (1 - S_i^2)(1 + t_i t) + \\ &+ S_i^3 (1 - t^2)(1 - t_i^2) / 2; \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} &= S_i^2 t_i^2 [S t_i (S + S_i) + 2t(1 + S S_i)] / 4 - t S_i^2 (1 - t_i^2)(1 + S_i S) + \\ &+ t_i^3 (1 - S^2)(1 - S_i^2) / 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя выражения (7), (6), (5) определяем матрицу $[B]$, связывающую вектор деформации и вектор узловых перемещений элемента. Она имеет размерность 3×16 .

Матрица жесткости элемента определяется известным соотношением:

$$[k]^e = h \iint [B]^T [D] [B] dx dy,$$

где h – толщина элемента; $[D]$ – матрица упругости для плоской задачи; $[B]^T$ – транспонированная матрица.

Вычисляя элемент площади в локальных координатах, можно записать

$$[k]^e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{(S,t)}]^T [D] [B_{(S,t)}] \cdot |J| \cdot dS dt. \quad (8)$$

При необходимости эту матрицу можно представить в блочном виде (размер блока 2×2):

$$[k_{ij}]^e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{i(S,t)}]^T [D] [B_{j(S,t)}] \cdot |J| \cdot dS dt, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8).$$

Интегрирование выражения (8) проводится численно по квадратурным формулам Гаусса. Многочисленные исследования показали, что для используемых здесь квадратичных элементов достаточно двух точек в каждом направлении [6].

Пусть рассматриваемый элемент нагружен объемными силами $\{P_v\}$, поверхностными усилиями $\{P_r\}$ и имеют начальную деформацию от температуры

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha T, \alpha T, 0]^T.$$

Тогда по принципу возможных перемещений узловые нагрузки определяются так:

$$\begin{aligned} \{R_v\}^e &= h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{P_v\} \cdot |J| \cdot dtdS, \\ \{R_r\}^e &= h \int_{\Gamma} [N]_{\Gamma}^T \{P_r\} d\Gamma, \\ \{R_0\}^e &= h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} \cdot |J| \cdot dtdS, \end{aligned} \quad (9)$$

где Γ – контур элемента с поверхностными усилиями.

Вектор напряжения в элементе определяется по закону Гука. При наличии температурных деформаций он определяется так:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D]([B]\{\delta\}^e - \{\varepsilon_0\}). \quad (10)$$

Матрица жесткости и вектор узловых нагрузок для каждого узла системы определяется по стандартной процедуре суммированием по всем элементам, примыкающим к рассматриваемому узлу.

Условие равновесия всей системы теперь имеет вид:

$$[K]\{\delta\} = \{F\},$$

где $\{F\}$, $\{\delta\}$ – векторы узловых нагрузок и перемещений всей системы; $[K]$ – матрица жесткости системы, сформированная из матрицы узловых жесткостей с учетом связи между узлами.

Для однозначного решения этой системы должны быть учтены граничные условия в перемещениях. После определения вектора узловых перемещений напряжения в элементе определяются по формуле (10).

Для исследования статической устойчивости задают малые поперечные перемещения. Деформированное состояние пластины в каждой точке описывается прогибом w и углами поворота относительно осей x, y : γ_x, γ_y . Поэтому в качестве неизвестных в каждой узловой точке конечного элемента нужно задать три компоненты перемещения:

$$\{\delta\}_i^T = \{w_i, \gamma_{xi}, \gamma_{yi}\}.$$

Поле перемещений в рассматриваемом элементе описывается этими тремя компонентами, определяемыми по соотношениям (2). Так как углы поворота приняты в качестве независимых переменных, то деформации в пластине определяем по теории пластин Тимошенко [7]:

$$\chi_x = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \quad \chi_y = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x};$$

$$\Omega_\xi = \gamma_\xi + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}; \quad \Omega_y = \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Здесь χ – искривления срединной поверхности, а Ω – деформации поперечного сдвига. Эти выражения в матричной форме примут вид (4), где

$$[B_i]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь функции формы и их производные по глобальным координатам определяются по вышеприведенным соотношениям.

Вектор внутренних силовых факторов в элементе (моменты и поперечные силы) определяется по формуле

$$\{M\}^T = \{M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\} = [D] \cdot [B] \{\delta\}^e,$$

где матрица упругости

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k(1-\nu)/h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6k(1-\nu)/h^2 \end{bmatrix};$$

k – коэффициент поперечного сдвига (обычно $k = 5/6$).

