

ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,  
COMPPUTER ENGINEERING  
AND CONTROL

УДК 519.2

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-3-129-142

## Проверка значимости случайного эффекта для винеровской деградиционной модели\*

Е.С. ЧЕТВЕРТАКОВА<sup>1,а</sup>, Е.В. ЧИМИТОВА<sup>1,2,б</sup>

<sup>1</sup> 634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 60/1, ООО «Эко-Томск»

<sup>2</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

<sup>а</sup> [evgenia.chetvertakova@gmail.com](mailto:evgenia.chetvertakova@gmail.com)    <sup>б</sup> [chimitova@corp.nstu.ru](mailto:chimitova@corp.nstu.ru)

В настоящей статье рассматривается винеровская деградиционная модель со случайным эффектом, которая позволяет учесть вариабельность тренда изменения деградиционного показателя от объекта к объекту. Предполагается, что случайный параметр модели имеет усеченное слева нормальное распределение. В работе получены выражения, необходимые для вычисления оценок максимального правдоподобия параметров модели и получения прогноза вероятности безотказной работы до некоторого момента времени (функции надежности).

Предложены два статистических критерия для проверки гипотезы об отсутствии случайного эффекта для рассматриваемой винеровской деградиционной модели. Первый критерий представляет собой хорошо известный критерий отношения правдоподобия, а второй основан на оценке дисперсии случайного параметра. Применение критериев предполагает использование распределений статистик при верной нулевой гипотезе, получаемых методами статистического моделирования в режиме реального времени. В результате проведенного исследования мощности предложенных критериев показано, что критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра, является более предпочтительным по мощности в случае рассмотренных пар конкурирующих гипотез.

Применение разработанных критериев рассмотрено на примере данных о деградации турбовентиляторных двигателей. Набор данных представляет собой измерения, зарегистрированные на 18 датчиках для 100 двигателей. Перед построением деградиционной модели получен единый деградиционный показатель с использованием метода главных компонент. Гипотеза о незначимости случайного эффекта отверглась по обоим критериям. Показано, что винеровская деградиционная модель со случайным эффектом более адекватно описывает распределение наработок до отказа, чем аналогичная модель с фиксированным эффектом.

**Ключевые слова:** винеровская деградиционная модель, модель с фиксированным эффектом, модель со случайным эффектом, усеченное нормальное распределение, гипотеза об отсутствии случайного эффекта, критерий отношения правдоподобия, оценка дисперсии случайного параметра, метод Монте-Карло, надежность, турбовентиляторные двигатели

---

\* Статья получена 23 декабря 2020 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Статистические деградационные модели используются в анализе данных о сроке службы тестируемых изделий в случаях, когда помимо информации об отказах имеется и информация об изменении показателя старения (деградации) [1–3]. Часто на практике рассматриваются параметрические модели, которые различаются распределением приращений показателя деградации и наличием или отсутствием случайного эффекта. Так, например, в [4–8] авторы рассматривают деградационную гамма-модель с фиксированным и случайным эффектами, где в случае модели со случайным эффектом параметр масштаба рассматривают как случайную величину, имеющую гамма-распределение. В [9–11] определяют распределение приращений деградационного показателя как обратное гауссовское распределение, а в [10, 12–14] исследуются винеровские деградационные модели с фиксированным и случайным эффектами, где во втором случае параметр тренда является случайной величиной из усеченного нормального распределения.

При работе с деградационной моделью со случайным эффектом необходимо учитывать распределение случайного параметра, что, в свою очередь, увеличивает число неизвестных параметров модели в сравнении с соответствующей моделью с фиксированным эффектом. В результате точность оценки параметров для модели со случайным эффектом может снизиться, поэтому не рекомендуется использовать такую модель, если случайный эффект незначителен или не наблюдается вовсе [7, 8]. С другой стороны, если разброс значений от объекта к объекту довольно велик, модель с фиксированным эффектом также может оказаться неподходящей, при этом использование модели со случайным эффектом может дать более точные оценки параметров. Таким образом, для того чтобы определиться с выбором между моделями с фиксированным и случайным эффектами, необходимо проверить статистическую гипотезу об отсутствии случайного эффекта.

В [15] для выявления случайного эффекта в модели предлагается использовать тест Хаусмана. Однако этот статистический критерий применяется только для моделей линейной регрессии, где оценки рассчитываются при помощи метода наименьших квадратов, поэтому данный критерий не является подходящим для определения случайного эффекта в деградационных моделях. Другими критериями сравнения статистических моделей являются информационные критерии АИС и ВИС [10], которые основаны на значениях функции максимального правдоподобия и накладывают так называемый штраф на количество оцениваемых параметров. Такие информационные критерии позволяют сравнивать статистические модели, но не используются для проверки гипотез. В связи с этим появилась необходимость в разработке статистического критерия для выявления значимости случайного эффекта в случае винеровской деградационной модели.

