

УДК 535.411.854

Новый метод калибровки фазовых сдвигов*

В.И. ГУЖОВ, С.П. ИЛЬНИХ, Д.С. ХАЙДУКОВ, Р.А. КУЗНЕЦОВ

В статье рассматривается алгоритм определения фазовых сдвигов по серии интерференционных картин, полученных методом пошагового фазового сдвига решением системы трансцендентных уравнений.

Ключевые слова: интерферограмма, фазовый сдвиг, расшифровка интерферограмм, интерферометр, пошаговая интерферометрия.

ВВЕДЕНИЕ

Наибольшее распространение при построении интерференционных систем в последние годы получили методы получения и расшифровки интерферограмм на основе пошагового фазового сдвига. Метод пошагового фазового сдвига основан на регистрации нескольких интерференционных картин при изменении фазы опорной волны δ_i на некоторые известные значения (пошаговая или фазо-сдвигающая интерферометрия, phase-sampling, phase-shifting interferometry) [1–14].

$$I_i(x, y) = I_0(x, y) \{1 + V(x, y) \cos[\phi(x, y) + \delta_i]\}, \quad (1)$$

где $i = 0, 1, \dots, m - 1$, m – число фазовых сдвигов.

Основной задачей расшифровки является определение разности фаз интерферирующих волновых фронтов $\phi(x, y)$ по значениям зарегистрированных интенсивностей $I_i(x, y)$. Если фазовый сдвиг известен, то уравнение (1) содержит три неизвестных: $\phi(x, y)$ – фазовая разность, $I_0(x, y)$ – средняя интенсивность, $V(x, y)$ – видность. Для их нахождения нам необходимо не менее трех уравнений с различными значениями δ_i . Формулы для расшифровки выводятся как решение системы тригонометрических уравнений вида (1). Известно большое число выражений для расшифровки с различным числом фазовых сдвигов. Первые известные алгоритмы использовали формулы расшифровки с тремя или четырьмя сдвигами. С возрастанием вычислительной мощности современных компьютеров появилась возможность использовать алгоритмы с большим числом сдвигов. Так в работе [3] представлен алгоритм, использующий 15 фазовых сдвигов, а в работе [6] – 101 фазовый сдвиг. Нами предложен [10, 11] обобщенный алгоритм расшифровки, позволяющий устанавливать структуру известных алгоритмов и конструировать новые алгоритмы с неограниченным количеством фазовых сдвигов.

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\langle \vec{I}^\perp, \vec{S} \rangle}{\langle \vec{I}^\perp, \vec{C} \rangle}\right). \quad (2)$$

В этом выражении $\vec{C} = (\cos \delta_0, \dots, \cos \delta_{m-1})^T$, $\vec{S} = (\sin \delta_0, \dots, \sin \delta_{m-1})^T$, δ_i – фазовые сдвиги, размерность векторов определяется m – числом фазовых сдвигов, $\langle a, b \rangle$ – скалярное

* Статья получена 20 декабря 2012 г.

произведение, \vec{I}^\perp – вектор ортогональный вектору $\vec{I} = (I_0, \dots, I_{m-1})^T$, где $I_i(x, y)$ – набор измеренных интенсивностей с различными фазовыми сдвигами δ_i .

Существует ряд систематических ошибок, которые влияют на правильность определения разности фаз. Это ошибки при определении интенсивности и ошибки при установлении фазового сдвига. В [13, 14] показано, что основной вклад в погрешность измерения разности фаз вносят ошибки при установке фазового сдвига.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Цель данной работы – явное определение действительной величины вносимых фазовых сдвигов путем анализа интерференционных сигналов в двух произвольных точках интерферограммы.

Уравнение (1) можно представить в виде:

$$I_i(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos[\phi(x, y) + \delta_i], \quad (3)$$

где $A(x, y)$ – средняя яркость; $B(x, y)$ – амплитуда интерференционных полос.

