ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 81, № 1, 2021, с. 85–102

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 81, No. 1, 2021, pp. 85–102

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 681.52 DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-85-102

Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Модифицированный метод дихотомии решения нелинейных скалярных уравнений и некоторые результаты его исследований*

А.В. МАЙСТРЕНКО[a], К.А. МАЙСТРЕНКО[b], А.А. СВЕТЛАКОВ[c]

634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 40, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *gos1kk@mail.ru* [c] *svetlakov38@mail.ru*

Продолжение статьи Майстренко А.В., Майстренко К.А., Светлакова А.А. «Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Основные положения, проблемы терминологии и инспекционный анализ метода дихотомии», опубликованной в Научном вестнике НГТУ № 4 (80), в которой был предложен модифицированный вариант метода дихотомии, обладающий всеми основными достоинствами модифицируемого метода. Данный метод обладает рядом достоинств по сравнению с другими методами решения нелинейных уравнений, однако в настоящее время он не нашел широкого практического использования. Основной причиной его малой популярности является низкая скорость сходимости последовательности приближенных решений и большие объемы вычислений, необходимые для получения достаточно точных решений. Цель исследования: предложить модифицированный вариант метода дихотомии, позволяющий получать более быстросходящиеся последовательности приближенных решений нелинейных скалярных уравнений и требующий существенно меньших объемов вычислений, необходимых для получения решений с желаемой точностью посредством решения ряда конкретных нелинейных уравнений проиллюстрировать более высокую скорость сходимости последовательности приближенных решений, вычисляемых с применением модифицированного метода дихотомии, и тем самым обосновать преимущество нового метода для его использования при создании различных систем автоматического управления и регулирования. Предложена модификация метода деления отрезка пополам, обладающая всеми основными достоинствами модифицируемого метода. Приведены результаты решения четырех нелинейных уравнений, иллюстрирующие более высокую скорость сходимости решений, вычисляемых с применением предложенной модификации. Результаты исследований могут быть использованы при разработке современных автоматических систем управления различными технологическими процессами и объектами.

Ключевые слова: дихотомия, робастность, модификация, выпуклая комбинация точек, веса значений функции, регуляризация, автоматическое управление, производная

* *Статья получена 26 ноября 2020 г.*

1. АНАЛИЗ ПОТРЕБНОСТЕЙ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИХОТОМИИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Имеющееся в настоящее время обилие средств вычислительной техники и их высокое быстродействие коренным образом изменили критерии и подходы к оценке эффективности численных методов решения нелинейных уравнений и их пригодности для использования в тех или иных конкретных условиях. В частности, быстродействие данных методов и скорость сходимости вычисляемых с их применением решений u_k уравнения (1.6) [1] к его точному решению u^* оказываются практически уже не столь существенными, значимыми и определяющими, как это было ранее, и наоборот: актуальной оказывается задача повышения робастности метода или, что то же самое, увеличения устойчивости метода к ошибкам задания исходных данных и ошибкам счета, неизбежно возникающим при проведении любых расчетов с применением любого цифрового вычислительного устройства. Особенно актуальной потребность в робастных методах и алгоритмах решения нелинейных уравнений оказывается в разработках различного рода автоматических и автоматизированных систем управления процессами, контроля данных процессов и их диагностики, функционирующих в реальном масштабе времени [2–11]. Ее чрезвычайная актуальность в подобных ситуациях обусловливается неизбежным наличием ошибок задания (зашумленностью) исходных данных решаемых уравнений, а также предельно высокими и жесткими требованиями к точности вычисляемых решений и недопустимо большими потерями, которые могут возникнуть в результате использования недостаточно точных решений данных уравнений.

Остановимся теперь на возможностях модифицирования метода деления отрезка пополам с целью получения такой его модификации, т. е. результата его модифицирования, которая бы обладала всеми отмеченными в [1] семью достоинствами модифицируемого метода дихотомии и в то же время имела более высокую по сравнению с ним скорость сходимости.

Такие возможности нетрудно обнаружить, если воспользоваться хорошо известным в выпуклом анализе понятием выпуклой комбинации точек заданного отрезка прямой и применить его к точкам отрезка I_{uk}, полученного на k-й итерации применения метода дихотомии и соответственно описываемого соотношением вида

$$I_{uk} = [a_k,\ b_k]\,. \tag{1.1}$$

Здесь, как и всюду выше, a_k и b_k – нижняя и верхняя границы отрезка I_{uk}, который, очевидно, содержит в себе истинное решение u^* уравнения (1.6) [1] и соответственно, как вытекает из определения выпуклой комбинации двух точек любого отрезка, его можно рассматривать как некоторую выпуклую комбинацию границ a_k и b_k и в соответствии с определением данной комбинации представить его равенством вида

$$u^* = v_{k1}a_k + v_{k2}b_k\,, \tag{1.2}$$

в котором коэффициенты v_{k1} и v_{k2} удовлетворяют следующим двум условиям:

$$а)\ v_{ki} \geq 0,\ i = \overline{1,2} \qquad \text{и} \qquad б)\ v_{k1} + v_{k2} = 1{,}0, \tag{1.3}$$

т. е. являются неотрицательными числами, причем такими, что их сумма равна единице.

Замечание. Как известно, в теории вероятностей и в математической статистике, а также в теории фильтрации сигналов и оценивания неизвестных величин и в других областях науки и техники такие коэффициенты принято называть весами стоящих за ними величин. Поводом для употребления данного термина является то, что они позволяют «взвесить», т. е. количественно оценить значимость и полезность стоящих за ними множителей (в нашем случае границ a_k и b_k отрезка I_{uk}), придавая при этом большие веса тем из данных множителей, значимость и полезность которых для решения задачи оказываются наиболее существенными.