В настоящей статье для проверки гипотезы об отсутствии случайного эффекта предлагаются два критерия: критерий отношения правдоподобия и критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра. С использованием метода Монте-Карло было проведено исследование мощностей построенных критериев для различных пар конкурирующих гипотез. Применение этих критериев показано на примере данных о деградации турбовентилаторных двигателей [16].

## 1. ВИНЕРОВСКАЯ ДЕГРАДАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Случайный процесс  $Z(t)$ , характеризующий процесс деградации исследуемых изделий, будем называть винеровским деградационным процессом, если

- $Z(0) = 0$ ;
- $Z(t)$  является случайным процессом с независимыми приращениями;
- приращения  $\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t)$  подчиняются нормальному распределению с функцией плотности

$$f_N(u; \Delta s(t), \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u - \Delta s(t)}{\sigma} \right)^2},$$

где  $\Delta s(t) = m(t + \Delta t) - m(t)$  – параметр сдвига и  $\sigma$  – параметр масштаба.

Обозначим математическое ожидание случайного процесса  $Z(t)$  через

$$M(Z(t)) = m(t),$$

где  $m(t)$  – положительная возрастающая функция. Будем называть ее функцией тренда показателя деградации. В настоящей статье будем использовать функции тренда вида

$$m(t; \gamma) = \gamma_0 t, \quad \gamma_0 > 0, \quad (1)$$

$$m(t; \gamma) = \gamma_0 (e^{\gamma_1 t} - 1), \quad \gamma_0 > 0, \quad \gamma_1 > 0. \quad (2)$$

Таким образом, время безотказной работы представляет собой случайную величину

$$T = \sup \{t : Z(t) < \tilde{z}\},$$

где  $\tilde{z}$  – критический уровень показателя деградации, при достижении которого фиксируется отказ изделия.

Если случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  подчиняются нормальному распределению с параметрами сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и параметрами масштаба  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно, то их сумма  $\xi_1 + \xi_2$  имеет нормальное распределение с параметром сдвига  $\mu_1 + \mu_2$  и параметром масштаба  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . Таким образом, при выполнении сформулированных предположений случайный процесс  $Z(t)$  в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_k$  представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметром сдвига, равным  $m(t_k)$ , и параметром масштаба, равным  $\sigma$ .

Тогда функция надежности для рассматриваемой винеровской деградационной модели принимает вид

$$S(t) = P\{T > t\} = P\{Z(t) < \tilde{z}\} = \Phi\left(\frac{\tilde{z} - m(t)}{\sigma}\right), \quad (3)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция стандартного нормального распределения.

При рассмотрении винеровской деградиационной модели со случайным эффектом будем предполагать, что параметр  $\gamma_0$  является случайной величиной  $\xi$ , которая имеет усеченное нормальное распределение с функцией плотности

$$f_{trunc}(u; \mu, \delta) = \frac{f_N(u; \mu, \delta)}{1 - F_N(0; \mu, \delta)}, \quad u > 0,$$

где  $F_N(\cdot)$  – функция распределения нормального закона с параметром сдвига  $\mu$  и параметром масштаба  $\delta$ .

Введем следующее обозначение для функции тренда:

$$m(t; \gamma) = \xi \cdot v(t; \gamma).$$

Тогда в случае модели со случайным эффектом маргинальную функцию плотности для  $Z(t)$  можно записать следующим образом:

$$f_{Z(t)}(u; v(t, \gamma), \sigma, \mu, \delta) = \int_0^{\infty} f_N(u; \omega \cdot v(t, \gamma), \sigma) f_{trunc}(\omega; \mu, \delta) d\omega.$$

Функция надежности для винеровской деградиационной модели со случайным эффектом вычисляется по формуле

$$S(t) = P\{T > t\} = P\{Z(t) < \bar{z}\} = \int_{-\infty}^{\bar{z}} f_{Z(t)}(u; v(t, \gamma), \sigma, \mu, \delta) du. \quad (4)$$

Обозначим измерения показателя деградации для  $i$ -го объекта через

$$(0, Z_0^i), (t_1^i, Z_1^i), \dots, (t_{k_i}^i, Z_{k_i}^i),$$

где  $k_i$  – это число измерений деградиационного показателя во времени. Без потери общности будем считать, что начальное значение показателя старения  $Z_0^i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Тогда выборка приращений деградиационного показателя может быть записана как

$$\mathbf{X}_n = \{X_j^i = Z_j^i - Z_{j-1}^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k_i}\}.$$

В таком случае оценка максимального правдоподобия параметров  $\sigma$ ,  $\gamma$  винеровской деградиационной модели с фиксированным эффектом будет вычисляться в результате максимизации логарифма функции правдоподобия:

$$L(\mathbf{X}_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} f_N(X_j^i; v_j^i, \sigma), \quad (5)$$

где  $v_j^i = \gamma_0 (v(t_j^i; \gamma) - v(t_{j-1}^i; \gamma))$ .