Можно сделать допущение, что во всех точках (x, y) фазовые сдвиги δ_i одинаковы. Это предположение выполняется в большинстве случаев исходя из физических условий проведения эксперимента. Тогда мы можем получить добавочные уравнения, рассматривая решения не в одной, а в нескольких пространственных точках (x_k, y_k)

$$I_i(x_k, y_k) = A(x_k, y_k) + B(x_k, y_k) \cos[\phi(x_k, y_k) + \delta_i]. \quad (4)$$

Если взять две точки на интерферограмме с координатами $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ при пяти фазовых сдвигах, получим систему из десяти уравнений вида (4) с десятью неизвестными.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ АНАЛИТИЧЕСКИ

Изменим обозначения интенсивности в системе уравнений (4) $I_{1A} \dots I_{5A}$ как $x_1 \dots x_5$, интенсивности $I_{1B} \dots I_{5B}$ как $y_1 \dots y_5$, а уровни средней яркости $A(x_A, y_A)$ и $A(x_B, y_B)$ – x_0 и y_0 соответственно. С учетом принятых обозначений система уравнений (4) примет вид

$$x_i = x_0 + B_1 \cos(\phi_1 + \delta_i), \quad y_i = y_0 + B_2 \cos(\phi_2 + \delta_i), \quad (5)$$

где $i = 0, 1 \dots 4$, $\delta_0 = 0$.

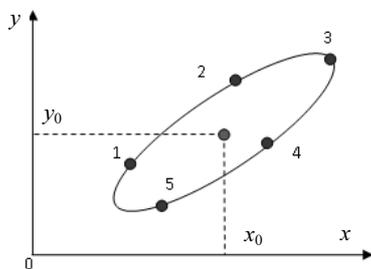


Рис. 1. Точки интенсивностей

В уравнении (5) (x, y) можно рассматривать как координаты точек (рис. 1).

Любая точка, соответствующая системе уравнений (5) принадлежит некоторому эллипсу. Получим уравнение эллипса, проходящего через 5 точек. Уравнение эллипса в общем виде имеет вид [15]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (6)$$

Вычислим коэффициенты уравнения (6)

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_1 A_2 + \alpha A_3 A_4, \quad a_{12} = \frac{1}{2} [A_1 B_2 + A_2 B_1 + \alpha (A_3 B_4 + A_4 B_3)], \\ a_{22} &= B_1 B_2 + \alpha B_3 B_4, \quad a_{13} = \frac{1}{2} [A_1 C_2 + A_2 C_1 + \alpha (A_3 C_4 + A_4 C_3)], \\ a_{23} &= \frac{1}{2} [B_1 C_2 + B_2 C_1 + \alpha (B_3 C_4 + B_4 C_3)], \quad a_{33} = C_1 C_2 + \alpha C_3 C_4, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= y_1 - y_2 & A_2 &= y_2 - y_3 & A_3 &= y_1 - y_3 & A_4 &= y_2 - y_4 \\ B_1 &= -(x_1 - x_2) & B_2 &= -(x_2 - x_3) & B_3 &= -(x_1 - x_3) & B_4 &= -(x_2 - x_4) \\ C_1 &= -x_2 A_1 - x_1 B_1 & C_2 &= -x_3 A_2 - x_2 B_2 & C_3 &= -x_3 A_3 - x_1 B_3 & C_4 &= -x_4 A_4 - x_2 B_4 \\ \alpha &= -(A_1 x_5 + B_1 y_5 + C_1)(A_2 x_5 + B_2 y_5 + C_2) / [(A_3 x_5 + B_3 y_5 + C_3)(A_4 x_5 + B_4 y_5 + C_4)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно сократить число неизвестных в системе уравнений (5), приведя центр эллипса в начало координат. Координаты центра эллипса x_0 и y_0 равны

$$x_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

После исключения переменных x_0 и y_0 , система уравнений (5) примет вид

$$\tilde{x}_i = B_1 \cos(\phi_1 + \delta_i), \quad \tilde{y}_i = B_2 \cos(\phi_2 + \delta_i), \quad (10)$$

где $i = 0, 2, \dots, m-1$, $\delta_0 = 0$, а $\tilde{x}_i = x_i - x_0$, $\tilde{y}_i = y_i - y_0$.

