ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 85, № 1, 2022, с. 121–139

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 85, No. 1, 2022, pp. 121–139

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND MANAGEMENT

УДК 519.111.3+004.823 DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-121-139

Методика использования базы знаний производящих функций двух переменных*

Д.В. КРУЧИНИН

634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 40, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

kruchinindm@gmail.com

Базы математических знаний являются развитием классических математических справочников и энциклопедий, что, в свою очередь, делает их важным инструментом при проведении различных исследований в математических науках и смежных областях. В настоящее время существуют различные базы знаний математических объектов. В настоящей работе рассматривается база знаний производящих функций двух переменных, использование которой позволяет оперировать многомерными объектами. Актуальность и значимость данного исследования заключается в решении различных задач, связанных с применением математического аппарата производящих функций.

В работе рассмотрено использование разработанной базы знаний производящих функций двух переменных при решении следующих задач: оперирование производящими функциями двух переменных и получение явных выражений для коэффициентов композиции производящих функций двух переменных, коэффициентов взаимной и обратной производящих функций двух переменных, коэффициентов логарифмических производных производящих функций, а также их степеней. В дополнение рассмотрена обратная задача, направленная на получение производящих функций для явных выражений, описывающих их коэффициенты.

Кроме того, использование базы знаний производящих функций двух переменных способствует процессу построения алгоритмов комбинаторной генерации для сложных комбинаторных объектов, определяемых производящими функциями многих переменных. В качестве примера показано построение алгоритмов комбинаторной генерации для множеств, определяемых обобщенными числами Нараяны. Числа Нараяны описывают классы подмножеств для комбинаторных множеств, определяемых числами Каталана. В статье выбрана одна из комбинаторных интерпретаций для чисел Нараяны – множество путей Дика длиной n, у которых имеется m пиков.

Ключевые слова: база знаний, производящие функции двух переменных, композиция, явные выражения, пирамида, числа Каталана, числа Нараяны, комбинаторная генерация

---

* *Статья получена 17 ноября 2021 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Базы математических знаний являются развитием классических математических справочников и энциклопедий, что, в свою очередь, делает их важным инструментом при проведении различных исследований в математических науках и смежных областях. Примерами таких баз знаний являются онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей [1], сервер комбинаторных объектов [2] и др.

Важным объектом описания в таких базах являются производящие функции, поскольку одной производящей функцией можно получить компактное представление дискретных структур [3, 4]. Разработанная методология решения задач, основанных на применении производящих функций многих переменных, позволила существенно расширить области их применения [5–7].

В настоящей работе рассматривается методика использования разработанной базы знаний производящих функций двух переменных. В основе указанной базы знаний лежат правила вычисления коэффициентов степеней производящих функций. Выделим следующий перечень задач, решение которых можно осуществить с помощью данной базы знаний:

1) получение явных выражений для коэффициентов композиции производящих функций двух переменных и их степеней;

2) получение явных выражений для коэффициентов взаимной производящей функции двух переменных и их степеней;

3) получение явных выражений для коэффициентов обратной производящей функции двух переменных и их степеней;

4) получение явных выражений для коэффициентов реверсивной производящей функции двух переменных и их степеней;

5) получение явных выражений для коэффициентов обратной реверсивной производящей функции двух переменных и их степеней;

6) получение производящих функций для явных выражений, описывающих их коэффициенты;

7) получение явных выражений для коэффициентов логарифмических производных производящих функций;

8) построение алгоритмов комбинаторной генерации.

1. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОМПОЗИЦИИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим решение первой задачи, направленной на получение явных выражений для коэффициентов композиции производящих функций двух переменных и их степеней. Для этого воспользуемся правилами получения явных выражений для разных вариантов композиций производящих функций (данные из табл. 1 в работе [7]), а также общим правилом нахождения коэффициентов степеней композиций производящих функций двух переменных (теорема 2 в работе [7]). В результате получим перечень правил получения явных выражений для коэффициентов степеней композиций производящих функций двух переменных, часть которых представлена в табл. 1.

Структура табл. 1 имеет следующий вид: в первом столбце таблицы записаны примеры вариантов композиций производящих функций одной и двух переменных, во втором столбце – явные выражения для коэффициентов k-й степени композиций производящих функций через соответствующие формулы для коэффициентов k-й степени производящих функций, образующих данную композицию. При подстановке $k = 1$ получается явное выражение для коэффициентов самой композиции производящих функций.