Воспользовавшись условием (1.3б), равенство (1.2) можно заменить следующим эквивалентным ему равенством:

$$u^* = v_k a_k + (1 - v_k) b_k\,. \tag{1.4}$$

Здесь v_k и $(1 - v_k)$ – коэффициенты данной комбинации. При этом коэффициент v_k удовлетворяет следующим строгим неравенствам:

$$0 < v_k < 1\,. \tag{1.5}$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что этим же неравенствам удовлетворяет и коэффициент $(1 - v_k)$, а сумма данных коэффициентов равна 1,0.

Отмеченные факты позволяют заключить, что наряду с оценками a_k и b_k решения u^* применение метода дихотомии позволяет получать еще сколь угодно много других точечных оценок данного решения, сходящихся к его истинному значению u^* при $k \to \infty$, и для получения любой из таких оценок необходимо и достаточно задавать какие-либо численные значения коэффициента v_k, k = 1, 2, 3,… В частности, полагая при каждом k коэффициент $v_k = 0.5$, мы получим последовательность оценок $\bar{u}_k$ решения u^*, вычисляемых в соответствии с равенствами (2.3) [1], которая, очевидно, при $k \to \infty$ будет сходиться к решению u^* уравнения (1.6) [1].

Вполне очевидно, что при использовании любого другого из способов выбора коэффициента v_k в (1.2), удовлетворяющего неравенствам (1.5), мы получим некоторую последовательность оценок u_k, которая при $k \to \infty$ будет также сходиться к решению u^*. Замечательным и весьма важным с точки зрения практических приложений обстоятельством в данном случае является то, что при использовании любого способа выбора значений коэффициента v_k в (1.2) оказывается возможным оценивать абсолютную погрешность Δ_{uk} решения u^* с применением u_k и делать это на каждой k-й итерации, $k = 1, 2, 3,\ldots$ Как видно из (1.2) и (1.3), эта погрешность удовлетворяет неравенству

$$\Delta_{uk} \le | b_k - a_k |, \quad k = 1,\ 2,\ 3\ldots. \tag{1.6}$$

Совершенно ясно, что такая оценка погрешности является чрезмерно осторожной и пессимистичной. В самом деле, как вытекает из соотношений (1.4) и (1.5), при любом значении v_k, удовлетворяющем неравенствам (1.3а), приближенное решение u_k будет лежать внутри отрезка I_{uk}, и, таким образом, погрешность Δ_{uk} будет строго меньше $| b_k - a_k |$.

2. ИДЕЙНЫЕ ОСНОВЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Для упрощения и сокращения последующего изложения вместо развернутого названия «метод деления отрезка пополам» всюду далее будем использовать его аббревиатуру МДОП и прежде всего отметим, что, как видно из соотношений (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8) [1], при вычислении границ a_k и b_k отрезка I_{uk} в соответствии с данным методом фактически используется только знак значения y_k, а его модуль $| y_k |$ при этом никак не учитывается и не используется. Вместе с тем, учитывая монотонность функции $y = \varphi(u)$ на отрезке I_u и цель решения уравнения (1.6) [1] – найти такое значение аргумента u, при котором оно выполняется, очевидно, что при решении данного уравнения могут быть полезными не только знак функции $y = \varphi(u)$ в той или иной точке отрезка I_u, но и ее численное значение в данной точке. Действительно, поскольку функция $y = \varphi(u)$ является монотонной, то ее значение позволяет судить о близости или удаленности приближенного решения u_k от истинного решения u^* уравнения (1.6) [1] в соответствии с правилом: чем ближе модуль $| y_k |$ к нулю, тем ближе решение u_k к u^*, и наоборот: чем больше значение модуля $| y_k |$, тем дальше решение u_k от корня u^*.

Отмеченная связь между модулями $| y |$ и $| u - u^* |$ открывает возможность и стимулирует желание попытаться модифицировать МДОП таким образом, чтобы увеличить его скорость сходимости, не усложняя при этом заметным образом его вычислительную схему и не увеличивая трудоемкость его реализации. В этом состоит **первая идея**, положенная в основу излагаемого ниже модифицированного метода деления отрезка пополам. Как и в случае МДОП и по тем же самым причинам всюду далее будем использовать аббревиатуру приведенного названия и будем называть данный метод ММДОП – модифицированный метод деления отрезка пополам.

Вторая идея, лежащая в основе ММДОП, заключается в использовании при выборе k-го приближенного решения u_k уравнения (1.6) [1] весов v_a и v_b значений $y_a = \varphi(a_{k-1})$ и $y_b = \varphi(b_{k-1})$, назначаемых или вычисляемых наиболее простыми способами.

Рассмотрим теперь вычислительную схему предлагаемого ММДОП более детально и сделаем это применительно к k-й итерации его применения, т. е. будем далее считать, что

1) мы уже выполнили $k-1$ итераций и получили интервал $I_{u,k-1} = = [a_{k-1},\ b_{k-1}]$;

2) при этом значения $y = \varphi(a_{k-1})$ и $y = \varphi(b_{k-1})$, как и при рассмотрении МДОП (см. рис. 2.2), удовлетворяют следующим неравенствам:

$$а)\ \varphi(a_{k-1}) < 0 \quad \text{и} \quad б)\ \varphi(b_{k-1}) > 0\,. \tag{2.1}$$

Для вычисления k-го приближенного решения u_k воспользуемся следующим равенством:

$$u_k = v_{a,k-1}\varphi(a_{k-1}) + v_{b,k-1}\varphi(b_{k-1})\,, \tag{2.2}$$

где $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ – веса значений $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$, удовлетворяющие условиям

$$а)\ v_{a,k-1} > 0;\ v_{b,k-1} > 0 \quad \text{и} \quad б)\ v_{a,k-1} + v_{b,k-1} = 1{,}0\,. \tag{2.3}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что данные условия не определяют веса $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ однозначно, и, таким образом, можно подобрать сколь угодно много пар $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$, каждая из которых будет удовлетворять данным условиям. Отсюда вытекает, что для устранения данной недоопределенности веса v_a и v_b необходимо подчинить еще каким-либо дополнительным условиям, которые бы, во-первых, позволяли сузить несчетное множество их возможных значений и, во-вторых, которые бы позволяли «взвешивать» значения $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$ с учетом их значимости, т. е. ценности и полезности с точки зрения решения уравнения (1.6) и трудоемкости вычисления его приближенного решения u_k.

