ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 80, № 4, 2020, с. 93–110

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 80, No. 4, 2020, pp. 93–110

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 681.52

DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-93-110

Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Основные положения, проблемы терминологии и инспекционный анализ метода дихотомии[*]

А.В. МАЙСТРЕНКО[a], К.А. МАЙСТРЕНКО[b], А.А. СВЕТЛАКОВ[c]

634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 40, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *gos1kk@mail.ru* [c] *svetlakov38@mail.ru*

При создании современных систем автоматического управления различными процессами и объектами, функционирующими в режиме реального времени, очень часто приходится сталкиваться с задачей решения различного рода нелинейных скалярных уравнений. В настоящее время существует целый ряд вычислительных методов и алгоритмов ее решения, одним из которых является метод дихотомии. Данный метод обладает целым рядом достоинств по сравнению с другими известными методами решения нелинейных уравнений, однако в настоящее время он не нашел широкого практического использования. Основной причиной его малой популярности является низкая скорость сходимости последовательности приближенных решений и большие объемы вычислений, необходимые для получения достаточно точных решений. Цель исследования: обстоятельно рассмотреть отличительные особенности метода дихотомии и показать предпочтительность его использования по сравнению с другими известными методами; предложить модифицированный вариант метода дихотомии, позволяющий получать более быстро сходящиеся последовательности приближенных решений нелинейных скалярных уравнений и требующий существенно меньших объемов вычислений, необходимых для получения решений с желаемой точностью; решением ряда конкретных нелинейных уравнений проиллюстрировать более высокую скорость сходимости последовательности приближенных решений, вычисляемых с применением модифицированного метода дихотомии, и тем самым обосновать преимущество нового метода для его использования при создании различных систем автоматического управления и регулирования. Предложена модификация метода деления отрезка пополам, обладающая всеми основными достоинствами модифицируемого метода. Результаты исследований могут быть использованы при разработке современных автоматических систем управления различными технологическими процессами и объектами.

Ключевые слова: дихотомия, отрезок, деление отрезка пополам, скорость сходимости, робастность, автоматическое управление, производная, концепция, автоматический регулятор

---

[*] *Статья получена 17 июля 2020 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из повсеместных и наиболее часто встречающихся в самых разнообразных отраслях научной, научно-технической, производственной и иной деятельности современного человека является задача решения различного рода нелинейных скалярных уравнений. С ней приходится сталкиваться всякий раз, когда мы имеем дело с той или иной скалярной нелинейной функцией $y = f(u)$ скалярного же аргумента u и нам необходимо по ее заданному значению y_0 определить такое значение u_0 ее аргумента u, при котором она принимает значение y_0.

Актуальность данной задачи в практически необозримом множестве реальных ситуаций и их многообразие обусловили предложение целого ряда вычислительных методов и алгоритмов ее решения, базирующихся на различных идеях и подходах к их синтезу [1–4]. Одним из подобных методов является метод дихотомии. Несмотря на то что данный метод обладает целым рядом достоинств, которые обусловливают его привлекательность и предпочтительность его применения по сравнению с другими известными методами решения нелинейных уравнений, в настоящее время он не нашел широкого практического использования. Как отмечается в [1, 6], основной причиной его малой популярности и неширокого практического использования является низкая скорость сходимости последовательности приближенных решений, вычисляемых с его применением, и большие объемы вычислений, необходимых для получения достаточно точных решений.

Цель настоящей работы заключается в следующем:

1) предельно обстоятельно рассмотреть отличительные особенности метода дихотомии и показать предпочтительность его использования по сравнению с другими известными методами решения нелинейных скалярных уравнений;

2) предложить модифицированный вариант метода дихотомии, позволяющий получать быстросходящиеся последовательности приближенных решений нелинейных скалярных уравнений и, соответственно, требующий существенно меньших по сравнению с исходным вариантом объемов вычислений, необходимых для получения решений с желаемой точностью;

3) проиллюстрировать более высокую скорость сходимости последовательности приближенных решений, вычисляемых с применением модифицированного метода дихотомии.

Первая из названных выше целей реализуется в первом разделе работы, а вторая и третья – во втором разделе.

1. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ЗАДАЧИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ КАНОНИЗАЦИЯ

Как уже отмечено во введении, задача решения нелинейных скалярных уравнений является одной из вычислительных задач, с которыми наиболее часто приходится сталкиваться в самых разнообразных отраслях научной, научно-технической и иной человеческой деятельности. Эта задача относится к классу обратных задач [7–9], содержательная сущность которых заключается в определении причины, обусловившей появление того или иного известного следствия.

Для более обстоятельного обсуждения ее сущности и особенностей примем следующее:

1) нам дана некоторая скалярная вещественная функция

$$y = f(u), \tag{1.1}$$

описывающая зависимость некоторой скалярной вещественной переменной величины *Y* от скалярной же и вещественной переменной величины *U*;

2) она определена на некотором ограниченном отрезке $I_u = [a_0, b_0]$ значений ее аргумента *u*, где a_0 и b_0 – конечные вещественные числа такие, что $a_0 < b_0$;

3) ее значения *y* принадлежат ограниченному отрезку $I_y = [c, d]$, где *c* и *d* – конечные вещественные числа и $c < d$;

4) она является непрерывной и строго монотонной функцией при любом возможном значении *u* переменной *U* или, что то же самое, в любой точке $u \in I_u$.