Если же рассматривается винеровская деградационная модель со случайным эффектом, то функция правдоподобия будет записана как произведение совместных функций плотности приращений, где случайный эффект является единым на протяжении всего деградационного процесса каждого объекта:

$$L(\mathbf{X}_n) = \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^{k_i} f_N \left( X_j^i; \omega \cdot v(t_j^i, \gamma), \sigma \right) \right] f_{trunc}(\omega; \mu, \delta) d\omega. \quad (6)$$

## 2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОТСУТСТВИИ СЛУЧАЙНОГО ЭФФЕКТА

Пусть наблюдаемый деградационный процесс  $Z(t)$  является винеровским деградационным процессом. Если разброс значений от объекта к объекту довольно велик, то влияние случайного эффекта может оказаться значительным, а деградационная модель с фиксированным эффектом – не подходящей для дальнейшего анализа. Таким образом, появляется необходимость в проверке гипотезы об отсутствии случайного эффекта в модели. Иными словами, требуется проверить, является ли параметр  $\xi$  случайной величиной:

$$H_0 : \xi = \text{const}.$$

Конкурирующая гипотеза, соответствующая деградационной модели со случайным эффектом, будет иметь вид

$$H_1 : D\xi > 0.$$

Для проверки гипотезы  $H_0$  рассмотрим статистический критерий отношения правдоподобия, который обычно используется для определения наилучшей из двух предложенных моделей. Значение статистики критерия рассчитывается как

$$\lambda_n = \ln \frac{L(\mathbf{X}_n | H_1)}{L(\mathbf{X}_n | H_0)},$$

где  $L(\mathbf{X}_n | H_0)$  – это значение максимума функции правдоподобия для деградационной модели с фиксированным эффектом,  $L(\mathbf{X}_n | H_1)$  – значение максимума функции правдоподобия для деградационной модели со случайным эффектом. При достаточно больших значениях  $\lambda_n$  нулевая гипотеза отклоняется.

Необходимо отметить, что согласно лемме Неймана–Пирсона критерий отношения правдоподобия является наиболее мощным при проверке лишь простых гипотез, однако в данной задаче рассматривается сложная гипотеза, поскольку значения параметров модели заранее неизвестны. Поэтому в качестве альтернативного подхода предлагается критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра модели.

Для винеровской деградационной модели со случайным эффектом вида (4) оценка дисперсии случайного параметра будет рассчитываться как

$$d_n = \hat{\delta}_n^2 \left( 1 - \frac{\hat{\mu}_n \cdot f_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)}{1 - F_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)} - \left( \frac{\hat{\delta}_n \cdot f_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)}{1 - F_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)} \right)^2 \right),$$

где  $\hat{\mu}_n$  и  $\hat{\delta}_n$  являются оценками максимального правдоподобия параметров сдвига и масштаба случайного параметра  $\xi$  соответственно.

Для того чтобы определить, может ли выбранная оценка дисперсии  $d_n$  быть использована в качестве статистики критерия, проведем исследование статистических свойств  $d_n$  для винеровской деградационной модели с использованием метода Монте-Карло. Зафиксируем истинные значения параметров  $\sigma = 2$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 0.05$  для модели со случайным эффектом и  $\sigma = 2$ ,  $\xi = 0.5$  – для модели с фиксированным эффектом. Количество сгенерированных выборок приращений деградационного показателя  $N = 10\,000$ . Полученные значения среднего  $\bar{X}$  и выборочной дисперсии  $S^2$  оценок  $d_n$  для винеровских деградационных моделей представлены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Значения среднего  $\bar{X}$  и выборочной дисперсии  $S^2$  статистики  $d_n$

Means  $\bar{X}$  and variance values  $S^2$  of estimates  $d_n$

Винеровская модель	Описательная статистика	$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$
С фиксированным эффектом	$\bar{X}$	$3.45 \cdot 10^{-7}$	$1.31 \cdot 10^{-7}$	$5.32 \cdot 10^{-8}$	$3.27 \cdot 10^{-8}$
	$S^2$	$7.75 \cdot 10^{-10}$	$3.42 \cdot 10^{-11}$	$9.89 \cdot 10^{-12}$	$6.23 \cdot 10^{-12}$
Со случайным эффектом	$\bar{X}$	$5.15 \cdot 10^{-3}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$2.59 \cdot 10^{-3}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$
	$S^2$	$4.61 \cdot 10^{-4}$	$9.80 \cdot 10^{-5}$	$3.07 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$