Учитывая отмеченные выше соображения, очевидно, что веса v_a и v_b наиболее целесообразно выбирать таким образом, чтобы их значения были тем больше, чем меньше значение функции $y = \varphi(u)$, и наоборот: чем больше значение данной функции, тем меньшее значение должен иметь его вес. Совершенно ясно, что удовлетворить данному правилу можно сколь угодно многими способами. В частности, ему можно удовлетворить в полной мере, если значения весов $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ выбирать обратно пропорциональными значениям $|\varphi(a_{k-1})|^{-n}$ и $|\varphi(b_{k-1})|^{-n}$ и соответственно удовлетворяющими следующим равенствам:

$$а)\ v_{a,k-1} = c\,|\varphi(a_{k-1})|^{-n} \quad \text{и} \quad б)\ v_{b,k-1} = c\,|\varphi(b_{k-1})|^{-n}, \tag{2.4}$$

где c – некоторый положительный коэффициент, а n – некоторое натуральное число. В самом деле, задавая веса v_a и v_b в соответствии с данными равенствами, мы тем самым отдаем большее предпочтение тому из значений $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$, модуль которого ближе к нулю, а соответствующее ему значение аргумента u, как вытекает из монотонности функции $y = \varphi(u)$, ближе к решению u^* уравнения (1.6) [1]. Такой выбор весов $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$, очевидно, вполне соответствует цели решения уравнения (1.6) [1], отыскание такого значения аргумента u, при котором функция $y = \varphi(u)$ принимает нулевое значение.

Вполне очевидно, что отмеченные выше соображения являются справедливыми при любом коэффициенте c и любом показателе степени n в равенствах (2.4), и, таким образом, эти равенства не определяют веса $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ однозначно. Не менее ясно и то, что для устранения их недоопределенности необходимо прежде всего задать в них показатель степени n. Действительно, выбрав какое-либо конкретное значение n, мы тут же получаем возможность вполне однозначно определить и коэффициент c в данных равенствах. Для этого необходимо и достаточно подставить их правые части в равенство (2.3б) и разрешить полученное при этом уравнение относительно c. Выполнив отмеченные операции, в результате получим, что коэффициент c должен определяться в соответствии со следующим равенством:

$$c = 1.0 \Big/ \left[\,|\varphi(a_{k-1})|^{-n} + |\varphi(b_{k-1})|^{-n}\right]. \tag{2.5}$$

Таким образом, для окончательного выбора весов v_{ak} и v_{bk} необходимо подчинить их еще какому-либо требованию или условию, полезному с точки зрения решения уравнения (1.6) [1]. Одним из условий подобного рода, полезность которого совершенно очевидна и не вызывает каких-либо сомнений, является простота, а соответственно, и предельная экономичность вычисления весов $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$. Ориентируясь на это условие, очевидно, что их следует вычислить в соответствии со следующими равенствами:

$$а)\ v_{a,k-1} = s^{-1} \Big/ [\,|\varphi(a_{k-1})| + r] \quad \text{и} \quad б)\ v_{b,k-1} = s^{-1} \Big/ [\,|\varphi(b_{k-1})| + r], \tag{2.6}$$

где величина s определяется равенством вида

$$s = [|\varphi(a_{k-1})| + r]^{-1} + [|\varphi(b_{k-1})| + r]^{-1}, \tag{2.7}$$

а r – параметр регуляризации алгоритма – достаточно малое положительное число, необходимость введения которого в алгоритм мы рассмотрим ниже.

Как непосредственно видно из (2.6) и (2.7), коэффициенты v_a и v_b являются строго положительными числами, а их сумма равна 1.0, и, таким образом, они действительно являются весами значений $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$. Еще одним простейшим способом назначения весов $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ является способ их задания в соответствии с равенствами

$$а)\ v_{a,k-1} = s^{-1}\Big/\left[\varphi(a_{k-1})^2 + r\right] \text{ и } б)\ v_{b,k-1} = s^{-1}\Big/\left[\varphi(b_{k-1})^2 + r\right], \tag{2.8}$$

где величина s вычисляется согласно равенству

$$s = \left[\varphi(a_{k-1})^2 + r\right]^{-1} + \left[\varphi(b_{k-1})^2 + r\right]^{-1}, \tag{2.9}$$

а r, как и в (2.4), – параметр регуляризации алгоритма, необходимость введения которого мы также рассмотрим ниже.