Как известно из математического анализа [3, 6], имея функцию (1.1), можно формулировать и решать следующие два класса вычислительных задач:

1) *класс прямых задач*, каждая из которых заключается в задании того или иного значения $u = u_0 \in I_u$ и в вычислении соответствующего ему значения $y = y_0 \in I_y$ функции (1.1) согласно равенству

$$y_0 = f(u_0), \tag{1.2}$$

2) *класс обратных задач*, любая из которых заключается в задании значения $y = y^* \in I_y$ и отыскании такого значения $u^* \in I_u$, при котором функция (1.1) принимает заданное значение y^* или, что то же самое, которое является корнем уравнения вида

$$f(u^*) = y^*. \tag{1.3}$$

Замечание 1. Поводом и основанием для употребления терминов «прямая задача» и «обратная задача» в данном случае является отношение «причина–следствие» между величинами *U* и *Y*. При этом, как вытекает из определения «функция» и «аргумент функции» [1, 3, 6], изменение величины *U* считается причиной всякого изменения величины *Y*. Отношение «причина–следствие» принято считать прямым, а отношение «следствие–причина» – обратным, что, как вытекает из определения понятий «причина» и «следствие», является вполне обоснованным.

Замечание 2. Важным подмножеством класса обратных задач является множество так называемых экстремальных задач, заключающихся в отыскании значений u^* переменной величины U, удовлетворяющих условию

$$u^* = \arg exstr\left\{y^* : y^* \in I_y\right\}. \tag{1.4}$$

Символ $\arg exstr\{...\}$ – означает, что речь идет об отыскании таких значений u^*, при которых функция (1.1) принимает крайние, т. е. минимальные или максимальные значения из всех ее возможных значений $y \in I_y$. Как известно из математического анализа [6], если функция $y = f(u)$ является хотя бы один раз дифференцируемой функцией [10], то задача отыскания таких значений переменной U сводится к решению уравнений вида

$$dy / du = 0 \tag{1.5}$$

и, таким образом, также является обратной задачей.

Нетрудно убедиться в том, что при любом значении $y^* \in I_y$ и при любой функции $y = f(u)$ уравнение (1.3) можно представить в так называемом каноническом, т. е. более компактном и традиционно рассматриваемом в вычислительной математике [1, 4] и численных методах [2–3, 7] виде

$$\varphi(u^*) = 0, \tag{1.6}$$

где функция $\varphi(u)$ определяется равенством

$$\varphi(u) = f(u) - y^*. \tag{1.7}$$

В самом деле, сравнив (1.3) и (1.6), можно видеть, что при любой функции $y = f(u)$ для получения уравнения (1.6) необходимо и достаточно выполнить следующие две очевидные и предельно простые операции:

1) вычесть из обеих частей уравнения (1.3) заданное значение y^*;

2) поменять левую и правую части полученного при этом уравнения местами.

Рассмотренное преобразование уравнения (1.3) в уравнение (1.6) возможно при любой функции $y = f(u)$ и при любом ограниченном значении y^* и при любом из них уравнения (1.3) и (1.6) оказываются вполне эквивалентными, т. е. имеют один и тот же корень $u = u^*$. Эквивалентность данных уравнений показана на рис. 1.1, где представлена геометрическая интерпретация функций $y = f(u)$ и $y = \varphi(u)$ и корня $u = u^*$ уравнений (1.3) и (1.6). Из рисунка видно, что точка $(u^*, 0)$ является ортогональной проекцией точки (u^*, y^*) на ось $0U$. Таковой же данная точка будет, очевидно, не только в случае, когда значение $y^* > 0$ (рис. 1.1), но и при любом другом ограниченном $y^* \in I_y$.

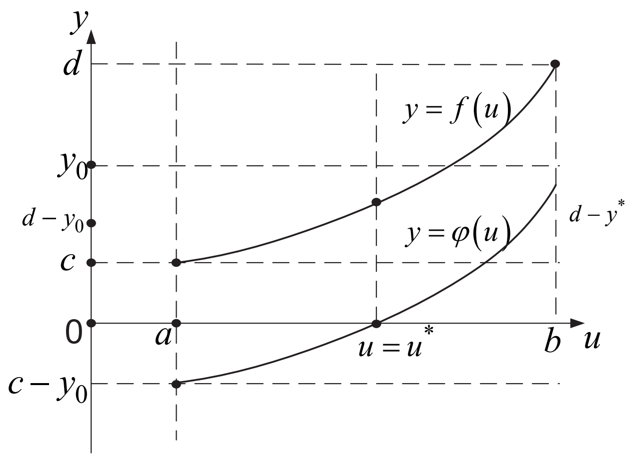

Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация функций $y = f(u)$ и $y = \varphi(u)$

Fig. 1.1. Geometric interpretation of functions $y = f(u)$ and $y = \varphi(u)$

Эквивалентность уравнений (1.3) и (1.6) обеспечивает возможность и является обоснованием рассматриваемой замены уравнения (1.3) уравнением (1.6), а большая компактность самого уравнения (1.6) и описания алгоритмов его решения обусловливают ее целесообразность и полезность. Всюду далее будем рассматривать и обсуждать только уравнения вида (1.6) и отметим, что множество подобных уравнений и их разнообразие являются практически необозримыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить семейства элементарных функций. Приведем два примера подобных семейств, наиболее часто встречающихся в различных приложениях [1, 3, 6].