Как видно из табл. 1, средние значения оценки дисперсии  $d_n$ , полученные для модели с фиксированным эффектом, с увеличением объема выборки стремятся к нулю, в отличие от средних значений  $d_n$ , полученных для модели со случайным эффектом, которые стремятся к истинному значению дисперсии, равному  $D\xi = 2.5 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, полученные результаты подтверждают асимптотическую несмещенность и состоятельность оценки дисперсии  $d_n$ , что позволяет использовать ее в качестве статистики критерия

для проверки гипотезы об отсутствии случайного эффекта. Аналогично критерию отношения правдоподобия гипотеза  $H_0$  будет отклоняться при достаточно больших значениях  $d_n$ .

Теоретическое распределение статистик предложенных критериев при верной нулевой гипотезе остается неизвестным, так как на вид распределения влияет ряд факторов: вид функции тренда, значения и число моментов времени замера показателя деградации, объем выборки и другие. Таким образом, применение данных критериев предполагает использование распределений статистик при верной нулевой гипотезе, получаемых методами статистического моделирования в режиме реального времени в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Сгенерировать выборку приращений для деградационной модели с фиксированным эффектом в соответствии с заданными моментами времени замера  $t_j^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k_i}$ , и параметрами, представляющими собой значения оценок максимального правдоподобия, полученные по выборкам исходных данных.

2. Методом максимального правдоподобия оценить параметры деградационной модели с фиксированным эффектом по смоделированной выборке, полученной в пункте 1, используя функцию правдоподобия вида (5).

3. Методом максимального правдоподобия оценить параметры деградационной модели со случайным эффектом по смоделированной выборке, полученной в пункте 1, используя функцию правдоподобия вида (6).

4. Вычислить значения статистик  $\lambda_n$  и  $d_n$ .

5. Повторив действия из пунктов 1–4  $M$  раз, получить эмпирическую функцию распределения  $G_M(s | H_0)$  для каждого из предложенных критериев.

6. Вычислить значения достигаемого уровня значимости

$$\alpha_n = 1 - G_M(S_n | H_0),$$

где  $S_n$  – это соответствующее значение статистики ( $\lambda_n$  или  $d_n$ ).

7. Если значения  $\alpha_n$  меньше заданного уровня значимости  $\alpha$ , то гипотеза  $H_0$  отклоняется.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОБ ОТСУТСТВИИ СЛУЧАЙНОГО ЭФФЕКТА

Для сравнения критерия отношения правдоподобия и критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра, для винеровской деградационной модели и различных пар конкурирующих гипотез проведено исследование мощности с использованием метода Монте-Карло. Оценки мощности для обоих критериев были получены при различных объемах выборок, моментах времени замера показателя деградации  $t_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , а также различной величине случайного эффекта. Количество смоделированных выборок

для каждого значения оценки мощности  $M = 10\,000$ , уровень значимости задан равным  $\alpha = 0.01$ .

В табл. 2 представлены значения мощности предложенных критериев при различных наборах моментов времени замера:

$$T_1: t_j = t_{j-1} + 400, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 10},$$

$$T_2: t_j = t_{j-1} + 250, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 16},$$

$$T_3: t_j = t_{j-1} + 125, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 32}.$$

При справедливости гипотезы  $H_0$  выборки приращений генерируются из модели с фиксированным эффектом с параметром тренда, равным  $\gamma_0 = 0.5$ . В случае же, если верна конкурирующая гипотеза  $H_1$ , выборки генерируются из модели со случайным эффектом с параметрами  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 0.05$ . В качестве функции тренда во всех случаях была выбрана линейная функция вида (1).

Таблица 2

Table 2

**Оценки мощности критериев при различных наборах моментов времени замера деградационного показателя**

**Tests of power estimates for different sets of time moments**

Моменты замера	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$T_1$	0.50	0.82	0.94	1.0
$T_2$	0.61	0.84	0.98	1.0
$T_3$	0.64	0.87	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$T_1$	0.53	0.81	0.90	1.0
$T_2$	0.59	0.84	0.96	1.0
$T_3$	0.62	0.85	0.99	1.0

Как видно из табл. 2, для винеровской деградационной модели мощность обоих критериев растет с увеличением числа объектов  $n$ , а также частоты измерений показателя деградации.

Чтобы продемонстрировать, как меняется мощность в зависимости от величины случайного эффекта, рассмотрим модели с различными значениями параметра масштаба  $\delta$ . Моменты замера были получены по формуле  $t_j = t_{j-1} + 250$ , где  $t_0 = 0$ ,  $j = \overline{1, 16}$ . Уровень значимости  $\alpha$  выбран равным 0.01.