Матрица изгибной жесткости элемента $[K_u]$ определяется по формуле (8) (без h) и имеет размерность 24×24 . При необходимости её можно представить в виде блоков размерности 3×3 .

Согласно нелинейной теории пластин, при потере устойчивости от поперечного прогиба появляются дополнительные деформации срединной поверхности

$$\{\varepsilon_e\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial x} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} [C] \{\varphi\}.$$

Связь между производными от прогиба и узловыми параметрами имеет вид

$$\{\phi\} = [G]\{\delta\}^e = [G_1, G_2, \dots, G_8]\{\delta\}^e,$$

где

$$[G]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В работе [6] показано, что матрицу начальных усилий можно определить по формуле

$$[K_N] = \iint [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] dx dy,$$

где N_x , N_y , N_{xy} – докритические мембранные усилия, определяемые умножением компонент напряжений (10) на толщину элемента.

Типичная подматрица имеет размерность 3×3 , в которой все члены равны нулю за исключением

$$k_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] |J| ds dt.$$

Матрица изгибной жесткости и матрица начальных усилий для всей конструкции определяются суммированием по всем элементам, примыкающим к каждому узлу, а вектор узловых нагрузок в задачах устойчивости равен нулю.

Матрица начальных усилий пропорциональна действующей нагрузке D , тогда разрешающее уравнение устойчивости можно представить в виде

$$\{[K_u] - \lambda [K_N]\} \{\delta\} = 0,$$

где λ – безразмерный параметр нагрузки; $[K_u]$, $[K_N]$ – симметричные матрицы порядка $m = 3 \cdot n$, где n – общее количество узловых точек.

Эта система имеет ненулевое решение, когда её определитель равен нулю

$$|[K_u] - \lambda [K_N]| = 0. \quad (11)$$

Это уравнение представляет собой алгебраический полином порядка m и имеет m корней. Наименьший корень дает критический параметр нагрузки.

Обращая матрицу изгибной жесткости уравнение (11) перепишем в виде

$$[A] - \lambda^{-1} [\hat{A}] = 0,$$

где $[A] = [K_u]^{-1} [K_N]$; $[\hat{A}]$ – диагональная единичная матрица.

Таким образом, мы приходим к классической задаче о собственных значениях.

В общем случае матрица $[\hat{A}]$ не является симметричной. Матрицу жесткости можно предварительно разложить на произведение треугольных матриц

$$[K_u] = [L][L]^{\hat{}}.$$

Тогда матрица $[A]$ становится симметричной:

$$[A] = [L]^{-1} [K_N] ([L]^{-1})^T.$$

Для однозначного решения задач статики на матрицу жесткости надо наложить условия закрепления пластины. Только в этом случае она не является сингулярной и имеет обратную матрицу. Способы учета граничных условий описаны в [6].

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ИНСТРУКЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS

Широкое внедрение в расчетную практику быстродействующих ЭВМ привело к созданию универсальных программных пакетов на основе МКЭ, применяемых при анализе работы и проектировании различных конструкций в условиях разнообразных воздействий. Введение в расчетные пакеты интерактивного режима работы существенно упростило и ускорило процесс решения задач. Стало возможным использовать интерактивную графику для ввода и проверки геометрии модели, заданных свойств материала, граничных условий перед началом расчета, а также для визуального контроля результатов решения. Стремительное развитие и распространение персональных компьютеров в последние годы привело к тому, что большие программные пакеты стали доступны широчайшему кругу пользователей.

В настоящее время на рынке представлено большое количество самых разнообразных расчетных пакетов. Среди них наибольшее применение находит программа ANSYS. Программа полностью автоматизирует все этапы расчета, начиная от создания модели до просмотра (распечатки) форм потери устойчивости. ANSYS может работать как в командном, так и в интерактивном режиме. Программа позволяет рассчитывать пластины переменной толщины при произвольном нагружении с учетом возможной ортотропности материала. Для расчета кольцевых пластин лучше всего использовать восьмиузловой оболочечный элемент Shell 93 с шестью степенями свободы в каждом узле с квадратичными функциями формы.