Как уже отмечено нами выше, решение u_k, вычисленное в соответствии с равенством (2.2) и с использованием при этом весов (2.4) или (2.6), будет удовлетворять соотношению $u_k \in I_{u,k-1}$, т. е. будет принадлежать отрезку $I_{u,k-1}$ или, что то же самое, будет лежать внутри данного отрезка и соответственно делить его на две части. Однако, в отличие от МДОП, деление отрезка $I_{u,k-1}$ в данном случае будет осуществляться на две неравные части. Для решения вопроса о том, следует или не следует вычислять следующее $(k+1)-е$ приближенное решение u_{k+1}, вычисляем значение y_k функции $\varphi(u)$ в точке $u = u_k$, т. е. при найденном приближенном решении согласно равенству

$$y_k = \varphi(u_k), \tag{2.10}$$

и проверяем неравенство вида

$$|y_k| \le \Delta\varphi, \tag{2.11}$$

где $\Delta\varphi$ – некоторое, как уже отмечено нами в комментариях неравенства (3.7) [1], наперед заданное, достаточно малое положительное число, введенное с целью регуляризации обсуждаемого алгоритма (см. неравенство (3.7) и его комментарии).

Если данное неравенство выполняется, то процесс решения уравнения (1.6) [1] на этом заканчиваем и принимаем в качестве его корня решение u_k. В противном случае изменяем границы a_{k-1} и b_{k-1} отрезка $I_{u,k-1}$ в соответствии с правилами, вполне аналогичными правилам (2.7) и (2.8) [1] и имеющими следующий вид:

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, \text{ если } y_k > 0; \\ u_k, \text{ если } y_k < 0; \end{cases} \tag{2.12}$$

$$b_k = \begin{cases} u_k, \text{ если } y_k > 0; \\ b_{k-1}, \text{ если } y_k < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Теперь, используя найденные границы a_k и b_k, формируем отрезок $I_{uk} = [a_k, b_k]$ и вычисляем его длину l_k согласно равенству

$$l_k = b_k - a_k, \tag{2.14}$$

а затем проверяем условие вида

$$l_k \le \Delta_u, \tag{2.15}$$

где Δ_u – некоторое, как уже отмечено нами в комментариях неравенства (3.6) [1], наперед заданное положительное число, введенное с целью регуляризации рассматриваемого алгоритма (см. неравенство (3.6) [1] и его комментарии).

Если данное неравенство выполняется, то процесс решения уравнения (1.6) [1] на этом заканчиваем и принимаем в качестве его корня приближенное решение u_k. В противном случае вычисляем очередное $(k+1)-е$ приближенное решение u_{k+1} уравнения (1.6) [1] согласно равенству

$$u_{k+1} = v_{ak}\varphi(a_k) + v_{bk}\varphi(b_k), \tag{2.16}$$

веса v_{ak} и v_{bk} определяются равенствами вида (2.5)–(2.9).

В завершение описания предлагаемого ММДОП сделаем два замечания, касающиеся выбора параметра регуляризации *r*, фигурирующего в равенствах (2.6)–(2.9), и изменений данного алгоритма в случае, когда функция $y = \varphi(u)$ является не монотонно возрастающей, как мы считали до сих пор, а монотонно убывающей функцией.

Замечание 1. Как вытекает из (2.5), по мере приближения решений u_k, $k = 1, 2, 3,\ldots$, к истинному решению u^* уравнения (1.6) [1] значения $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$ монотонно уменьшаются и стремятся к нулю, и, таким образом, рано или поздно, но неизбежно может возникнуть ситуация, когда значение $\varphi(a_{k-1})$ или $\varphi(b_{k-1})$ окажется близким к машинному нулю, а его обращение – невыполнимой операцией. Именно для устранения такого рода ситуаций и вводится параметр *r* в соотношениях (2.6)–(2.9). Его численное значение, очевидно, должно выбираться таким, чтобы при сколь угодно малом значении $\varphi(a_{k-1})$ или $\varphi(b_{k-1})$ не возникла необходимость деления единицы на нуль и прерывание по этой причине процесса решения уравнения (1.6) [1]. Учитывая отмеченное выше, можно видеть, что для гарантированного устранения подобного рода ситуаций параметр r следует выбирать на 2-3 порядка больше машинного нуля.

Замечание 2. Как и МДОП, предлагаемый ММДОП применим не только в рассмотренном выше случае монотонно возрастающей функции $y = \varphi(u)$, но и в случае, когда она является монотонно убывающей функцией. Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, для этого необходимо и достаточно вместо правил (2.2) и (2.3) использовать правила вида

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{если } y_k < 0; \\ u_k, & \text{если } y_k > 0; \end{cases} \tag{2.17}$$

$$b_k = \begin{cases} u_k, & \text{если } y_k < 0; \\ b_{k-1}, & \text{если } y_k > 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Эти соотношения позволяют видеть, что и в этом случае имеющийся отрезок $I_{u,k-1}$ на k-й итерации делится на две неравные части и соответственно на каждой из них он сужается более чем в 2 раза.

3. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МДОП И ММДОП

Как показано нами выше, предложенное изменение МДОП позволило получить модифицированный его вариант, позволяющий вычислять последовательности приближенных решений u_k уравнения (1.6) [1], сходящиеся к его истинному решению u^* с более высокой скоростью сходимости, чем последовательности аналогичных решений, вычисляемых с применением МДОП. Вполне очевидно, что данная оценка сравниваемых методов имеет существенно качественный характер и, соответственно, стимулирует желание получить какие-либо более тонкие количественные оценки скорости сходимости решений u_k, вычисляемых с применением сравниваемых методов. К получению такого рода оценок и анализу возможностей их получения мы еще вернемся. Здесь же рассмотрим изменения других свойств и особенностей МДОП, обусловленные предложенным его изменением. В предельно укрупненном виде эти изменения представлены в табл. 3.1.

Приведем некоторые комментарии представленных в табл. 3.1 результатов, оценим их значимость с точки зрения практических приложений и сделаем это в том же порядке, в котором они представлены в табл. 3.1.