Таблица 1

Table 1

Правила получения явных выражений для коэффициентов степеней композиций производящих функций двух переменных

Rules for obtaining explicit expressions for the coefficients of powers of the compositions of generating two-variable functions

Номер правила	Композиция	Коэффициент
1	$G(x,y)^k = H(A(x),y)^k$	$g(n,m,k) = \sum_{q=0}^{n} A^{\Delta}(n,q)\,h(q,m,k)$
2	$G(x,y)^k = H(x,B(y))^k$	$g(n,m,k) = \sum_{r=0}^{m} B^{\Delta}(m,r)\,h(n,r,k)$
3	$G(x,y)^k = H(A(x,y))^k$	$g(n,m,k) = \sum_{q=0}^{n+m} A^{\Delta}(n,m,q)\,h(q,k)$
4	$G(x,y)^k = H(A(x,y),y)^k$	$g(n,m,k) = \sum_{q=0}^{n+m} \sum_{r=0}^{m} A^{\Delta}(n,m-r,q)\,h(q,r,k)$
5	$G(x,y)^k = H(x,B(x,y))^k$	$g(n,m,k) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{r=0}^{n+m-q} B^{\Delta}(n-q,m,r)\,h(q,r,k)$
6	$G(x,y)^k = H(A(x),B(y))^k$	$g(n,m,k) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{r=0}^{m} A^{\Delta}(n,q)B^{\Delta}(m,r)\,h(q,r,k)$
7	$G(x)^k = H(x,B(x))^k$	$g(n,k) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-q} B^{\Delta}(n-q,r)\,h(q,r,k)$

Для выполнения композиции $G(x,y) = H(A(x,y),y)$ необходимо, чтобы выполнялось следующее условие для внутренней функции: $A(0,0) = 0$. Поскольку в разработанной базе знаний содержится информация о большом количестве производящих функций двух переменных, имеющих свободный член (т. е. $A(0,0) \neq 0$), то для выполнения требуемого условия можно воспользоваться следующими способами:

1) домножить производящую функцию на переменную в виде монома $x^a y^b$, где $a,b \in \Gamma$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$;

2) вычесть из производящей функции свободный член $A(0,0)$.

Например, производящую функцию двух переменных

$$G(x,y)=\frac{xy-1}{xy+x^2+x-1},$$

у которой свободный член не равен нулю, можно представить как

$$G(x,y)=\frac{1}{1-\frac{x+x^2}{1-xy}}=H(A(x,y)),$$

где

$$H(x)=\frac{1}{1-x},\quad A(x,y)=\frac{x+x^2}{1-xy}.$$

В базе знаний формируем запрос по производящей функции

$$U(x,y)=\frac{1+x}{1-y}.$$

Получаем пирамиду под номером 17 (рис. 1).

Generating function:	$U_{17}(x,y)=\frac{1+x}{1-y}$
Formula:	$T_{17}(n,m,k)=\binom{k}{n}\binom{m+k-1}{m}$
Data:	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Рис. 1. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 17

Fig. 1. Information from the knowledge base about the pyramid with number 17

Тогда для коэффициентов *k*-й степени производящей функции $xU(x,y)=x\frac{1+x}{1-y}$ будет верна формула

$$T_{17}(n-k,m,k)=\binom{k}{n-k}\binom{m+k-1}{m}.$$

Далее выполним умножение переменной y на x, т. е. рассмотрим случай $A(x,y) = xU(x,xy)$, получим

$$A^{\Delta}(n,m,k) = T_{17}(n-m-k,m,k) = \binom{k}{n-k}\binom{m+k-1}{m}.$$

На основании правила под номером 3 из табл. 1 при $k = 1$ находим

$$g(n,m) = \sum_{k=0}^{n+m} A^{\Delta}(n,m,k) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k}{n-m-k}\binom{m+k-1}{m}.$$

Таким образом, получили явное выражение для числового треугольника последовательности A055830 из OEIS [1], описывающей класс путей на решетке [8].

2. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЗАИМНОЙ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим решение второй задачи, направленной на получение явных выражений для коэффициентов взаимной производящей функции двух переменных и их степеней.

Пусть задана производящая функция вида

$$G(x,y) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x^2 y + 2\sqrt{1-4x}\cdot x^2 y}}{2x^2 y},$$

тогда взаимной производящей функцией к ней будет являться производящая функция вида

$$A(x,y) = \frac{1}{G(x,y)}.$$

Для получения явного выражения для коэффициентов взаимной производящей функции с использованием разработанной базы знаний, разложим данную производящую функцию $G(x,y)$ в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и $y = 0$. В результате получим следующую матрицу значений коэффициентов данного разложения:

$$\begin{aligned}
&1\\
&+(1+y+\cdots)x\\
&+(2+2y+2y^2+\cdots)x^2\\
&+(5+5y+6y^2+5y^3+\cdots)x^3\\
&+(14+14y+18y^2+20y^3+14y^4+\cdots)x^4+\cdots
\end{aligned}$$

Заметим, что данная функция описывает треугольник, где $G(0,0)=1$. Представим данную функцию как $H\left(x,\ \dfrac{y}{x}\right)$. Используя базу знаний, можно получить соответствующую данному разложению производящую функцию и матричное представление в виде пирамиды под номером 69 (рис. 2).