Исходными данными для расчета являются:

- геометрические размеры пластины, тип и размер конечного элемента;
- толщина пластины или толщина элементов в четырех угловых точках;
- свойства материала (E , ν – для изотропного материала);
- закрепление контуров пластины и действующие нагрузки.

Последовательность расчета на устойчивость:

- создание конечно-элементной модели;
- выполнение статического расчета;
- расчет собственных значений;
- расширение результатов;
- просмотр (распечатка) результатов.

Конечно-элементная модель создается автоматически с помощью препроцессора PREP 7 [8].

При создании модели следует определить имя задания и заголовок, а далее использовать постпроцессор POST 7 для указания типа элемента и его характеристик, свойств материала и геометрии модели.

Для работы в интерактивном режиме используется экранное меню (ЭМ), в которых есть последовательно открывающиеся панели и окна. В панелях указываются запрашиваемые параметры, а в выпадающих окнах нужно указывать числовые значения этих параметров. В этом и заключается интеллектуальность меню ПК ANSYS: меню путем запроса подсказывает последовательность ввода необходимых параметров для расчета.

Последовательность набора команд из ЭМ для выполнения определенных этапов расчета имеется в специальной литературе, например [8]. Там же имеются команды для работы в пакетном режиме. Так для задания типа конечного элемента производится набор из ЭМ в последовательности

Preprocessor → Element Types → Add / Edit / Delete;

на экране появляется панель Element Types, которая позволяет из общего списка выбрать элемент Shell 93.

Вместо ЭМ можно для этих целей использовать команду **ET, ITYPE, Ename**.

Геометрическая модель строится твердотельным моделированием в последовательности

Preprocessor → Create → Areas → Circle → By Dimensions;

в появляющейся панели надо указать внешний и внутренний радиус кольца в полях RAD1 и RAD2 соответственно и нажать кнопку OK. В результате на экране ANSYS Graphics получим изображение кольца с указанными радиусами.

Для получения конечно-элементной модели необходимо сначала установить размер конечного элемента. Для этого надо выбрать из ЭМ

Preprocessor → Meshing → Size Cntrls → All Kps;

на экране появляется панель Element Size at All Keypoints. В этой панели в поле SIZE устанавливается размер элемента.

Создание сетки конечного элемента производится из ЭМ набором последовательности

Preprocessor → Mesh → Areas → Free;

появляется панель Mesh Areas. В этой панели нажимаем кнопку Pick All и сетка конечного элемента будет наложена на геометрическую модель, а сама панель закроется.

Следующим этапом является приложение закреплений и нагрузок. Это производится из ЭМ набором последовательности

Solution → Loads → Apply → .

Дальнейшая последовательность зависит от вида закрепления или нагрузки.

Так как силы изменяются пропорционально параметру P, то его значение следует задать равным единице. Тогда полученные собственные значения будут равны критическим нагрузкам.

В задачах устойчивости для формирования матрицы начальных усилий необходимо после проведения статического расчета сохранить и сделать доступным для модуля расчета устойчивости матрицы начальных напряжений в элементах. Для этого используется команда **PSTRES**.

Расчет собственных значений производится в следующей последовательности.

1. Вход в модуль решения и указание типа расчета. Для этого нужно последовательно выполнить команды

SOLU → ANTYPE, BUCKLE

или из ЭМ набрать **Solution → Analysis Type → New Analysis → Eigen Buckling**.

2. Указание опции расчета. Здесь требуется выбрать метод вычисления собственных значений и указать число определяемых собственных значений

3. Далее задача запускается на решение как при статическом расчете. В результате расчета получим собственные значения, которые являются масштабными множителями нагрузок (коэффициентами запаса устойчивости).

4. Выход из модуля решения.

При необходимости просмотра форм потери устойчивости надо расширить результаты. Для этого надо снова войти в модуль решения **SOLUTION** и указать опций шага расширения. Далее задача запускается на решение (**SOLVE**). По завершении расчета выходим из модуля решения.

Для просмотра полученных результатов вызывается постпроцессор командой **POST1** или из ЭМ **General Postproc**. Для просмотра списка собственных значений из ЭМ вызывается команда

General Postproc → Results Summary;

на экране появляется панель SET, LIST Command, содержащая собственные значения в порядке возрастания.