1. Как видно из соотношений (2.1)–(2.9), введение в алгоритм равенств (2.6)–(2.9) не требует подчинения функции $y = \varphi(u)$ каким-либо дополнительным условиям, и, таким образом, область возможных применений ММДОП полностью совпадает с областью возможных применений МДОП. Другими словами, ММДОП применим во всех тех случаях, в которых можно использовать МДОП, и, следовательно, он является столь же универсальным, как и МДОП.

Таблица 3.1

Table 3.1

Изменение свойств и особенностей МДОП

Changes in the properties and features MDSH

№ п/п	Наименование характеристик МДОП, свойств и особенностей	Качественный характер изменения свойств МДОП
1	Универсальность	Не изменяется
2	Идейная и алгоритмическая простота	Усложняются, но несущественно
3	Доступность для программной и аппаратной реализаций	Уменьшается, но сохраняется
4	Устойчивость к ошибкам вычислений	Сохраняется в полной мере
5	Возможность интервального оценивания решения u^*	Сохраняется в полной мере
6	Возможность прогнозирования числа итераций	Сохраняется, но с меньшей точностью
7	Простота регуляризации	Сохраняется в полной мере

2. Замена в МДОП идеи деления отрезка I_{k-1} пополам идеей его деления тоже на две, но не равные части, а с учетом значений функции $y=\varphi(u)$ в его граничных точках a_{k-1} и b_{k-1}, и ее алгоритмическая реализация с помощью соотношений (2.6) и (2.7) или (2.8) и (2.9), очевидно, усложняют и идейные основы метода и их алгоритмическую реализацию. В этой связи возникает совершенно естественный и нериторический вопрос о том, насколько и в каких условиях рассматриваемая замена идей оказывается целесообразной и оправданной какими-либо дополнительными условиями или соображениями. Совершенно ясно, что одним из таких дополнительных условий является суммарный объем вычислений V_s, определяемый равенством вида

$$V_s = V_{it} n. \tag{3.1}$$

Здесь V_{it} – объем вычислений, выполняемых при реализации одной итерации уточнения приближенного решения уравнения (1.6) [1], а n – количество итераций, которое необходимо выполнить для того, чтобы получить такое решение данного уравнения, абсолютная погрешность Δ_u которого удовлетворяет соотношению

$$\Delta_u \le \Delta u_0, \tag{3.2}$$

где Δu_0 – некоторое достаточно малое положительное число, выбираемое с учетом желаемой точности приближенного решения. Не менее ясно и то, что, используя соотношения (2.3)–(2.6) [1] и (2.6)–(2.18), можно с точностью до числа вычислительных и логических операций, необходимых для вычисления значений функции $y = \varphi(u)$, оценить величины V_{it} как для МДОП, так и для ММДОП. Более того, считая длительности выполнения каждой из этих операций известными, что, очевидно, вполне обоснованно, так как при желании их достаточно просто оценить, величины V_{it} можно представить как суммарную длительность времени T_{is}, необходимого для выполнения всей их совокупности при совершении одной итерации уточнения вычисленного на предшествующей итерации решения u_{k-1}. Использование величины T_{is} позволяет заменить равенство (2.14) равенством, имеющим вид

$$T_s = T_{is} n\,, \tag{3.3}$$

где T_s – суммарное время, которое потребуется для получения приближенного решения уравнения (1.6) [1], удовлетворяющего неравенству (2.15). Вполне очевидно, что использование величин T_{is} и T_s является более удобным и позволяет более корректно сравнить МДОП и ММДОП, чем это можно сделать при использовании величины T_{is} и тем более величины V_{it}. Если же эти величины определить с учетом арифметических и других операций, необходимых для вычисления значений функции $\varphi(u)$, то сравнение МДОП и ММДОП будет предельно корректным. Однако совершенно ясно, что такое сравнение можно провести только в конкретных случаях, когда нам известна функция $\varphi(u)$. В общем же случае, когда данную функцию мы не знаем, выполнить подобное сравнение в принципе невозможно.

3. Из соотношений (2.1)–(2.9) видно, что уменьшение доступности ММДОП для программной и аппаратной реализаций обусловливается введением в него равенств (2.6)–(2.9), в соответствии с которыми вычисляются веса $v_{a,k-1}$ и $v_{b,k-1}$ значений $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$ функции $y = \varphi(u)$. Как уже отмечено выше, из всех возможных способов, которыми можно воспользоваться для реализации идеи «взвешивания» значений $\varphi(a_{k-1})$ и $\varphi(b_{k-1})$, использование равенств (2.6) и (2.8) является самым простым способом, и, таким образом, предложить какие-либо другие более простые и более доступные для программной и аппаратной реализаций равенства в данном случае невозможно. Однако если более детально рассмотреть данные равенства, то нетрудно обнаружить, что они не являются недоступными для программной и аппаратной реализаций. Действительно, учитывая технические возможности современных средств вычислительной техники, можно заключить, что их можно реализовать как программно, так и аппаратно без существенных затруднений.

4. Как видно из табл. 3.1, использование ММДОП позволяет:

1) вычислять решения уравнения (1.6) [1], устойчивые к ошибкам задания исходных данных и ошибкам вычислений;

2) наряду с приближенными решениями u_k уточнять нижнюю и верхнюю границы интервалов $I_{u,k-1}$, содержащих точное решение u^* уравнения (1.6) [1];

3) регуляризировать вычисляемое приближенное решение данного уравнения.

5. Возможность прогнозирования числа итераций, которое необходимо выполнить для получения приближенного решения u_k, погрешность вычисления которого не превышает некоторое наперед заданное значение, сохраняется и в случае использования ММДОП. Как и в случае использования МДОП, это прогнозирование можно осуществить с помощью неравенства (3.5) [1]. Поскольку скорость сходимости ММДОП заметно выше скорости сходимости МДОП, то очевидно, что точность прогноза оказывается заведомо ниже, чем в случае МДОП.