Generating function:	$U_{69}(x,y)=\frac{x-\sqrt{x^2-2\,x\,y+2\,\sqrt{1-4\,x\,x\,y}}}{2\,x\,y}$						
Formula:	$T_{69}(n,m,k)=\frac{k\binom{2\,m+k-1}{m}\binom{2\,n+m+k-1}{n}}{n+m+k}$						
Data:	1	1	2	5	14	42	132
	1	2	6	20	70	252	924
	2	5	18	70	280	1134	4620
	5	14	56	240	1050	4620	20328
	14	42	180	825	3850	18018	84084
	42	132	594	2860	14014	68796	336336
	132	429	2002	10010	50960	259896	1319472

Рис. 2. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 69

Fig. 2. Information from the knowledge base about the pyramid with number 69

Тогда для исходной производящей функции будет верно выражение

$$G(x,y)=\sum_n\sum_m T_{69}(n-m,m,k)x^n y^m .$$

Для получения явного выражения для коэффициентов взаимной производящей функции можно воспользоваться следующей формулой [9]:

$$T_r(n,m,k)=\sum_{j=0}^{m+n} T(0,0,1)^{-j-k}(-1)^j\binom{j+k-1}{j}T(n,m,j)\binom{k+m+n}{m+n-j},$$

где $T(n,m,k)$ – матрица значений для исходной производящей функции при условии, что $T(0,0,0)=1$ и $T(n,m,0)=0$.

Запишем для исходной функции

$$T(n,m,k)=T_{69}(n-m,m,k)=\frac{k}{n+k}\binom{2m+k-1}{m}\binom{2n+k-1}{n-m}.$$

Тогда явное выражение для коэффициентов взаимной производящей функции будет определяться как

$$T_r(n,m,k)=\sum_{j=0}^{m+n}(-1)^j\binom{j+k-1}{j}\frac{j}{n+j}\binom{2m+j-1}{m}\binom{2n+j-1}{n-m}\binom{k+m+n}{m+n-j}.$$

3. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим решение третьей задачи, направленной на получение явных выражений для коэффициентов обратной производящей функции двух переменных и их степеней.

Пусть задана производящая функция вида

$$G(x,y)=\frac{x}{1-x-x^2(1+y)}\,.$$

Найдем коэффициенты разложения обратной производящей функции $A(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$G(A(x,y),y)=x\,.$$

Введем производящую функцию вида $G(x,y)=xG_x(x,y)$, тогда уравнение примет вид

$$A(x,y)=\frac{x}{G_x(A(x,y),y)}\,.$$

Теперь выполним подстановку $A(x,y)=xA_x(x,y)$, получим

$$A_x(x,y)=\frac{1}{G_x(xA_x(x,y),y)}\,.$$

В данном случае обратную производящую функцию можно найти через использование взаимной производящей функции

$$G_r(x,y)=1-x-x^2(1+y)=(1-x(1+x+xy)\,.$$

Далее для производящей функции $F(x,y)=(1+x+xy)$ найдем представление в виде пирамиды под номером 37 (рис. 3):

$$T_r(n,m,k)=\sum_{i=0}^{n+m}T_{37}(n-i,m,i)\binom{k}{i}(-1)^i=\sum_{i=0}^{n+m}\binom{i}{n-i}\binom{n-i}{m}\binom{k}{i}(-1)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n-i}\binom{n-i}{m}\binom{k}{i}(-1)^i\,.$$

Тогда коэффициенты для $A_x(x,y)^k$ будут равны

$$T_{A_x}(n,m,k)=\frac{k}{n+k}T_r(n,m,n+k)=\frac{k}{n+k}\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n-i}\binom{n-i}{m}\binom{k+n}{i}(-1)^i\,.$$

Generating function:	$U_{37}(x,y) = 1 + x + x\,y$
Formula:	$T_{37}(n,m,k) = \binom{k}{n}\binom{n}{m}$
Data:	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Рис. 3. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 37

Fig. 3. Information from the knowledge base about the pyramid with number 37

4. ПОЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ИХ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим решение шестой задачи, направленной на получение производящих функций для явных выражений, описывающих их коэффициенты. Данная задача является обратной предыдущим, т. е. по виду функции коэффициентов производящей функции требуется определить выражение для производящей функции.