Таблица 3

Table 3

**Оценки мощности критериев при различных значениях параметра масштаба  $\delta$  винеровской деградационной модели со случайным эффектом**

**Tests power estimates for different values of the scale parameter  $\delta$  for the Wiener degradation model with random effects**

Параметр масштаба $\delta$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$\delta = 0.05$	0.56	0.82	0.99	1.0
$\delta = 0.1$	0.63	0.86	0.99	1.0
$\delta = 0.5$	0.64	0.89	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$\delta = 0.05$	0.51	0.79	0.97	0.99
$\delta = 0.1$	0.58	0.83	0.97	1.0
$\delta = 0.5$	0.60	0.85	0.99	1.0

Как видно из табл. 3, значения мощности увеличиваются с ростом величины случайного эффекта. Кроме того, можно предположить, что критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра, по мощности несколько превосходит критерий отношения правдоподобия.

#### 4. АНАЛИЗ ДАННЫХ О ДЕГРАДАЦИИ ТУРБОВЕНТИЛЯТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Проиллюстрируем работу критериев проверки значимости случайного эффекта для винеровской деградационной модели на примере данных о турбовентиляторных двигателях [15]. Турбовентиляторный двигатель представляет собой турбореактивный двухконтурный двигатель с высокой степенью двухконтурности. Такие двигатели широко применяются в качестве силовых установок самолетов и требуют адекватного контроля и своевременного обслуживания для обеспечения безопасности полета [16]. В связи с этим очевидна необходимость прогнозирования состояния системы.

В ходе эксперимента в [15] были получены результаты измерения с 18 датчиков по различным показателям для 100 двигателей.

Построение винеровской деградационной модели предполагает наличие некоторого скалярного деградационного показателя, который в полной мере характеризует состояние объекта. Для него должен быть известен критический уровень, при достижении которого фиксируется отказ объекта. Поэтому для получения единого деградационного показателя к полученным многомерным измерениям применен метод главных компонент. Критический уровень взят равным медиане, вычисленной по выборке значений деградационного показателя в момент отказа,  $\tilde{z} = 7.05$ . Полученные значения деградационного показателя представлены на рис. 1.

При построении деградационной модели в качестве функции тренда рассмотрим экспоненциальную функцию вида (2).

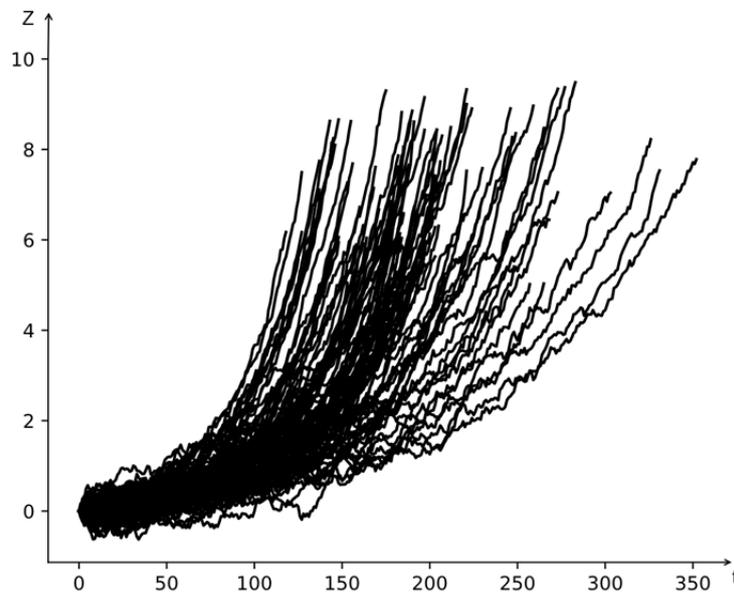


Рис. 1. График изменения деградационного показателя с течением времени для данных о турбовентиляторных двигателях

Fig. 1. The degradation paths for the turbofan engine data

Поскольку разброс значений деградационного показателя от объекта к объекту достаточно велик, проверим гипотезу об отсутствии случайного эффекта с использованием предложенных критериев. Результаты оценки параметров винеровских деградационных моделей, а также значения статистик и достигаемые уровни значимости рассмотренных критериев представлены в табл. 4.