Так как каждому собственному значению соответствует своя форма потери устойчивости, то их просмотр производится по очереди. Для просмотра первой формы из ЭМ вызывается последовательность.

General Postproc → Read Results → First Set. (a)

Далее из выпадающего меню вызывается последовательность:

Plot → Results → Contour Plot → Nodal Solution. (б)

В появившейся диалоговой панели следует указать отображение перемещений в направлении оси z . Для просмотра следующей формы команды (а) и (б) повторяются, но в (а) First Set надо заменить на Next Set.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Исследована устойчивость кольцевых пластин, жестко зашеченных по внутреннему контуру и нагруженную на свободном наружном контуре сосредоточенными радиальными P_r и касательными P_t силами. В результате расчетов определены безразмерные критические параметры нагрузки $\lambda = PR_2 / D$ (R_2 – наружный радиус) для пластин с различным отношением радиусов β и формы потери устойчивости. Рассмотрено действие только касательных сил $\lambda_t (d = \infty)$, только радиальных сил $\lambda_r (d = 0)$, а также при совместном их действии в одной точке. В последнем случае задавалось отношение касательной силы к радиальной (d) и определялось критическое значение параметра радиальной нагрузки λ_r . Результаты расчетов для $\mu = 0,3$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения критического параметра нагрузки при действии сосредоточенных сил

d / β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
∞	5,81	8,74	11,14	16,16	23,28
0	3,28	3,92	4,83	6,05	7,83
0,5	2,95	3,71	4,69	5,86	7,62
1	2,55	3,35	4,23	5,41	7,14
2	1,91	2,64	3,42	4,41	6,17
5	1,07	1,41	1,80	2,52	3,6
10	0,565	0,78	1,0	1,434	2,04

Формы потери устойчивости для $\beta = 0,2$ при $d = 1$ приведены на рис. 2.

Из таблицы видно, что более опасной для пластины является радиальная нагрузка ($\lambda_r < \lambda_t$). При совместном действии сил рост интенсивности касательных сил уменьшает критическое значение радиальных сил.

Данные таблицы позволяют построить графики изменения критического параметра нагрузки как от отношения радиусов пластины, так и от отношения касательных и радиальных сил. Эти графики позволяют найти критические нагрузки при значениях β и d , не вошедших в таблицу. Пределы изменения этих параметров охватывают весь необходимый для практики диапазон параметров.

Кроме этого, табл. 1 позволяет построить диаграмму критического состояния конкретной пластины при действии произвольных сосредоточенных сил. Эта диаграмма строится в плоскости параметров, λ_r и λ_t . Первая строка табл. 1 дает точку на оси λ_t , а вторая - на оси λ_r . Для каждого d значения λ_r даны в таблице, а соответствующее им значение $\lambda_t = d \cdot \lambda_r$. Эти значения дают точку в плоскости параметров λ_t , λ_r . Таким образом, для каждого β из таб-

лицы получаем семь точек. Соединяя их, получаем диаграмму критического состояния. Такая диаграмма для $\beta = 0,2$ показана на рис. 3. Такая диаграмма полезна при непропорциональном изменении сил и позволяет определить критическое значение одной силы при известном значении другой силы.