Теперь фазовые сдвиги можно определить по значениям \sin и \cos .

$$\cos(\delta_1) = \frac{s_{21}^2 - b_1^2 - 1}{2s_{21}b_1}, \quad \sin(\delta_1) = \sqrt{1 - \cos(\delta_1)^2} \cdot \text{sign}(\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_3 \tilde{y}_1), \quad (11a)$$

$$\cos(\delta_i) = \cos(\delta_1) s_{i1} - b_{i-1}, \quad \sin(\delta_i) = \sin(\delta_1) \cdot s_{i1}, \quad i = 2, \dots, 4. \quad (11b)$$

Здесь

$$s_{21} = \sin(\delta_2) / \sin(\delta_1) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_3 - \tilde{x}_3 \tilde{y}_1) / (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1), \quad (12a)$$

$$s_{31} = \sin(\delta_3) / \sin(\delta_1) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_4 - \tilde{x}_4 \tilde{y}_1) / (\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_1) \quad (12b)$$

$$s_{41} = \sin(\delta_4) / \sin(\delta_1) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_5 - \tilde{x}_4 \tilde{y}_1) / (\tilde{x}_1 \tilde{y}_3 - \tilde{x}_3 \tilde{y}_1) \quad (12c)$$

$$b_1 = s_{21} \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_3}{\tilde{x}_1}, \quad b_2 = s_{31} \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_4}{\tilde{x}_1}, \quad b_3 = s_{41} \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_5}{\tilde{x}_1} \quad (13)$$

Для исследования устойчивости алгоритма проводилось моделирование синусоидальных картин с заданным сдвигом (рис. 2, а). К значениям интенсивности добавлялся равномерный случайный шум. Одна точка фиксировалась, а вторая пробегала по всему полю интерферограммы. В каждой точке по формулам (11) рассчитывался фазовый сдвиг.

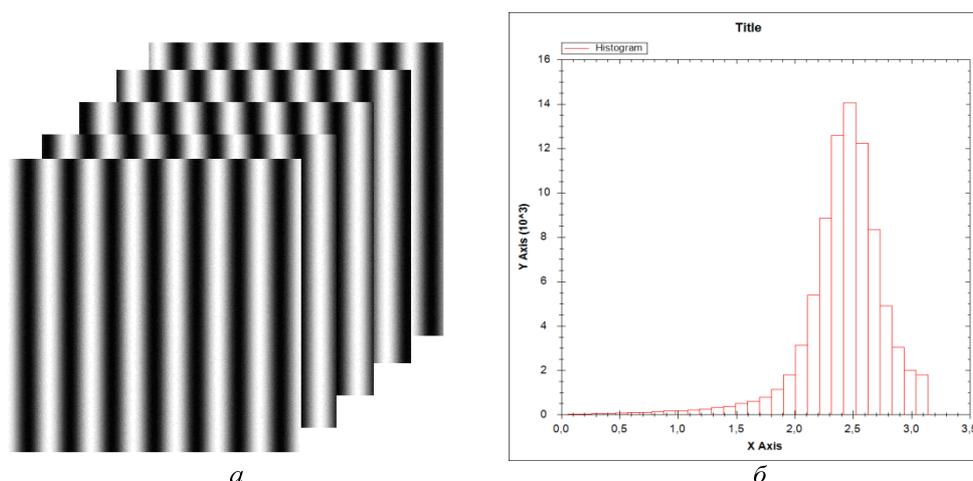


Рис. 2. Пять интерференционных картин с различными фазовыми сдвигами (а); гистограмма распределения вычисленных значений фазы (б)

Для устранения выбросов вычислялась гистограмма распределения вычисленных значений сдвига и проводилось усреднение по точкам, попадающим в пять максимальных значений гистограммы (рис. 2, б). Результаты измерений для фазового сдвига $\delta_1 = 2,51$ рад показаны в таблице.