Таблица 4

Table 4

**Значения оценок параметров винеровских деградационных моделей, статистик и достигаемых уровней значимости предложенных критериев проверки гипотезы об отсутствии случайного эффекта**

**MLEs of the Wiener degradation model parameters, statistics, and p-values for the proposed tests**

Винеровская деградационная модель	Оценки параметров модели	Критерий отношения правдоподобия		Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра	
		$\lambda_n$	$\alpha_n$	$d_n$	$\alpha_n$
С фиксированным эффектом	$\hat{\sigma} = 2.1$ $\hat{\gamma} = (2.48, 0.07)$	1.3	$< 10^{-3}$	0.003	$< 10^{-4}$
Со случайным эффектом	$\hat{\sigma} = 0.5$ $\hat{\mu} = 2.31$ $\hat{\delta} = 0.867$ $\hat{\gamma}_1 = 0.008$				

Поскольку достигаемый уровень значимости  $\alpha_n$  меньше заданного уровня значимости  $\alpha = 0.05$  для обоих критериев, то гипотеза об отсутствии случайного эффекта отвергается.

На рис. 2 представлены графики функций надежности для винеровских деградационных моделей с фиксированным и случайным эффектами (пунктирная и сплошная линии соответственно), а также график эмпирической функции надежности. Значения времени наработки до отказа для эмпирической функции надежности получены следующим образом: по каждому деградационному процессу строилась функция тренда вида (2), далее в качестве времени наработки до отказа взято время, при котором тренд пересекает критический уровень деградации  $\tilde{z} = 7.05$ .

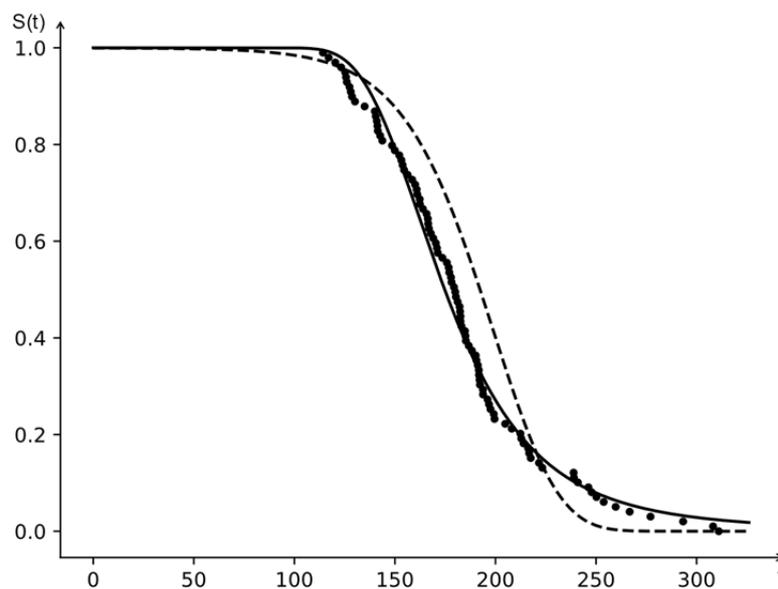


Рис. 2. Функции надежности моделей с фиксированным и случайным эффектами и эмпирическая функция надежности отказов

Fig 2. The reliability functions of the fixed-effect and random-effect Wiener degradation models and the empirical distribution of engines failures

Как видно из рис. 2, функция надежности модели со случайным эффектом располагается ближе к наблюдаемому распределению отказов, тем самым демонстрируя, что винеровская деградационная модель со случайным эффектом является наиболее подходящей для описания поведения исследуемых турбовентиляторных двигателей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены вопросы построения винеровских деградационных моделей с фиксированным и случайным эффектами. Для выявления значимости случайного эффекта на базе винеровской деградационной модели предложены критерий отношения правдоподобия и критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра.

Для предложенных критериев проведено исследование мощности, в результате которого показано, что критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра, является более мощным.