Пусть задано явное выражение вида

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m-k+2}{k}\binom{n+m-k}{n}.$$

Выполним ряд преобразований с целью получить одну из композиционных формул, представленных в [7], получим

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m-k+2}{k}\binom{m-k+n}{n}.$$

Далее заменим порядок суммирования с k на $m-k$, тогда

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k+2}{m-k}\binom{k+n}{n}.$$

Также с учетом преобразований индекса k получим

$$\sum_{k=n}^{n+m}\binom{k+2}{n+m-k}\binom{k}{n}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n+m} \binom{k+2}{n+m-k} \binom{k}{k-n}.$$

Введем новую переменную $j = n + m - k$ и используем символ Кронекера:

$$\sum_{k=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{m} \delta_{j,n+m-k} \binom{k+2}{j} \binom{-j+n+m}{m-j}.$$

Сравним полученный результат с композиционной формулой

$$g(n,m) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(n,m-j,k) h(k,j).$$

Заметим, что для нашего случая

$$A^{\Delta}(n,m-j,k) = \delta_{j,n+m-k} \binom{-j+n+m}{m-j},$$

откуда

$$A^{\Delta}(n,m,k) = \delta_{k,n+m} \binom{n+m}{m}.$$

Используя базу знаний, найдем пирамиду под номером 1, производящей функцией которой является $(x+y)$.

Далее найдем производящую функцию для

$$h(n,m) = \binom{n+2}{m}.$$

Используя базу знаний, найдем пирамиду под номером 42 (рис. 4).

Generating function:	$U_{42}(x,y) = \frac{(1+y)^2}{1-x(1+y)}$						
Formula:	$T_{42}(n,m,k) = \binom{n+k-1}{n}\binom{n+2k}{m}$						
Data:	1	2	1	0	0	0	0
	1	3	3	1	0	0	0
	1	4	6	4	1	0	0
	1	5	10	10	5	1	0
	1	6	15	20	15	6	1
	1	7	21	35	35	21	7
	1	8	28	56	70	56	28

Рис. 4. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 42

Fig. 4. Information from the knowledge base about the pyramid with number 42

Откуда искомая производящая функция будет равна

$$A(x,y)=U_{42}(x+y,y)=\frac{(1+y)^2}{1-(x+y)(1+y)}.$$

5. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим решение седьмой задачи, направленной на получение явных выражений для коэффициентов логарифмических производных производящих функций.

1. Пусть дано функциональное уравнение вида

$$A(x,y)=G(xA(x,y),y)$$

и известно явное выражение коэффициентов k-й степени производящей функции $G(x,y)$

$$T_G(n,m,k)=[x^n y^m]G(x,y)^k,$$

тогда коэффициенты логарифмической частной производной производящей функции $A(x,y)$ по x будут выражаться через коэффициенты $T_G(n,m,k)$:

$$T_{lx}(n,m)=[x^n y^m]\frac{1}{A(x,y)}\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}=T_G(n,m,n).$$

2. Пусть дано функциональное уравнение вида

$$A(x,y)=G(x,yA(x,y))$$

и известно явное выражение коэффициентов k-й степени производящей функции $G(x,y)$

$$T_G(n,m,k)=[x^n y^m]G(x,y)^k,$$

тогда коэффициенты логарифмической частной производной производящей функции $A(x,y)$ по y будут выражаться через коэффициенты $T_G(n,m,k)$:

$$T_{ly}(n,m)=[x^n y^m]\frac{1}{A(x,y)}\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}=T_G(n,m,m).$$

В качестве примера найдем коэффициенты логарифмической производной производящей функции $U_{139}(x,y)$. Соответствующий ей фрейм в базе знаний показан на рис. 5.

Generating function:	$U_{139}(x,y) = \frac{1-2x-y-\sqrt{1-4x-(2-4x)y+y^2}}{2x^2}$						
Formula:	$T_{139}(n,m,k) = \frac{k\binom{n+m+k}{m}\binom{2n+2k}{n}}{n+m+k}$						
Data:	1	1	1	1	1	1	1
	2	4	6	8	10	12	14
	5	15	30	50	75	105	140
	14	56	140	280	490	784	1176
	42	210	630	1470	2940	5292	8820
	132	792	2772	7392	16632	33264	60984
	429	3003	12012	36036	90090	198198	396396

Right on y:	UU0138(x,y)
Left on x:	UU0059(x,y)
Left on y:	UU0060(x,y)
Change x y:	UU0359(x,y)

Рис. 5. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 139

Fig. 5. Information from the knowledge base about the pyramid with number 139

Далее необходимо перейти по связанной ссылке на фрейм в базе знаний с информацией о пирамиде под номером 59 и получить явное выражение для коэффициентов *k*-й степени производящей функции $U_{59}(x,y)$

$$T_{59}(n,m,k) = \frac{k\binom{2k}{n}\binom{k+m}{m}}{k+m}.$$

Для искомой логарифмической производной получим

$$G(x,y) = \frac{1}{A(x,y)}\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = 1-2x^2 - \frac{2x^2}{U(x,y)} + \frac{x^2(4-4y)}{2U(x,y)\sqrt{1-4x-(2-4x)y+y^2}},$$