Пример 1. Пусть функция (1.1) является целой рациональной функцией или алгебраическим полиномом n-го порядка и определяется следующим равенством:

$$y = P_n(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \dots p_{n-1} u^{n-1} + p_n u^n, \qquad (1.8)$$

где n – порядок (степень) полинома – любое конечное натуральное число, большее единицы; $p_0, p_1, \dots, p_n$ – коэффициенты полинома – любые ограниченные вещественные числа, не зависящие от значений u. Из (1.8) видно, что при любом заданном значении $y = y^* \in I_y$ задача определения значения u^*, при котором имеет место равенство

$$y^* = p_0 + p_1 u^* + p_2 (u^*)^2 + \dots + p_{n-1}(u^*)^{n-1} + p_n (u^*)^n,$$

сводится к решению алгебраического уравнения вида

$$p_n(u^*)^n + p_{n-1}(u^*)^{n-1} + \ldots + p_1 u^* + \left(p_0 - y^*\right) = 0\,. \qquad (1.9)$$

Как известно из линейной алгебры [2–4] и вычислительной математики [1, 5–6], из всего многообразия нелинейных уравнений, с которыми приходится сталкиваться при решении различных теоретических и прикладных задач, алгебраические уравнения являются давно и наиболее полно исследованными, и для их решения предложено значительное число различных методов и алгоритмов. Причиной их популярности является широкое использование алгебраических полиномов вида (1.8) при аналитическом представлении таблично и графически заданных функций, а также при аппроксимации данными полиномами различных сложноустроенных и малодоступных для аналитических исследований и вычислений вещественных функций вещественных скалярных аргументов.

Пример 2. Пусть функция (1.1) является тригонометрическим полиномом $T_n(u)$ $2n$-го порядка и, соответственно, определяется равенством

$$y = T_n(u) = p_0 + p_1 \sin u + p_2 \cos u + p_3 \sin 2u + p_4 \cos 2u + \ldots +$$

$$+ p_{2n-1} \sin nu + p_{2n} \cos nu, \qquad (1.9)$$

где n – любое конечное натуральное число, а p_i, $i = \overline{0,2n}$, – коэффициенты полинома, являющиеся ограниченными вещественными числами, не зависящими от значений u.

Как видно из данного равенства, при любом заданном значении $y = y^* \in I_y$ задача определения значения u^*, при котором выполняется равенство

$$y^* = T_n(u) = p_0 + p_1 \sin u^* + p_2 \cos u^* + p_3 \sin 2u^* + p_4 \cos 2u^* +$$

$$+ \ldots + p_{2n-1} \sin nu^* + p_{2n} \cos nu^*, \qquad (1.11)$$

сводится к решению тригонометрического уравнения вида

$$\left(p_0 - y^*\right) + p_1 \sin u + p_2 \cos u + p_3 \sin 2u + p_4 \cos 2u +$$

$$+ \ldots + p_{2n-1} \sin nu + p_{2n} \cos nu = 0. \qquad (1.12)$$

Тригонометрические полиномы вида (1.10) широко используются при аналитическом представлении таблично и графически заданных периодических функций, получаемых в результате экспериментальных исследований различных периодических процессов и явлений. В частности, они находят широкое применение во многих отраслях науки, техники и производства, где приходится иметь дело с колебательными процессами и явлениями. Использование данных полиномов обусловливает необходимость решения тригонометрических уравнений вида (1.12).

2. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДИХОТОМИИ

Методом дихотомии можно назвать не один-единственный метод решения нелинейных уравнений, а бесконечное множество методов подобного назначения. В самом деле, здесь речь идет лишь о делении, как будет видно чуть ниже, отрезка I_u на две части и при этом никак не оговаривается, на какие две части делится или должен делиться данный отрезок. Но совершенно ясно следующее:

1) разделить данный отрезок на две части можно сколь угодно многими способами, воспользовавшись при этом следующим очевидным тождеством

$$l_u = \upsilon l_u + (1-\upsilon) l_u, \qquad (2.1)$$

где l_u – длина отрезка I_u; υ – любое вещественное число, принадлежащее отрезку, $I_1 = [0,1]$ а слагаемые υl_u и $(1-\upsilon)l_u$ – длины первой и второй частей отрезка I_u;

2) каждому значению υ из I_1 соответствует единственное деление (рассечение) интервала на 2 части;

3) значению $\upsilon = 0$ соответствует разделение I_u на такие две части, длины которых удовлетворяют равенствам $\upsilon l = 0$ и $(1-\upsilon)l = l$;

4) значению $\upsilon = 1{,}0$ сопоставляется разбиение I_u на такие две части, длины которых определяются равенствами $\upsilon l = 1{,}0$ и $(1-\upsilon)l = 0$, и, таким образом, как и при $\upsilon = 0$, в данном случае никакого рассечения I_u нет;

5) зависимости длин первой и второй части от значений v предельно наглядно иллюстрируются графиками, представленными на рис. 2.1, где l_1 и l_2 – соответственно длины первой и второй части отрезка I_u, определяемые равенствами $l_1 = \upsilon l$ и $l_2 = (1-\upsilon)l.$. Из рисунка и равенства (2.1) непосредственно видно, что независимо от того, какова длина l отрезка I_u, при $\upsilon = 0{,}5$ длины l_1 и l_2 оказываются равными 0,5*l*.

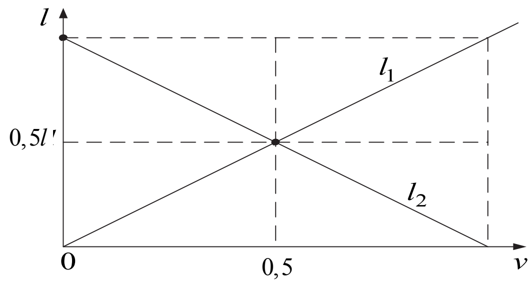

Рис. 2.1. Графики зависимостей l_1 и l_2 от υ

Fig. 2.1. Dependency graphs l_1 and l_2 of υ

Как показывает обзор работ [1–7], термин «метод дихотомии» используется как синоним терминов «метод деления отрезка пополам» [3, 6], «метод половинного деления отрезка» [1, 2, 5] или «метод бисекции» [4, 11], применяемых для названия одного и того же метода решения нелинейных уравнений, в котором отрезок I_u делится на две равные части. В основе метода деления отрезка пополам или половинного деления отрезка [6] лежит теорема об обращении функции в нуль. Данная теорема называется также теоремой Больцано–Коши. Формулируется она следующим образом [6].