Применение критериев проиллюстрировано на примере данных о деградации турбовентиляторных двигателей. В результате анализа показано, что винеровская деградационная модель со случайным эффектом является наиболее подходящей для рассматриваемых данных, так как описывает поведение исследуемых турбовентиляторных двигателей лучше модели с фиксированным эффектом.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meeker W.Q., Escobar L.A. Statistical methods for reliability data. – New York: John Wiley and Sons, 1998. – 680 p.
2. Nikulin M., Bagdonavicius V. Accelerated life models: modeling and statistical analysis. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2001. – 334 p.
3. Антонов А.В., Никулин М.С. Статистические модели в теории надежности. – М.: Абрис, 2012. – 390 с.
4. Bordes L., Paroissin C., Salami A. Parametric inference in a perturbed gamma degradation process. – arXiv preprint arXiv:1005.1214. – 2010. – 13 p.
5. Lawless J., Crowder M. Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure // Lifetime Data Analysis. – 2004. – Vol. 10. – P. 213–227.
6. Pan Z., Balakrishnan N. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes // Reliability Engineering and System Safety. – 2011. – Vol. 96. – P. 949–957.
7. Четвертакова Е.С., Чимитова Е.В. Testing significance of random effects for the gamma degradation model // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 49. – С. 92–100.
8. Четвертакова Е.С. Исследование деградационных гамма-моделей со случайным и фиксированным эффектами // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2018. – Т. 22, № 6. – С. 120–128. – DOI: 10.21285/1814-3520-2018-6-120-128.
9. Pan D., Liu J.B., Cao J. Remaining useful life estimation using an inverse Gaussian degradation model // Neurocomputing. – 2016. – Vol. 185. – P. 64–72.
10. A comparative analysis of the Wiener, gamma and inverse gaussian degradation models / E.V. Chimitova, E.S. Chetvertakova, S.A. Sergeeva, E. Osinceva // Applied methods of statistical analysis. – Novosibirsk: NSTU, 2017. – Vol. 4: Nonparametric methods in cybernetics and system analysis: proceedings of the international workshop, Krasnoyarsk, 18–22 Sept. 2017. – P. 160–167.
11. Wang X., Xu D. An inverse Gaussian process model for degradation data // Technometrics. – 2010. – Vol. 52. – P. 188–197.
12. Tsai C.-C., Tseng S.-T., Balakrishnan N. Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2011. – Vol. 12. – P. 25–35.
13. Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data // Journal of Multivariate Analysis. – 2010. – Vol. 101, N 2. – P. 340–351.
14. Четвертакова Е.С., Чимитова Е.В. The wiener degradation model with random effects in reliability metrology // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI. – Glasgow: World Scientific, 2018. – P. 162–169.
15. Hausman J.A. Specification tests in econometrics // Econometrica. – 1978. – Vol. 46. – P. 1251–1271.
16. Hidden Markov model for health estimation and prognosis of turbofan engines / A. Giantomassi, F. Ferracuti, A. Benini, G. Ippoliti, S. Longhi, A. Petrucci // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (AMSE). – Washington, DC, USA, 2011. – P. 1–9.
17. Кулагин В., Кузьмичев В.С. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок. В 2 кн. Кн. 2. Основы теории ГТД. Совместная работа узлов выполненного двигателя и его характеристики. – 4-е изд., испр. – М.: Инновационное машиностроение, 2018. – 280 с.

*Четвертакова Евгения Сергеевна*, ведущий программист-аналитик ООО «Эко-Томск». Основное направление научных исследований – анализ надежности, статистические деградационные модели. Имеет более 20 печатных работ. E-mail: evgenia.chetvertakova@gmail.com

*Чимитова Екатерина Владимировна*, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета, старший программист-аналитик ООО «Эко-Томск». Основное направление научных исследований – анализ надежности, статистические деградационные модели. Имеет более 80 печатных работ и учебных пособий. E-mail: chimitova@corp.nstu.ru

*Chetvertakova Evgeniia S.*, leading programmer-analyst, ООО Eco-Tomsk. Her research interests are currently focused on reliability analysis and statistical degradation models. She has more than 20 publications. E-mail: evgenia.chetvertakova@gmail.com

*Chimitova Ekaterina V.*, D. Sc. (Eng.), professor, department of theoretical and applied informatics; senior programmer-analyst, ООО Eco-Tomsk. Her research interests are currently focused on mathematical modeling methods, survival and reliability analysis. She has more than 80 publications. E-mail: chimitova@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-3-129-142

### ***Testing significance of random effects for the Wiener degradation model***

*E.S. CHETVERTAKOVA<sup>1,a</sup>, E.V. CHIMITOVA<sup>1,2,b</sup>*

<sup>1</sup> ООО “Eco-Tomsk”, 60/1 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russian Federation

<sup>2</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

<sup>a</sup> evgenia.chetvertakova@gmail.com    <sup>b</sup> chimitova@corp.nstu.ru

#### **Abstract**

This paper considers the Wiener degradation model with random effects. Random-effect models take into account the unit-to-unit variability of the degradation index. It is assumed that a random parameter has a truncated normal distribution. During the research, the expression for the maximum likelihood estimates and the reliability function has been obtained. Two statistical tests have been proposed to reveal the existence of random effects in degradation data corresponding to the Wiener degradation model. The first test is a well-known likelihood ratio test, and the second one is based on the variance estimate of the random parameter. These tests have been compared in terms of power with the Monte-Carlo simulation method. The result of the research has shown that the criterion based on the variance estimate of the random parameter is more powerful than the likelihood ratio test in the case of the considered pairs of competing hypotheses.