где

$$U(x,y) = 1-2x-y-\sqrt{1-4x-(2-4x)y+y^2}.$$

Тогда коэффициенты будут иметь следующее явное выражение:

$$g(n,m) = T_{59}(n,m,n) = \frac{n\binom{2n}{n}\binom{m+n}{m}}{m+n} = \binom{2n}{n}\binom{n+m-1}{m}.$$

6. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ГЕНЕРАЦИИ ДЛЯ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ЧИСЛАМИ НАРАЯНЫ

Рассмотрим классические числа Нараяны, заданные следующей производящей функцией двух переменных [10]:

$$F_N(x,y)=\frac{1-x-xy-\sqrt{1-2x+x^2+(-2x-2x^2)y+x^2y^2}}{2x}.$$

В базе знаний пирамида, соответствующая данной производящей функции в виде $\frac{F_N(x,y)}{xy}$, находится под номером 25 (рис. 6). Подробное исследование этого обобщения представлено в работе [11].

Generating function:	$U_{25}(x,y)=\frac{1-x-xy-\sqrt{1-2x+x^2+(-2x-2x^2)y+x^2y^2}}{2x^2y}$
Formula:	$T_{25}(n,m,k)=\frac{k\binom{n+k}{m}\binom{n+k}{n-m}}{n+k}$

Data:	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0
	1	3	1	0	0	0	0
	1	6	6	1	0	0	0
	1	10	20	10	1	0	0
	1	15	50	50	15	1	0
	1	21	105	175	105	21	1

Рис. 6. Информация из базы знаний о пирамиде под номером 25

Fig. 6. Information from the knowledge base about the pyramid with number 25

Тогда коэффициенты k-й степени производящей функции будут определяться выражением

$$F^{\Delta}(n,m,k)=[x^ny^m]F_N(x,y)^k=T_{25}(n-k,m-k,k)=\frac{k}{n}\binom{n}{m-k}\binom{n}{m}.$$

Рассмотрим комбинаторную интерпретацию обобщенных чисел Нараяны. Заметим, что

$$xU_{25}(x,1)=\frac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x}=\sum_{n\geqslant 1}C_nx^n,$$

где C_n – числа Каталана. Тогда

$$\sum_{m=1}^{n}N(n,m)=C_n.$$

Это означает, что числа Нараяны описывают классы подмножеств для комбинаторных множеств, определяемых числами Каталана. Известно более

200 комбинаторных множеств, определяемых числами Каталана [12]. Это классы перестановок и путей Дика, двоичные деревья, полные двоичные деревья, распределение скобок, множество триангуляций треугольников и т. д. Одна из комбинаторных интерпретаций для чисел Нараяны – это множество путей Дика длиной n, у которых имеется m пиков [13].

В общем случае для вычисления коэффициентов $F_N(x,y)^k$ можно воспользоваться прямым способом вычисления, основанным на формуле

$$F^{\Delta}(n,m,k)=\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_k=n}\left(\sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_k=m}\left(\prod_{i=1}^{k} f(\lambda_i,\mu_i)\right)\right),$$

где $\lambda_i>0$ и $\mu_k>0$. Здесь суммирование ведется по всем композициям чисел n и m. Это имеет большую вычислительную сложность, с другой стороны, дает комбинаторную интерпретацию для множеств, описываемых обобщенными числами Нараяны. Это все k-кортежи из элементов множеств, описываемых числами Нараяны. Например, если это пути Дика длиной n и числом пиков m, то $F^{\Delta}(n,m,k)$ описывает пути, которые образованы из k путей Дика общей длиной n и общим числом пиков m. Число множеств, определяемых обобщенными числами Нараяны, многократно возрастает, если элементы кортежа будут соответствовать разным комбинаторным множествам, определяемым числами Нараяны. Для обобщенных чисел Нараяны существует рекуррентное соотношение следующего вида [11]:

$$F^{\Delta}(n,m,k)=$$

$$=F^{\Delta}(n-1,m-1,k-1)+F^{\Delta}(n,m-1,k)+F^{\Delta}(n-1,m-1,k)+F^{\Delta}(n-1,m,k+1).$$

Откуда, имея явную формулу для $T_{25}(n,m,k)$ (рис. 6) и данную рекуррентную формулу, можно построить эффективные алгоритмы комбинаторной генерации для множеств, определяемых числами Нараяны [14, 15]. Для построения алгоритмов комбинаторной генерации необходимо по рекуррентной формуле построить схему рекурсивной композиции деревьев И/ИЛИ [16]. Анализируя приведенную выше формулу, в которой нет мономов с операцией умножения, получим схему в которой нет И-узлов (рис. 7).