Пусть функция $y = \varphi(u)$ определена и непрерывна в любой точке отрезка I_u и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между границами a_0 и b_0 отрезка I_u необходимо найдется точка $u = u^*$, в которой данная функция обращается в нуль и, соответственно, удовлетворяет равенству

$$\varphi(u^*) = 0. \tag{2.2}$$

Данная теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная кривая, являющаяся графиком непрерывной функции $y = \varphi(u)$, переходит с одной стороны оси $0U$ на другую, то она неизбежно пересекает эту ось (рис. 2.2) и ее использование позволяет предложить простейший и предельно универсальный численный метод, пригодный для решения любого нелинейного уравнения вида (1.6), который далее будем называть методом деления отрезка пополам. Данный метод относится к классу итерационных вычислительных методов.

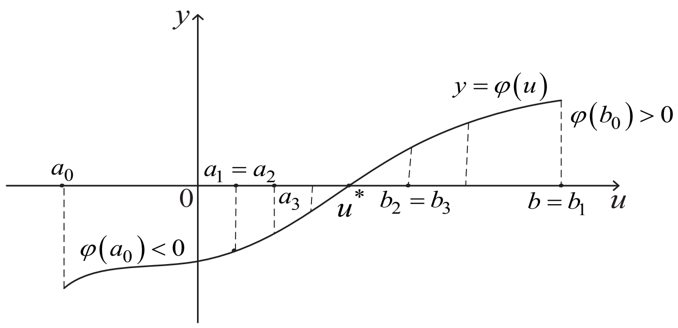

Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация метода деления отрезка пополам

Fig. 2.2. Geometric interpretation of the segment bisection method

При этом на каждой k-й, k = 1, 2, 3,…, из итераций его применения выполняются следующие три операции:

1) определение среднего значения $\bar{u}_k$ нижней a_{k-1} и верхней b_{k-1} границ отрезка $I_{u,k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$ в соответствии с равенством

$$\bar{u}_k = (a_{k-1} + b_{k-1}) / 2\,; \tag{2.3}$$

2) вычисление значения y_k функции $y = \varphi(u)$ в найденной точке $u = \bar{u}_k$ согласно равенству

$$y_k = \varphi(\bar{u}_k)\,; \tag{2.4}$$

3) изменение границ a_{k-1} и b_{k-1} отрезка $I_{u,k-1}$ в соответствии с правилами:

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, \text{ если } y_k > 0; \\ \bar{u}_k, \text{ если } y_k < 0; \end{cases} \tag{2.5}$$

$$b_k = \begin{cases} \bar{u}_k, \text{ если } y_k > 0; \\ b_{k-1}, \text{ если } y_k < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Равенства (2.3)–(2.6) полностью представляют состав и последовательность реализации вычислительных и логических операций, выполняемых на k-й итерации, $k = 1, 2, 3,\ldots$, в соответствии с рассматриваемым методом. В завершение его описания приведем четыре замечания, раскрывающих его содержательную и математическую сущность, а также возможности и условия его практического применения.

Замечание 1. Как видно из (2.3), отрезок $I_{u,k-1}$ на k-й итерации делится на две строго равные части. Данное обстоятельство является достаточным основанием назвать рассматриваемый метод методом половинного деления отрезка [1, 2, 5] или методом деления отрезка пополам [3, 6]. Очевидно, что каждое из этих названий отражает его содержательную сущность. Не менее очевидно и то, что каждое из них охватывается названием «метод дихотомии», в котором никак не оговаривается, на равные или неравные две части делится заданный отрезок, и, таким образом, подчеркивается лишь то, что данный отрезок делится именно на две части. Именно деление на две, но неравные части позволяет повысить скорость сходимости вычисляемых с его применением решений $\bar{u}_k$, $k = 1, 2, 3\ldots$.

Замечание 2**.** Математическая сущность метода деления отрезка пополам изложена выше применительно к случаю, когда функция $y = \varphi(u)$ является монотонно возрастающей функцией. Однако вполне очевидно, что с неменьшим успехом его можно использовать и в случае, когда данная функция является монотонно убывающей функцией. Для этого, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, необходимо и достаточно вместо правил (2.5) и (2.6) воспользоваться правилами вида

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, \text{ если } y_k < 0; \\ \bar{u}_k, \text{ если } y_k > 0; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$b_k = \begin{cases} \bar{u}_k, \text{ если } y_k < 0; \\ b_{k-1}, \text{ если } y_k > 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Данные условия позволяют непосредственно видеть, что и в этом случае имеющийся отрезок $I_{u,k-1}$ на k-й итерации делится на две равные части и соответственно на каждой из них сужается в два раза.

Замечание 3. При $k = 1$, т. е. при выполнении первой итерации его применения в качестве отрезка I_{u0}, здесь используется заданный нам отрезок I_u, и, как вытекает из (2.3), среднее значение $\overline{u}_1$ при этом оказывается не чем иным, как срединой отрезка I_u. Вполне очевидно, что длина l_0 отрезка I_{u0} при этом оказывается равной длине l отрезка I_u, определяемой равенством

$$l = (b_0 - a_0). \tag{2.9}$$

Не менее очевидно и то, что длина l_k отрезка I_{uk}, полученного на k-й итерации, вычисляется в соответствии с равенством

$$l_k = (b_k - a_k) = (b_{k-1} - a_{k-1})/2 = (b_0 - a_0)\big/2^k \tag{2.10}$$

и с увеличением k монотонно уменьшается и стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 1/2.

3. ИНСПЕКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ДИХОТОМИИ

Под инспекционным анализом в данном случае имеется в виду анализ метода дихотомии, выполняемый предельно обстоятельно и имеющий целью оценку его соответствия требованиям, предъявляемым к методам решения нелинейных уравнений вида (1.6), а также возможностей его совершенствования. Как это и делается при проведении подобного анализа любого другого объекта исследования, прежде всего отметим достоинства метода дихотомии, т. е. его особенности, обусловливающие предпочтительность его использования для решения уравнений (1.6) по сравнению с другими численными методами подобного назначения. Данные особенности можно обнаружить, если рассмотреть соотношения (2.3)–(2.8). При этом можно видеть, что наиболее характерными из них являются следующие 7 особенностей.

1. *Универсальность*, обеспечиваемая минимумом требований к функции $\varphi(u)$ в уравнении (1.6). Как следует из теоремы, лежащей в основе метода дихотомии (см. п. 3), для его успешного применения необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(u)$ была непрерывной и на концах отрезка I_u имела значения разных знаков. Данные условия являются необходимыми и достаточными условиями существования решения u^* уравнения (1.6), и, таким образом, если какое-либо из них не выполняется, то это означает, что в отрезке I_u не существует ни одного значения u, удовлетворяющего уравнению (1.6). С другой стороны, никаким другим условиям (например, условию дифференцируемости, как это необходимо для применения метода Ньютона, или любым другим условиям) функция $y = \varphi(u)$ удовлетворять не должна.

2. *Предельная идейная и алгоритмическая простота*. Из соотношений (2.3)–(2.8) видно, что основная идея данного метода заключается в делении имеющегося отрезка $I_{u,k-1}$ на две равные части и в выборе для дальнейшего использования той из его половин, которая содержит в себе искомое решение u^* и, таким образом, действительно является предельно простой. Столь же простым является и реализующий данную идею алгоритм, представленный соотношениями (2.3), (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8). При этом слож-

ность и объем вычислений, необходимых для получения приближенного решения $\bar{u}_k$, определяются сложностью «устройства» функции $y = \varphi(u)$. Как видно из соотношений (2.3)–(2.8), в результате выполнения k-й итерации, k = 1, 2, 3,…, мы получаем отрезок I_{uk}, заведомо содержащий искомое решение u^*, и это решение удовлетворяет следующим строгим равенствам:

$$a_k < u^* < b_k . \tag{3.1}$$

3. *Доступность для программной и аппаратной реализаций.* Возможности современных средств вычислительной техники и наличие различного рода уровней языков программирования, а также отмеченные выше идейная и алгоритмическая простота позволяют реализовать его как программно, так и аппаратно и делать это практически при любой функции $y = \varphi(u)$, фигурирующей в уравнении (1.6).

4. *Устойчивость к ошибкам вычислений.* Как видно из соотношений (2.3)–(2.8), замечательной особенностью метода дихотомии является то, что решение обратной задачи при его использовании сводится к решению последовательности прямых задач, что избавляет от необходимости решать плохо обусловленные уравнения, как это имеет место при использовании других методов решения нелинейных уравнений, обеспечивает его предельно высокую устойчивость по отношению к ошибкам вычислений и является его несомненным достоинством.

5. *Возможность интервального оценивания решения u^**. Достоинством данного метода является то, что он позволяет вычислять нижнюю (левую) и верхнюю (правую) оценки искомого решения u^* и делать это не только по окончании процесса его вычисления, но и на каждой из итераций, начиная с первой из них. Как видно из (2.5)–(2.8), данными оценками являются границы a_k и b_k, вычисляемые согласно равенствам (2.5), (2.7) и (2.6), (2.8). При этом последовательность значений первой из них является монотонно возрастающей, а второй – монотонно убывающей числовыми последовательностями, и последовательность интервалов I_{uk}, содержащих решение u^*, оказывается монотонно сжимающейся и удовлетворяющей соотношениям

$$I_{u0} \supset I_{u1} \supset I_{u2} \supset \ldots \supset I_{u,k-1} \supset I_{uk} . \tag{3.2}$$

6. *Возможность прогнозирования числа итераций*, необходимого для получения приближенного решения u_k, абсолютная погрешность $\Delta u_k = \left| u_k - u^* \right|$ которого не превышает заданное значение δ. Действительно, как вытекает из соотношений (2.3)–(2.8), в результате выполнения n итераций интервал $I_{u0} = | b_0 - a_0 |$, содержащий решение u^*, уменьшится в 2^n раз и соответственно окажется равным $| b_0 - a_0 | / 2^n$. В частности, при $n = 5$ он уменьшится в $2^5 = 32$ раза, а при $n = 10$ – в $2^{10} = 1024$, т. е. более чем в ты-

сячу раз. Отсюда вытекает, что для получения отрезка I_{un}, удовлетворяющего неравенству $I_{un} \le \delta$, необходимо и достаточно решить неравенство

$$I_{u0} / 2^n \le \delta \qquad (3.3)$$

относительно интересующего нас значения n. Умножив обе его части на 2^n и разделив их на δ, получим неравенство вида

$$2^n \ge I_{u0} / \delta, \qquad (3.4)$$

которое, очевидно, эквивалентно исходному неравенству (3.3). Логарифмируя обе его части и используя при этом десятичные логарифмы, получаем, что интересующее нас число n удовлетворяет неравенству

$$n \ge \left(\lg I_{u0} - \lg \delta\right) / \lg 2 = 3{,}3222\left(\lg I_{u0} - \lg \delta\right). \qquad (3.5)$$

Если положить $I_{u0} = 10{,}0$, а $\delta = 0{,}001$, то, воспользовавшись данным неравенством, нетрудно убедиться в том, что число итераций n в этом случае должно удовлетворять неравенству $n \ge 13{,}33$.