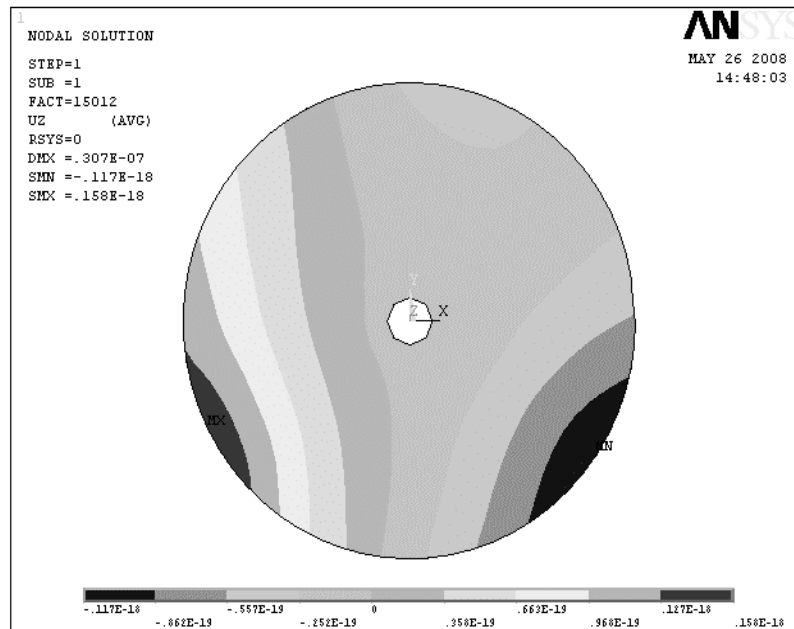


Рис. 2. Формы потери устойчивости при действии сосредоточенных сил

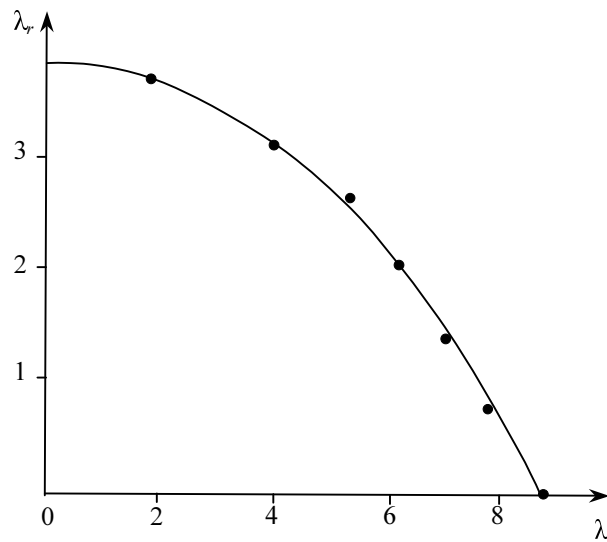


Рис. 3. Диаграмма критического состояния кольцевых пластин ($\beta = 0,2$) при действии сосредоточенных сил

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены конкретные выражения для формирования матрицы жесткости и определения напряжений в кольцевых пластинах МКЭ с использованием четырехугольных восьмиузловых изопараметрических элементов второго порядка. Для этих элементов получены соотношения для вычисления матрицы изгибной жесткости и матрицы начальных усилий для решения задач статической устойчивости.

Разработана инструкция по применению программного комплекса ANSYS для решения задач устойчивости пластин. Она использована для исследования устойчивости кольцевых пластин при действии сосредоточенных радиальных и касательных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 309 с.
- [2] Матвеев К.А. Вариационные методы исследования устойчивости анизотропных пластин при температурно-силовом нагружении / К.А. Матвеев, Н.В. Пустовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 368 с.
- [3] Алехин Л.Г. Исследование устойчивости кольцевых пластин при действии конкретных носательных усилий / Л.Г. Алехин // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1976. – № 206. – С. 52–57.
- [4] Mote C.D. Jr. Principal developments in thin circular saw vibration and control research / C.D. Jr. Mote, R. Szymani // Holz als Roh-und Werkstoff. – 1977. – Vol. 35. – P. 189–196; 219–255.
- [5] Srinivasan V. Stability and vibration of annular plate with concentrated edge load / V. Srinivasan, V. Ramamurti // Comput. Struct. – 1980. – P. 119–129.
- [6] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
- [7] Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. – Рига: Знание, 1988. – 284 с.
- [8] Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Бакиров Жетписбай Бакирович, доктор технических наук, профессор, академик МАИН, заведующий кафедрой механики Карагандинского государственного технического университета (Казахстан). Основное направление научных исследований: механика деформируемого твердого тела, динамика машин, статистическая динамика и теория надежности механических систем. Имеет более 180 научных публикаций, в том числе 3 монографий. E-mail: zh.bakirov@kstu.kz.

Бакиров Мадху Жетписбаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры механики Карагандинского государственного технического университета (Казахстан). Основное направление научных исследований: механика разрушения. Имеет 28 научных публикаций. E-mail: madybacirov@rambler.ru

Zh. B. Bakirov, M. Zh. Bakirov

Research of stability of circular plates by method of finite elements

Stability of circular plates during acting of concentrated and uneven distributed contour loads is investigated by method of finite elements. Finite-element model is constructed at the basis of quadrangular isoparametric elements of second order and program complex ANSYS is used for solving problems.

Key words: stability, circular plates, method of finite elements, matrix of initial effort, own values, critical parameter of loading, shape of stability loss.