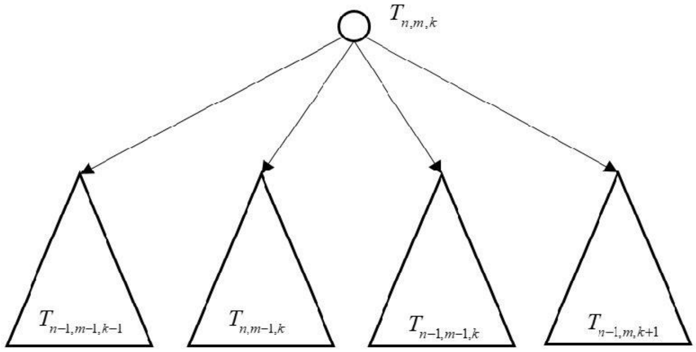

Рис. 7. Схема рекурсивной композиции деревьев И/ИЛИ

Fig. 7. Recursive composition of AND/OR trees

Правила построения комбинаторного объекта по рекуррентной формуле следующие.

1. Пусть объект описывается параметрами $(n-1, m-1, k-1)$ и $k-1$ означает число элементов в кортеже. Тогда в кортеж добавляется новый объект с параметрами $(1,1)$.

2. Пусть объект описывается параметрами $(n, m-1, k)$ и k означает число элементов в кортеже. Тогда заданный элемент кортежа изменяется так, что его $N(i, j)$ становится $N(i, j+1)$.

3. Пусть объект описывается параметрами $(n-1, m-1, k)$ и k означает число элементов в кортеже. Тогда заданный элемент кортежа изменяется так, что его $N(i, j)$ становится $N(i+1, j+1)$.

4. Пусть объект описывается параметрами $(n-1, m, k+1)$ и $k+1$ означает число элементов в кортеже. Тогда два элемента кортежа объединяются с добавлением одно узла.

Рассмотрим алгоритм генерации скобочной структуры, определяемой обобщенными числами Нараяны, представленный в виде псевдокода. Алгоритм GenGenerNarayna имеет входные параметры:

– *num* – номер скобочной структуры, изменяется от нуля до $F^{\Delta}(n, m, k) - 1$;

– n – число пар скобок ();

– m – число скобочных подструктур, заключенных в скобки (str), где str – любая правильная запись скобок, в том числе и пустая;

– k – число элементов в кортеже.

Алгоритм GenGenerNarayna носит рекурсивную структуру, а генерируемая скобочная структура представлена двойным списком $s = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$, где s_i содержит правильную скобочную структуру, определяемую числами Нараяны. Операция + означает добавление скобки или пары скобок в список s_i.

Алгоритм GenGenerNarayna для генерации множеств, определяемых обобщенными числами Нараяны:

```
algorithm GenGenerNarayna(num, n, m, k)
begin
    if n < k or m < k or k < 0 or n < m then return []
    if n = 1 and k = 1 then return [()]
    if num < F^Δ(n-1, m-1, k-1)
    then
        {совершаем рекурсивный спуск для первого левого «сына»}
        s := GenGenerNarayna(num, n-1, m-1, k-1)
        {добавляем новый элемент кортежа}
        s := s + [()]
        return s
    end
    num := num - F^Δ(n-1, m-1, k-1)
    if num < F^Δ(n, m-1, k)
    then
```

```
            {совершаем рекурсивный спуск для второго левого «сына»}
            s := GenGenerNarayna(num, n, m−1, k)
            {добавляем скобки в нулевой элемент кортежа}
            s_0 := s_0 + ()
            return s
        end
        num := num − F^Δ(n, m−1, k)
        if num < F^Δ(n−1, m−1, k)
        then
            {совершаем рекурсивный спуск для третьего левого «сына»}
            s := GenGenerNarayna(num, n−1, m−1, k)
            {добавляем скобки в нулевой элемент кортежа}
            s_0 := (+s_0+)
            return s
        end
        num := num − F^Δ(n−1, m−1, k)
        if num < F^Δ(n−1, m, k+1)
        then
            {совершаем рекурсивный спуск для четвертого левого «сына»}
            s := GenGenerNarayna(num, n−1, m, k+1)
            {добавляем скобки в первый элемент кортежа}
            s_1 := (+s_1+)
            {объединяем нулевой и первый элементы кортежа}
            s_0 := s_0 + s_1
            {удаляем первый элемент кортежа}
            delete s_1
            return s
        end
    end
```

В табл. 2 представлен пример работы алгоритма GenGenerNarayna для параметров $n=4$, $m=3$, $k=2$. Заметим, что если символ « (» заменить на u (это будет обозначать шаг вверх по диагонали), а символ «) » заменить на d (это будет обозначать шаг вниз по диагонали), то получим соответствующие пути Дика.