7. *Простота регуляризации.* Как известно [10–15], регуляризация какого-либо вычислительного метода или алгоритма – это изменение его таким образом, чтобы он оказался менее чувствительным к ошибкам задания исходных данных решаемой с его применением задачи и к ошибкам вычислений. В нашем случае исходными данными решаемой задачи являются вычисляемые значения функции $y = \varphi(u)$ и значения ее аргумента u, а ошибками задания исходных данных оказываются, соответственно, ошибки вычисления значений функции $y = \varphi(u)$ и ее аргумента u. Отсюда, учитывая приведенное выше определение понятия «регуляризация», нетрудно видеть, что регуляризацию метода дихотомии можно осуществить следующими двумя способами.

1. Процесс вычисления решения u^* уравнения (1.6) продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено, например, условие вида

$$| b_k - a_k | \le \Delta_u, \qquad (3.6)$$

где Δ_u – некоторое достаточно малое, наперед заданное нами положительное число. Необходимость и целесообразность введения данного ограничения обусловливается тем, что с увеличением числа итераций длина отрезков I_{uk} уменьшается, а их границы a_k и b_k оказываются всё более близкими числами. Как известно из вычислительной математики [1, 4] и численных методов [2, 3, 5], при вычислении разности двух близких чисел неизбежно появляется погрешность ее вычисления, и эта погрешность оказывается тем больше, чем ближе границы a_k и b_k. Отсюда вытекает, что введение ограничения (3.6) позволяет ограничить погрешность вычисления длины отрезка I_{uk}, а соответственно и погрешность вычисления решения u_k, принадлежащего данному отрезку, и, таким образом, регуляризировать рассматриваемый метод (рис. 3.1). Вполне очевидно, что точность решения u_k, вычисляемого с применением регуляризированного метода, а также число итераций, необходимых для его вычисления, будут существенно зависеть от Δ_u.

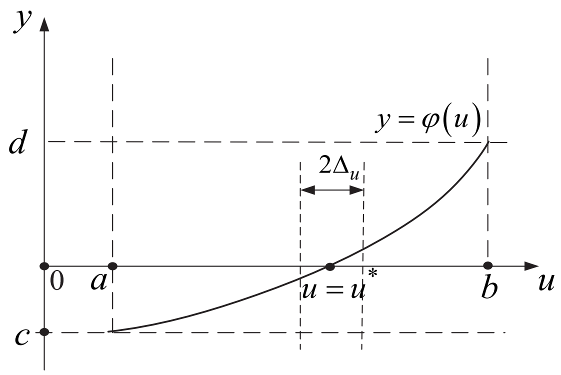

Рис. 3.1. Регуляризация метода с использованием ограничений снизу на длину отрезка I_{uk}

Fig.3.1. Regularization of the method using lower constraints on the length of the segment I_{uk}

2. Процесс вычисления решения u^* уравнения (1.6) продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено следующее неравенство:

$$|\varphi(u_k)| \le \Delta_\varphi, \tag{3.7}$$

где Δ_φ – некоторое, наперед заданное достаточно малое положительное число. Необходимость и целесообразность введения данного условия обусловливаются, во-первых, тем, что значения функции $\varphi(u)$ при любом значении ее аргумента u вычисляются с некоторой абсолютной погрешностью $\Delta y = \Delta y(u)$, зависящей от значений аргумента u. Во-вторых, в окрестности истинного решения u^* значения функции $\varphi(u)$ неизбежно оказываются малыми по абсолютной величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления. Но это означает, что при приближении решения u_k к истинному решению u^* оно неизбежно попадет в полосу ошибок (рис. 3.2) и его дальнейшее уточнение окажется невозможным, а продолжение процесса вычисления решений u_k – бессмысленным. Таким образом, вводя в алгоритм условие (3.7), мы исключаем возможность попадания решений u_k в полосу неустранимых ошибок и осуществляем регуляризацию обсуждаемого метода. Как и в предшествующем случае, точность решения u_k, вычисляемого с использованием регуляризированного метода, и число итераций, необходимых для его вычисления, будут существенно зависеть от Δ_φ.

Каждая из отмеченных выше семи особенностей является очевидным достоинством метода дихотомии и представляет значительный интерес с точки зрения его практического использования. В этой связи возникает вопрос: почему при наличии столь многих и несомненно полезных достоинств метод дихотомии не нашел широкого практического применения и оказался маловостребованным?

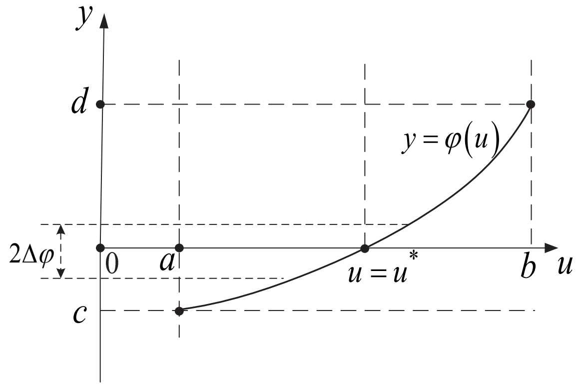

Рис. 3.2. Регуляризация метода с использованием ограничений снизу на длину отрезка Δ_φ

Fig. 3.2. Regularization of the method using lower constraints on the length of the segment Δ_φ

Причин тому три, и первой из них является низкая скорость сходимости решений u_k, вычисляемых с его использованием, к истинному решению u^* уравнения (1.6) и значительные объемы вычислений, затрачиваемые на получение достаточно точного решения. Вторая причина непопулярности заключается в том, что наряду с данным методом в XVIII–XIX веках был предложен еще целый ряд других численных методов решения нелинейных уравнений, применение которых позволяет вычислять последовательности решений u_k уравнения (1.6), сходящиеся к его истинному решению u^* с существенно более высокой скоростью, и получать достаточно точное его решение с меньшими затратами вычислений и времени. И, наконец, третьей причиной невостребованности метода дихотомии является то, что первейшей заботой всякого решателя нелинейных уравнений было сокращение объемов вычислений и их экономия. Поэтому выбор того или иного метода решения нелинейного уравнения был практически предопределен и осуществлялся не в пользу метода дихотомии.