4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И СРАВНЕНИЯ МДОП И ММДОП

Рассмотрим некоторые результаты экспериментальных исследований, выполненных с целью сравнения скорости сходимости и точности приближенных решений, вычисляемых МДОП и ММДОП, четырех нелинейных уравнений вида (1.6) [1], взятых нами из учебного пособия [11], а выбор их количества и конкретных видов обусловлен прежде всего тем, чтобы провести сравнение данных методов при всех логически возможных типах (классах) монотонных функций скалярных аргументов. Как известно [12–16], типов таких функций 4, и эти типы характеризуются следующими особенностями:

1) монотонно возрастающие функции $(d\varphi / du > 0)$ с монотонно возрастающей скоростью $(d^2\varphi / du^2 > 0)$;

2) монотонно возрастающие функции $(d\varphi / du > 0)$ с монотонно убывающей скоростью $(d^2\varphi / du^2 < 0)$;

3) монотонно убывающие функции $(d\varphi / du < 0)$ с монотонно возрастающей скоростью $(d^2\varphi / du^2 > 0)$;

4) монотонно убывающие функции $(d\varphi / du < 0)$ с монотонно убывающей скоростью $(d^2\varphi / du^2 < 0)$.

Конкретный вид соотношений, определяющих данные функции и их графики, приведен на рис. 4.1.

Полученные при этом результаты представлены в табл. 4.1.

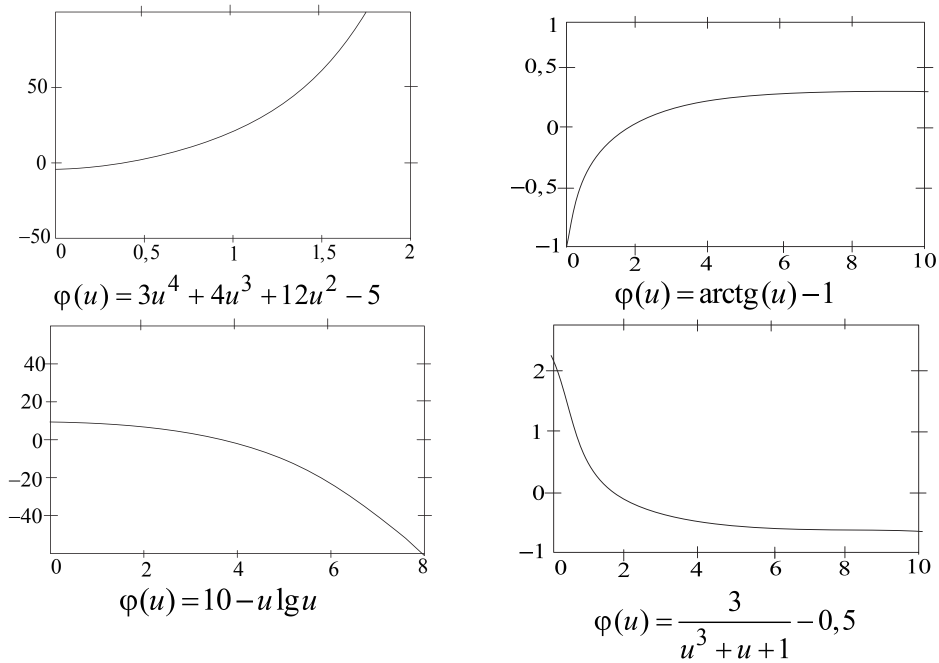

Рис. 4.1. Аналитические и графические представления функций, использованных для получения уравнений

Fig. 4.1. Analytical and graphical representations of the functions used to derive the equations

Таблица 4.1

Table 4.1

Результаты экспериментальных исследований

Experimental research studies

№ п/п	Вид уравнения	Отрезок I_{u0}	Количество итераций		Вычисленное решение	
			ММДОП	МДОП	ММДОП	МДОП
$\Delta u = 1 \cdot 10^{-4}$						
1	$3u^4 + 4u^3 + 12u^2 - 5 = 0$	[0, 1]	11	14	0.5722	0.5722
2	$\operatorname{arctg}(u) - 1 = 0$	[1, 2]	10	14	1.5574	1.5573
3	$3/(u^3 + u + 1) - 0.5 = 0$	[1, 2]	10	14	1.5160	1.5159
4	$10 - u^2 \log(u) = 0$	[3.5, 5]	7	14	4.0554	4.0555
$\Delta u = 1 \cdot 10^{-7}$						
1	$3u^4 + 4u^3 + 12u^2 - 5 = 0$	[0, 1]	20	24	0.5722032	0.5722033
2	$\operatorname{arctg}(u) - 1 = 0$	[1, 2]	20	24	1.5574076	1.5574077
3	$3/(u^3 + u + 1) - 0.5 = 0$	[1, 2]	20	24	1.5159802	1.5159802
4	$10 - u^2 \log(u) = 0$	[3.5, 5]	16	24	4.0554170	4.0554171

Окончание табл. 4.1

End of Tab. 4.1

№	Вид уравнения	Отрезок I_{u0}	Количество итераций		Вычисленное решение	
			ММДОП	МДОП	ММДОП	МДОП
$\Delta u = 1 \cdot 10^{-8}$						
1	$3u^4 + 4u^3 + 12u^2 - 5 = 0$	[0, 1]	23	27	0.57220331	0.57220332
2	$\mathrm{arctg}(u) - 1 = 0$	[1, 2]	23	27	1.55740772	1.55740773
3	$3/(u^3 + u + 1) - 0.5 = 0$	[1, 2]	23	27	1.51598022	1.51598022
4	$10 - u^2 \log(u) = 0$	[3.5, 5]	20	28	4.05541705	4.05541706

Отметим некоторые факты, легко обнаруживаемые при рассмотрении представленных выше результатов.