Таблица 2

Table 2

Пример работы алгоритма GenGenerNarayna для $n=4$, $m=3$, $k=2$

An example of using the GenGenerNarayna algorithm for $n=4$, $m=3$, $k=2$

num	Скобочная структура	Путь Дика
0	[()][(())()]	[ud][uuddud]
1	[()][(()())]	[ud][uududd]
2	[()][()(())]	[ud][uduudd]

Окончание табл. 2

End of Tab. 2

num	Скобочная структура	Путь Дика
3	[()()][(())]	[udud][uudd]
4	[(())()][()]	[uuddud][ud]
5	[(())][()()]	[uudd][udud]
6	[(()())][()]	[uududd][ud]
7	[()(())][()]	[uduudd][ud]

Рассмотрим вычислительную сложность данного алгоритма. Поскольку в дереве И/ИЛИ нет И-узлов, то генерация одного элемента комбинаторного множества, описываемого обобщенными числами Нараяны, будет кратна следу в дереве. Число узлов в следе не превышает числа n, этот вывод делается на основании того, что n – это число элементарных объектов, из которых строится комбинаторный объект (скобочная структура или путь Дика). Поэтому вычислительная сложность алгоритма будет линейной $O(n)$. Для подсчета числа узлов можно воспользоваться следующим соотношением, основанным на рекуррентной формуле для $F^{\Delta}(n,m,k)$:

$$V(n,m,k)=1+V(n-1,m-1,k-1)+$$
$$+V(n,m-1,k)+V(n-1,m-1,k)+V(n-1,m,k+1).$$

Численные эксперименты показали, что

$$\frac{V(n,m,k)}{F^{\Delta}(n,m,k)}\leqslant n\ .$$

Алгоритм ранжирования также строится на основе рекурсивной композиции деревьев И/ИЛИ и имеет такую же вычислительную сложность.

ВЫВОДЫ

Предложенная методика использования базы знаний производящих функций двух переменных позволяет решать широкий круг задач оперирования производящими функциями двух переменных и их коэффициентами. Использование базы знаний обеспечивает построение алгоритмов комбинаторной генерации для более сложных комбинаторных объектов, определяемых производящими функциями многих переменных. Все полученные формулы и алгоритмы являются новыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences // Notices of the American Mathematical Society. – 2018. – Vol. 65, N 9. – P. 1063–1074. – DOI: 10.1090/noti1734.

2. The combinatorial object server: website. – URL: http://combos.org (accessed: 28.02.2022).

3. *Srivastava H.M., Manocha H.L.* A treatise on generating functions. – USA: Ellis Horwood Limited, 1984. – 569 p.

4. *Wilf H.S.* Generatingfunctionology. – 2nd ed. – Boston: Academic Press, 1994. – 228 p.

5. *Kruchinin V.V., Kruchinin D.V.* Composita and its properties // Journal of Analysis and Number Theory. – 2014. – Vol. 2, N 2. – P. 37–44. – DOI: 10.12785/jant/020202.

6. *Kruchinin D.V., Kruchinin V.V.* Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 404, N 1. – P. 161–171. – DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.009.

7. *Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y.* Method for obtaining coefficients of powers of bivariate generating functions // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, N 4. – Art. 428. – DOI: 10.3390/math9040428.

8. *Kimberling C.* Path-counting and Fibonacci numbers // Fibonacci Quarterly. – 2002. – Vol. 40, N 4. – P. 328–338.

9. *Kruchinin D.V., Kruchinin V.V.* Explicit formula for reciprocal generating function and its application // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). – 2019. – Vol. 29, N 3. – P. 365–372. – DOI: 10.17777/ascm2019.29.3.365.

10. *Stanley R.P.* Enumerative combinatorics. Vol. 2. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 595 p.

11. *Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y.* On some properties of generalized Narayana numbers // Quaestiones Mathematicae. – 2021. – DOI: 10.2989/16073606.2021.1980448.

12. *Stanley R.P.* Catalan numbers. – Cambridge: Cambridge University Press, 2015. – 215 p.

13. *Petersen T.K.* Eulerian numbers. – New York: Birkhäuser, 2015. – 463 p.

14. *Kreher D.L., Stinson D.R.* Combinatorial algorithms: Generation, enumeration, and search. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. – 329 p.

15. *Ruskey F.* Combinatorial generation. Working version (1j-CSC 425/520). – 2003. – 311 p. – URL: http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/SemWS17-18/Ruskey-Comb-Gen.pdf (accessed: 28.02.2022).

16. *Кручинин В.В.* Представление множеств деревьями И/ИЛИ // Доклады ТУСУР. – 2008. – Т. 1, № 17. – С. 107–112.