Шум, %	Вычисленное значение	Относительная ошибка, %
2	2,49	0,81
5	2,54	1,11
10	2,55	1,5
15	2,47	1,7
20	2,37	5,56
25	2,25	10,5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый метод калибровки фазовых сдвигов. Использование этого метода позволяет уменьшить требования к точности установки вносимых фазовых сдвигов. Поскольку фазовый сдвиг вычисляется непосредственно по значениям интенсивностей, можно использовать системы с априорно неизвестными вносимыми фазовыми сдвигами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hariharan P. Digital phase-measurement system for real-time holographic interferometry / P. Hariharan, B.F. Oreb, N. Brown // Optics Communication. – Vol. 41. – № 6. – 1982. – P. 393–398.
- [2] Wyant J.C. Recent advances in interferometric optical testing / J.C. Wyant, K. Creath // Laser Focus. – 1985. – P. 118–132.
- [3] Wyant J.C. Interferometric optical metrology: basic system and principles / J.C. Wyant // Laser Focus. – 1982. – P. 65–67.
- [4] Creath K. Phase-shifting speckle interferometry / K. Creath // Applied Optics. – 1985. – Vol. 24. – P. 3053–3058.
- [5] Greivenkamp J.E. «Phase shifting interferometry» in Optical Shop Testing / J.E. Greivenkamp, J.H. Bruning. – New York: Wiley, 1992. – P. 501–598.
- [6] Groot P. de. Phase-shift calibration errors in interferometers with spherical Fizeau cavities / P. de Groot // Applied Optics. – 1994. – Vol. 34. – № 16. – P. 2856–2863.
- [7] Groot P. de. 101-frame algorithm for phase shifting interferometry / P. de Groot // EUROPTO, 1997. (Preprint 3098–33).
- [8] Millerd J. Modern Approaches in Phase Measuring Metrology / J. Millerd, N. Brock, J. Hayes, et al. // proc. SPIE. 5856. – 2004.
- [9] Gao P. Phase-Shift Extraction for Generalized Phase-Shifting Interferometry / P. Gao, B. Yao, N. Lindlein, et al. // Opt. Lett., 2009. – 34 (22). – P. 3553–3555.
- [10] Гужов В.И. Универсальный алгоритм расшифровки / В.И. Гужов, С.П. Ильиных, Д.С. Хайдуков, А.Р. Вагизов // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 4(41). – С. 51–58.
- [11] Гужов В.И. Устранение ошибок фазового сдвига в интерферометрии / В.И. Гужов, С.П. Ильиных, Д.С. Хайдуков, А.Р. Вагизов // Автометрия. – 2011. – Т. 47. – № 1. – С. 96–101.

- [12] **Guzhov V.I.** Eliminating phase-shift errors in interferometry / V.I. Guzhov, S.P. Il'yinykh, D.S. Khaidukov, A.R. Vagizov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2011. – Vol. 47. – № 1. – P. 76–80.
- [13] **Гужов В.И.** Анализ точности определения полной разности фаз в целочисленных интерферометрах / В.И. Гужов, Ю.Н. Солодкин // *Автометрия*. – 1992. – № 6. – С. 24–30.
- [14] **Schmit J.** Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry / J. Schmit, K. Creath // *Applied Optics*. – 1995. – Vol. 34. – № 19. – P. 3610–3619.
- [15] **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М., 1973. – 832 с.

Гужов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, декан АВТФ. Основное направление научных исследований: цифровые измерительные системы. Имеет более 140 публикаций, в том числе 2 монографии. E-mail: vig@edu.nstu.ru.

Ильиных Сергей Петрович, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. Основное направление научных исследований: алгоритмы цифровых измерительных систем. Имеет более 100 публикаций, в том числе 1 монографию. E-mail: isp51@yandex.ru.

Хайдуков Дмитрий Сергеевич, кафедры вычислительной техники. Основное направление научных исследований: алгоритмы цифровых измерительных систем. E-mail: isp51@yandex.ru.

Кузнецов Роман Александрович, кафедры вычислительной техники. Основное направление научных исследований: алгоритмы цифровых измерительных систем. E-mail: isp51@yandex.ru.

Guzhov V.I., Il'yinykh S.P., Haidukov D.S., Kuznetsov R.A.

A new method of calibration phase shifts

In the article the algorithm of determination of the phase shifts on a series of interference patterns obtained by the method of step-by-step phase-shift solution of the system of transcendental equations, obtained in two spatial points.

Key words: interferogram, phase shift, interpretation of interferograms, interferometer, step-by-step interferometry.