Наиболее часто при этом предпочтение отдавалось методу Ньютона или методу касательных. Причиной его большой популярности и востребованности является высокая скорость сходимости вычисляемых с его применением приближенных решений u_k уравнения (1.6) к его истинному решению u^*. Как известно [1, 6], решения u_k удовлетворяют следующему неравенству:

$$\left|u_k-u^*\right| \le M\left|u_{k-1}-u^*\right|^2 \Big/ 2m\,. \tag{3.8}$$

Здесь M и m – постоянные величины, определяемые равенствами вида

$$a)\ M=\arg\max\left\{\left|\frac{d^2\varphi}{du^2}\right|\right\} \quad \text{и} \quad б)\ m=\arg\min\left\{\left|\frac{d\varphi}{du}\right|\right\}, \tag{3.9}$$

где argmax{…} – аргумент максимума, а argmin{…} – аргумент минимума – значения аргумента u, при которых модули второй и первой производных функции $\varphi(u)$ принимают максимальное и минимальное значения. Из (3.8) видно, что в его правой части стоит квадрат модуля $\left|u_{k-1}-u^*\right|$, и, следовательно, если $\left|u_{k-1}-u^*\right|<1$, то k-е приближенное решение u_k оказывается на два порядка ближе к истинному решению u^* уравнения (1.6), чем решение u_{k-1}. Именно эта особенность метода Ньютона и делает его одним из самых эффективных численных методов решения нелинейных уравнений и позволяет говорить о том, что последовательность приближенных решений u_k, вычисляемых с его помощью, имеет квадратичную скорость сходимости. Так, если при некотором $k \geq 1$ имеет место неравенство $\left|u_{k-1}-u^*\right| \leq 0{,}01$, то $\left|u_k-u^*\right| \leq 0{,}0001$, и, таким образом, если начальное приближенное решение u_0 уравнения (1.6) выбрано достаточно близким к его истинному решению u^*, то для уточнения u_0 потребуется всего лишь одна-две итерации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выявленные выше 7 особенностей метода деления отрезка пополам предельно наглядно иллюстрируют привлекательность его применения в автоматических и автоматизированных системах различного назначения (управления, наблюдений и т. п.), функционирующих в режиме *real time*. Они же позволяют вполне однозначно заключить следующее:

1) из всех известных в настоящее время методов решения нелинейных уравнений применение данного метода обеспечивает наиболее широкие возможности для создания робастных автоматизированных систем самого разнообразного назначения;

2) круг данных возможностей можно еще более расширить, если какимлибо приемлемым с точки зрения реализации в режиме *real time* способом увеличить скорость сходимости решений нелинейных уравнений, вычисляемых с его применением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Физматгиз, 1963. – 660 с.
2. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках бейсик, фортран и паскаль. – Томск: Раско, 1991. – 270 с.
3. *Хемминг Р.В.* Численные методы: для научных работников и инженеров. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
5. *Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П.* Численные методы: учебник для техникумов. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 608 с.

7. Синтез метода автоматического регулирования процессов, основанного на концепции обратных задач динамики / А.Е. Карелин, А.В. Майстренко, А.А. Светлаков, С.А. Харитонов // Омский научный вестник. – 2017. – № 4 (154). – С. 83–87.

8. *Майстренко А.В.* Экспериментальные исследования метода автоматического регулирования процессов, основанного на концепции обратных задач динамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 27. – С. 176–194.

9. *Майстренко А.В., Светлаков А.А.* Косвенное измерение расхода жидкости, перекачиваемой насосными агрегатами // Доклады ТУСУР. – 2014. – № 4 (34). – С. 215–220.

10. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование измеряемых сигналов с применением интегральных уравнений В. Вольтерра и его регуляризация // Омский научный вестник. – 2013. – № 2 (120). – С. 308–313.

11. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений: пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 264 с.

12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – Изд. 2-е. – М.: Наука, 1979. – 286 с.

13. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов на основе скользящей квадратичной аппроксимации и его применение в синтезе ПИД-регуляторов // Омский научный вестник. – 2016. – № 1 (145). – С. 73–77.

14. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов с применением многоточечных методов в системах автоматического регулирования процессов // Доклады ТУСУР. – 2009. – № 2 (20). – С. 86–89.

15. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

Майстренко Андрей Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 50 печатных работ и учебных пособий. E-mail: maestro67@mail.ru.

Майстренко Константин Андреевич, бакалавр технических наук, студент кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. E-mail: gos1kk@mail.ru.

Светлаков Анатолий Антонович, доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 200 печатных работ и учебных пособий. E-mail: svetlakov38@mail.ru.

Maistrenko Andrey V., PhD (Eng.), associate professor at the Department of Computer Systems in Management and Design in Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 50 publications and teaching manuals. E-mail: maestro67@mail.ru.

Maistrenko Konstantin A., Bachelor of Engineering, master student at the Department of Computer Systems in Management and Design in Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. E-mail: gos1kk@mail.ru.