An example of the analysis using the proposed tests for the turbofan engine degradation data has been considered. The data set includes the measurements recorded from 18 sensors for 100 engines. Before constructing the degradation model, the single degradation index has been obtained using the principal component method. The hypothesis of the random effect insignificance in the model has been rejected for both tests. It has been shown that the random-effect Wiener degradation model describes the failure time distribution more accurately than the fixed-effect Wiener degradation model.

**Keywords:** Wiener degradation model, fixed-effect model, model with random effects, truncated normal distribution, absence of random effects hypothesis, likelihood ratio test, variance estimate of the random parameter, Monte-Carlo method, reliability, turbofan engine data

---

\* Received 23 December 2020.

## REFERENCES

1. Meeker W.Q., Escobar L.A. *Statistical methods for reliability data*. New York, John Wiley and Sons, 1998. 680 p.
2. Nikulin M., Bagdonavicius V. *Accelerated life models: modeling and statistical analysis*. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2001. 334 p.
3. Antonov A.V., Nikulin M.S. *Statisticheskie modeli v teorii nadezhnosti*. Moscow, Abris Publ., 2012. 390 p.
4. Bordes L., Paroissin C., Salami A. *Parametric inference in a perturbed gamma degradation process*. arXiv preprint arXiv:1005.1214. 2010. 13 p.
5. Lawless J., Crowder M. Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure. *Lifetime Data Analysis*, 2004, vol. 10, pp. 213–227.
6. Pan Z., Balakrishnan N. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes. *Reliability Engineering and System Safety*, 2011, vol. 96, pp. 949–957.
7. Chetvertakova E.S., Chimitova E.V. Testing significance of random effects for the gamma degradation model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2019, no. 49, pp. 92–100.
8. Chetvertakova E.S. Issledovanie degradatsionnykh gamma-modelei so sluchainym i fiksirovannym effektami [Study of fixed effect and random effect gamma degradation models]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Irkutsk State Technical University*, 2018, vol. 22, no. 6, pp. 120–128. DOI: 10.21285/1814-3520-2018-6-120-128.
9. Pan D., Liu J.B., Cao J. Remaining useful life estimation using an inverse Gaussian degradation model. *Neurocomputing*, 2016, vol. 185, pp. 64–72.
10. Chimitova E.V., Chetvertakova E.S., Sergeeva S.A., Osinceva E.A. A comparative analysis of the Wiener, gamma and inverse gaussian degradation models. *Applied methods of statistical analysis. Vol. 4. Nonparametric methods in cybernetics and system analysis*. Novosibirsk, 2017, pp. 160–167.
11. Wang X., Xu D. An inverse Gaussian process model for degradation data. *Technometrics*, 2010, vol. 52, pp. 188–197.
12. Tsai C.-C., Tseng S.-T., Balakrishnan N. Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2011, vol. 12, pp. 25–35.
13. Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data. *Journal of Multivariate Analysis*, 2010, vol. 101, no. 2, pp. 340–351.
14. Chetvertakova E.S., Chimitova E.V. The wiener degradation model with random effects in reliability metrology. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI*. Glasgow, World Scientific, 2018, pp. 162–169.
15. Hausman J.A. Specification tests in econometrics. *Econometrica*, 1978, vol. 46, pp. 1251–1271.
16. Giantomassi A., Ferracuti F., Benini A., Ippoliti G., Longhi S., Petrucci A. Hidden Markov model for health estimation and prognosis of turbofan engines. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (AMSE)*, Washington, DC, USA, 2011, pp. 1–9.
17. Kulagin V., Kuz'michev V.S. *Teoriya, raschet i proektirovanie aviatsionnykh dvigatelei i energeticheskikh ustanovok*. V 2 kn. Kn. 2. *Osnovy teorii GTD. Sovmestnaya rabota uzlov vypolnennogo dvigatelya i ego kharakteristiki* [Theory, calculation and design of aircraft engines and power plants. In 2 vol. Vol. 2. Fundamentals of the theory of gas turbine engines. Joint work of the components of the completed engine and its characteristics]. 4th ed. Moscow, Innovatsionnoe mashinostroenie Publ., 2018. 280 p.

Для цитирования:

Четвертакова Е.С., Чимитова Е.В. Проверка значимости случайного эффекта для винеровской деградационной модели // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 3 (83). – С. 129–142. – DOI: 10.17212/2782-2001-2021-3-129-142.

For citation:

Chetvertakova E.S., Chimitova E.V. Proverka znachimosti sluchainogo effekta dlya vinerovskoi degradatsionnoi modeli [Testing significance of random effects for the wiener degradation model]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2021, no. 3 (83), pp. 129–142. DOI: 10.17212/2782-2001-2021-3-129-142.

ISSN 2782-2001, <http://journals.nstu.ru/vestnik>  
*Analysis and data processing systems*  
 Vol. 83, No 3, 2021, pp. 129–142