Во-первых, точности приближенных решений u_k, вычисляемых сравниваемыми методами решения нелинейных уравнений, при всех заданных погрешностях Δu оказываются практически одинаковыми для всех типов монотонных функций, и эта равноточность решений u_k имеет место при изменении задаваемых погрешностей Δu в пределах от $\Delta u = 10^{-4}$ до $\Delta u = 10^{-8}$.

Во-вторых, количество итераций, необходимых для вычисления решений u_k с заданной точностью (с погрешностью, не превышающей заданного значения Δu) при использовании ММДОП, оказывается на 20…50 % меньше, чем в случае использования МДОП, и это неравенство имеет место как при всех задаваемых значениях Δu, так и при всех типах монотонных функций.

Отмеченные выше факты, характеризующие точность приближенных решений и количество итераций, потребовавшихся для их вычисления с применением ММДОП и МДОП, сохраняются и при уменьшении погрешности Δu до $\Delta u = 10^{-13}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные выше результаты исследований МДОП и ММДОП позволяют заключить следующее:

1) предложенный ММДОП обладает всеми важнейшими свойствами МДОП, и, таким образом, с точки зрения практических приложений он оказывается не менее полезным, чем МДОП;

2) применение ММДОП более предпочтительно по сравнению с МДОП во всех тех случаях, когда наряду с отмеченными выше важнейшими свойствами используемый метод решения нелинейных уравнений должен обеспечивать более высокую скорость сходимости вычисляемых решений к истинным решениям данных уравнений;

3) предложенный ММДОП может быть крайне полезен при создании современных систем автоматического управления различными процессами и объектами, функционирующими в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Майстренко А.В., Майстренко К.А., Светлаков А.А.* Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Основные положения, проблемы терминологии и инспекционный анализ метода дихотомии // Научный вестник НГТУ. – 2020. – № 4 (80). – С. 93–110.

2. *Майстренко А.В.* Экспериментальные исследования метода автоматического регулирования процессов, основанного на концепции обратных задач динамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 27. – С. 176–194.

3. *Cruceanu S.* Régularisation pour les problèmes à opérateurs monotones et la méthode de Galerkin // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1971. – Vol. 12, iss. 1. – P. 1–13.

4. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

5. Синтез метода автоматического регулирования процессов, основанного на концепции обратных задач динамики / А.Е. Карелин, А.В. Майстренко, А.А. Светлаков, С.А. Харитонов // Омский научный вестник. – 2017. – № 4 (154). – С. 83–87.

6. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов на основе скользящей квадратичной аппроксимации и его применение в синтезе ПИД-регуляторов // Омский научный вестник. – 2016. – № 1 (145). – С. 73–77.

7. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов с применением многоточечных методов в системах автоматического регулирования процессов // Доклады ТУСУР. – 2009. – № 2 (20). – С. 86–89.

8. *Майстренко А.В., Светлаков А.А.* Косвенное измерение расхода жидкости, перекачиваемой насосными агрегатами // Доклады ТУСУР. – 2014. – № 4 (34). – С. 215–220.

9. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование измеряемых сигналов с применением интегральных уравнений В. Вольтерра и его регуляризация // Омский научный вестник. – 2013. – № 2 (120). – С. 308–313.

10. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Регуляризация простейшего алгоритма цифрового дифференцирования сигналов // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 4 (25). – С. 53–67.

11. *Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по вычислительной математике: учебное пособие для техникумов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

12. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – 2-е изд., испр. – М.: Физматгиз, 1963. – 660 с.

13. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: Раско, 1991. – 270 с.

14. *Хемминг Р.В.* Численные методы: для научных работников и инженеров. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

15. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

16. *Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П.* Численные методы: учебник для техникумов. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.

17. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – 7-е изд., стер. – М.: Наука, 1970. – 608 с.

Майстренко Андрей Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 50 печатных работ и учебных пособий. E-mail: maestro67@mail.ru

Майстренко Константин Андреевич, магистрант кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. E-mail: gos1kk@mail.ru

Светлаков Анатолий Антонович, доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 200 печатных работ и учебных пособий. E-mail: svetlakov38@mail.ru

Maistrenko Andrey V., PhD in Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Computer Systems in Management and Design of Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 50 publications and teaching manuals. E-mail: maestro67@mail.ru

Maistrenko Konstantin A., Bachelor of Technical Sciences, Undergraduate, Department of Computer Systems in Management and Design of Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. E-mail: gos1kk@mail.ru

Svetlakov Anatoliy A., Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Computer Systems in Management and Design of Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 200 publications and teaching manuals. E-mail: svetlakov38@mail.ru).