Svetlakov Anatoliy A., D.Sc. (Eng.), professor, Department of Computer Systems in Management and Design in Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 200 publications and teaching manuals. E-mail: svetlakov38@mail.ru.

DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-93-110

*Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy! Basic provisions, problems of terminology and inspection analysis of the method of dichotomy**

A.V. MAISTRENKO[a], *K.A. MAISTRENKO*[b], *A.A. SVETLAKOV*[c]

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russian Federation

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *gos1kk@mail.ru* [c] *svetlakov38@mail.ru*

Abstract

When creating modern systems of automatic control of various processes and objects operating in real time, very often one has to face the problem of solving various kinds of nonlinear scalar equations. Currently, there are a number of computational methods and algorithms for its solution, one of which is the dichotomy method. This method has a number of advantages in comparison with other known methods for solving nonlinear equations, but at present it has not found wide practical use. The main reason for its low popularity is the low rate of convergence of the sequence of approximate solutions and a large amount of computation required to obtain sufficiently accurate solutions. The purpose of the study is to consider in detail distinctive features of the dichotomy method and show the preference of its use in comparison with other known methods. We propose a modified version of the dichotomy method that allows one to obtain more rapidly converging sequences of approximate solutions to nonlinear scalar equations and requires significantly fewer computations required to obtain solutions with the desired accuracy. By solving a number of specific nonlinear equations, it is possible to illustrate the higher convergence rate of the sequence of approximate solutions calculated using the modified dichotomy method and, thereby, to substantiate the advantage of the new method for its use in creating various automatic control and regulation systems. Based on the results obtained a modification of the method for segment bisection is proposed. It has all the main advantages of the modified method. The research results can be used in the development of modern automatic control systems for various technological processes and objects.

Keywords: dichotomy, segment, bisection of a segment, convergence rate, robustness, automatic control, derivative, concept, automatic controller

REFERENCES

1. Demidovich B.P., Maron I.A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Fundamentals of computational mathematics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 660 p.

2. Mudrov A.E. *Chislennye metody dlya PEVM na yazykakh Beisik, Fortran i Paskal'* [Numerical methods for PCs in BASIC, Fortran and Pascal]. Tomsk, Rasko Publ., 1991. 270 p.

3. Hamming R.W. *Numerical methods for scientists and engineers*. New York, McGraw-Hill, 1962 (Russ. ed.: Khemming R.V. *Chislennye metody: dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1972. 400 p.).

4. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977 (Russ. ed.: Forsait Dzh., Mal'kol'm M., Mouler K. Moscow, Mir Publ., 1980. 280 p.).

5. Danilina N.I., Dubrovskaya N.S., Kvasha O.P. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1976. 368 p.

6. Fichtenholz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. T. 1 [The course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 608 p.

7. Karelin A.E., Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Kharitonov S.A. Sintez metoda avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov, osnovannogo na kontseptsii obratnykh zadach dinamiki [Synthesis

* *Received 17 July 2020.*

of the method of automatic control of processes based on the concept of inverse problems of dynamics]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2017, no. 4 (154), pp. 83–87.

8. Maistrenko A.V. Eksperimental'nye issledovaniya metoda avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov, osnovannogo na kontseptsii obratnykh zadach dinamiki [Experimental researches of the method of automatic regulation of processes based on the concept of reverse dynamics problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniya = Perm National Research Bulletin. Electrotechnics, Informational Technologies, Control Systems*, 2018, no. 27, pp. 176–194.

9. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A. Kosvennoe izmerenie raskhoda zhidkosti perekachivaemoi nasosnymi agregatami [The indirect measurement of oil flow rate, delivered with a pump unit]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of TUSUR University*, 2014, no. 4 (34), pp. 215–220.

10. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie izmeryaemykh signalov s primeneniem integral'nykh uravnenii V. Vol'terra i ego regulyarizatsiya [Digital differentiation of measured signals using V. Volterra integral equations and its regularization]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2013, no. 2 (120), pp. 308–313.

11. Traub J.F. *Iterative methods for the solution of equations*. New York, Chelsea, 1982 (Russ. ed.: Traub Dzh. *Iteratsionnye metody resheniya uravnenii*. Moscow, Mir Publ., 1985. 264 p.).

12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect problems]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1979. 286 p.

13. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov na osnove skol'zyashchei kvadratichnoi approksimatsii i ego primenenie v sinteze PID-regulyatorov [Digital signal differentiation based on sliding quadratic approximation and its application in the synthesis of PID controllers]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2016, no. 1 (145), pp. 73–77.

14. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov s primeneniem mnogotochechnykh metodov v sistemakh avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov [Digital signal differentiation using multipoint methods in automatic process control systems]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of TUSUR University*, 2009, no. 2 (20), pp. 86–89.

15. Rabiner L., Gold B. *Theory and application of digital signal processing*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1975 (Russ. ed.: Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primenenie tsifrovoi obrabotki signalov*, Moscow, Mir Publ., 1978. 848 p.).

Для цитирования:

Майстренко А.В., Майстренко К.А., Светлаков А.А. Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Основные положения, проблемы терминологии и инспекционный анализ метода дихотомии // Научный вестник НГТУ. – 2020. – № 4 (80). – С. 93–110. – DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-93-110.

For citation:

Maistrenko A.V., Maistrenko K.A., Svetlakov A.A. Dikhotomiya. Dikhotomiya? Dikhotomiya!: osnovnye polozheniya, problemy terminologii i inspektsionnyi analiz metoda dikhotomii [Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy! Basic provisions, problems of terminology and inspection analysis of the method of dichotomy]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 4 (80), pp. 93–110. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-93-110.