Кручинин Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных систем в управлении и проектировании Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – теория производящих функций, теоретические основы математики, системный анализ. Имеет более 100 печатных работ и учебных пособий. E-mail: kruchinindm@gmail.com

Kruchinin Dmitry V., PhD (Phys.&Math.), associate professor, Department of Computer Control and Design Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on the theory of generating functions, computer science and system analysis. He has more than 100 publications and teaching manuals. E-mail: kruchinindm@gmail.com

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-121-139

Methodology for using the knowledge base of generating two-variable functions *

D.V. KRUCHININ

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40 Lenina Prospekt, Tomsk, 634050, Russian Federation

kruuchinindm@gmail.com

Abstract

Mathematical knowledge bases are the development of classical mathematical reference books and encyclopedias, which, in turn, makes them an important tool for conducting various research in mathematical sciences and related fields. At present, there are various knowledge bases of mathematical objects. In this paper, we consider the knowledge base of the generating functions of two variables, which allows us to operate with multivariate objects. The relevance and significance of the work lies in solving various problems related to the mathematical apparatus of generating functions.

In the paper we consider the use of the knowledge base of generating functions of two variables for solving problems of operating generating functions and obtaining coefficients for composition, reciprocal and compositional inverse generating functions of two variables and their powers, as well as obtaining explicit expressions for the coefficients of logarithmic derivatives of the generating functions. In addition, an inverse problem is considered aimed at obtaining generating functions for explicit expressions describing their coefficients.

The use of the knowledge base of generating two-variable functions contributes to the process of constructing combinatorial generation algorithms for combinatorial objects defined by generating functions of many variables. As an example, the construction of combinatorial generation algorithms for sets defined by the generalized Narayana numbers is shown. The Narayana numbers describe classes of subsets for combinatorial sets defined by the Catalan numbers. In this paper, one of the combinatorial interpretations for the Narayana numbers is chosen - the set of the Dyck paths of length n, which have m peaks.

Keywords: knowledge base, generating functions in two variables, composition, explicit expressions, pyramids, Catalan numbers, Narayana numbers, combinatorial generation

REFERENCES

1. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences. *Notices of the American Mathematical Society*, 2018, vol. 65, no. 9, pp. 1063–1074. DOI: 10.1090/noti1734.

2. The combinatorial object server: website. Available at: http://combos.org (accessed 28.02.2022).

3. Srivastava H.M., Manocha H.L. *A treatise on generating functions*. USA, Ellis Horwood Limited, 1984. 569 p.

4. Wilf H.S. *Generatingfunctionology.* 2nd ed. Boston, Academic Press, 1994. 228 p.

5. Kruchinin V.V., Kruchinin D.V. Composita and its properties. *Journal of Analysis and Number Theory*, 2014, vol. 2, no. 2, pp. 37–44. DOI: 10.12785/jant/020202.

6. Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 404, no. 1, pp. 161–171. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.009.

* *Received 17 November 2021.*

7. Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y. Method for obtaining coefficients of powers of bivariate generating functions. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 4, art. 428. DOI: 10.3390/math9040428.

8. Kimberling C. Path-counting and Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, 2002, vol. 40, no. 4, pp. 328–338.

9. Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. Explicit formula for reciprocal generating function and its application. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, 2019, vol. 29, no. 3, pp. 365–372. DOI: 10.17777/ascm2019.29.3.365.

10. Stanley R.P. *Enumerative combinatorics.* Vol. 2. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 595 p.

11. Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y. On some properties of generalized Narayana numbers. *Quaestiones Mathematicae*, 2021. DOI: 10.2989/16073606.2021.1980448.

12. Stanley R.P. *Catalan numbers*. Cambridge, Cambridge University Press, 2015. 215 p.

13. Petersen T.K. *Eulerian numbers*. New York, Birkhäuser, 2015. 463 p.

14. Kreher D.L., Stinson D.R. *Combinatorial algorithms: Generation, enumeration, and search*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1999. 329 p.

15. Ruskey F. *Combinatorial generation*. Working version (1j-CSC 425/520). 2003. 311 p. Available at: http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/SemWS17-18/Ruskey-Comb-Gen.pdf (accessed 28.02.2022).

16. Kruchinin V.V. Predstavlenie mnozhestv derev'yami I/ILI [Presentation of set by meant of tree AND/OR]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of TUSUR University*, 2008, vol. 1, no. 17, pp. 107–112.

Для цитирования:

Кручинин Д.В. Методика использования базы знаний производящих функций двух переменных // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 1 (85). – С. 121–139. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-121-139.

For citation:

Kruchinin D.V. Metodika ispol'zovaniya bazy znanii proizvodyashchikh funktsii dvukh peremennykh [Methodology for using the knowledge base of generating two-variable functions]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 1 (85), pp. 121–139. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-121-139.