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-85-102

Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy! A modified method of dichotomy for solution of nonlinear scalar equations and some results of its investigation[*]

A.V. MAISTRENKO[1]*, K.A. MAISTRENKO*[2]*, A.A. SVETLAKOV*[3]

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40 Lenin Prospect, Tomsk, 634050, Russian Federation

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *gos1kk@mail.ru* [c] *svetlakov38@mail.ru*

Abstract

Introduction: when creating modern automatic control systems for various processes and objects operating in real time, very often one has to face the problem of solving various kinds of nonlinear scalar equations. In the first part of this work entitled “Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy!: fundamentals, terminology problems and inspection analysis of the dichotomy method”, a modified version of the dichotomy method was proposed, which has all the main advantages of the modified method. This method has a number of advantages in comparison with other methods for solving nonlinear equations, but at present it has not found wide practical use. The main reason for its low popularity is a low rate of convergence of the sequence of approximate solutions, and a large amount of computation required to obtain sufficiently accurate solutions. Purpose of the study: to propose a modified version of the dichotomy method, which allows one to obtain more rapidly converging sequences of approximate solutions to nonlinear scalar equations and requires significantly less computations required to obtain solutions with the desired accuracy, to illustrate, a higher convergence rate of the sequence of approximate solutions calculated using the modified dichotomy method by solving a number of specific nonlinear equations and, thereby, to substantiate the advantage of the new method for

[*] *Received 26 November 2020.*

its use in creating various automatic control and regulation systems. Results: a modification of the method for dividing a segment in half is proposed, which has all the main advantages of the modified method. The results of solving 4 nonlinear equations are presented illustrating a higher rate of convergence of solutions calculated using the proposed modification. Practical significance: the research results can be used in the development of modern automatic control systems for various technological processes and objects.

Keywords: dichotomy, robustness, modification, convex combination of points, weights of function values, regularization, automatic control, derivative

REFERENCES

1. Maistrenko A.V., Maistrenko K.A., Svetlakov A.A. Dikhotomiya. Dikhotomiya? Dikhotomiya! Osnovnye polozheniya, problemy terminologii i inspektsionnyi analiz metoda dikhotomii [Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy! Basic provisions, problems of terminology and inspection analysis of the method of dichotomy]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 4 (80), pp. 93–110.

2. Maistrenko A.V. Eksperimental'nye issledovaniya metoda avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov, osnovannogo na kontseptsii obratnykh zadach dinamiki [Experimental researches of the method of automatic regulation of processes based on the concept of reverse dynamics problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniya = Perm National Research Bulletin. Electrotechnics, Informational Technologies, Control Systems*, 2018. no. 27, pp. 176–194.

3. Cruceanu S. Régularisation pour les problèmes à opérateurs monotones et la méthode de Galerkin. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1971, vol. 12, iss. 1, pp. 1–13.

4. Rabiner L., Gold B. *Theory and application of digital signal processing*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1975 (Russ. ed.: Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primenenie tsifrovoi obrabotki signalov*. Moscow, Mir Publ., 1978. 848 p.).

5. Karelin A.E., Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Kharitonov S.A. Sintez metoda avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov, osnovannogo na kontseptsii obratnykh zadach dinamiki [Synthesis of the method of automatic control of processes based on the concept of inverse problems of dynamics]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2017, no. 4 (154), pp. 83–87.

6. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov na osnove skol'zyashchei kvadratichnoi approksimatsii i ego primenenie v sinteze PID-regulyatorov [Digital differentiation of signals based on sliding quadratic approximation and its use in the synthesis of PID-regulators]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2016, no. 1 (145), pp. 73–77.

7. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov s primeneniem mnogotochechnykh metodov v sistemakh avtomaticheskogo regulirovaniya protsessov [Digital signal differentiation using multipoint methods in automatic process control systems]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of TUSUR University*, 2009, no. 2 (20), pp. 86–89.

8. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A. Kosvennoe izmerenie raskhoda zhidkosti perekachivaemoi nasosnymi agregatami [Indirect measurement of fluid flow pumped pumping units]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of TUSUR University*, 2014, no. 4 (34), pp. 215–220.

9. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie izmeryaemykh signalov s primeneniem integral'nykh uravnenii V. Vol'terra i ego regulyarizatsiya [Digital differentiation of measured signals using V. Volterra integral equations and its regularization]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2013, no. 2 (120), pp. 308–313.

10. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Regulyarizatsiya prosteishego algoritma tsifrovogo differentsirovaniya signalov [Regularization of the elementary algorithm of digital

differentiation of signals]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 4 (25), pp. 53–67.

11. Vorob'eva G.N., Danilova A.N. *Praktikum po vychislitel'noi matematike* [Computational mathematics workshop]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1990. 208 p.

12. Demidovich B.P., Maron I.A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Fundamentals of computational mathematics]. 2nd ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 660 p.

13. Mudrov A.E. *Chislennye metody dlya PEVM na yazykakh Beisik, Fortran i Paskal'* [Numerical methods for PCs in BASIC, Fortran and Pascal]. Tomsk, Rasko Publ., 1991. 270 p.

14. Hamming R.W. *Chislennye metody*: *dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical methods for scientists and engineers]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1972. 400 p. (In Russian).

15. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977 (Russ. ed.: Forsait Dzh., Mal'kol'm M., Mouler K. *Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii*. Moscow, Mir Publ., 1980. 280 p.).

16. Danilina N.I., Dubrovskaya N.S., Kvasha O.P. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1976. 368 p.

17. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. T. 1 [The course of differential and integral calculus. Vol. 1]. 7th ed. Moscow, Nauka Publ., 1970. 608 p.

Для цитирования:

Майстренко А.В., Майстренко К.А., Светлаков А.А. Дихотомия. Дихотомия? Дихотомия! Модифицированный метод дихотомии решения нелинейных скалярных уравнений и некоторые результаты его исследований // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 1 (81). – С. 85–102. – DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-85-102.

For citation:

Maistrenko A.V., Maistrenko K.A., Svetlakov A.A. Dikhotomiya. Dikhotomiya? Dikhotomiya! Modifitsirovannyi metod dikhotomii resheniya nelineinykh skalyarnykh uravnenii i nekotorye rezul'taty ego issledovanii [Dichotomy. Dichotomy? Dichotomy! A modified method of dichotomy for solution of nonlinear scalar equations and some results of its investigation]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and data processing systems*, 2021, no. 1 (81), pp. 85–102. DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-85-102.