

Оптимальный гироскопический стабилизатор многомерной вибрационной системы*

А.В. ЧЕХОНАДСКИХ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет

chekhonadskikh@corp.nstu.ru

В работе изучается проблема стабилизации многомерной вибрационной системы с помощью гироскопического стабилизатора. Вибрационная система задается дифференциальным уравнением второго порядка с симметрическими матричными коэффициентами: положительно определенной матрицей жесткости и неопределенной матрицей потерь; в общем случае такая система неустойчива. Для нее требуется найти оптимальный гироскопический стабилизатор, заданный косимметрическим матричным коэффициентом в слагаемом скоростей. Выбор такого типа управления диктуется стремлением избежать дополнительных вибраций, вызванных трением; его особенностью является пониженный порядок регулятора, независимо от размерности системы и числа настраиваемых параметров. Целью работы является выяснение важнейших свойств множества гироскопических стабилизаторов. Оно описывается системой полиномиальных уравнений, в регулярном случае ясна размерность многообразия общего решения и возможно численное нахождение некоторых его точек. Мы начинаем с размерности 3, что приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка и далее к системе пяти полиномиальных уравнений с шестью неизвестными. Его общее решение оказывается одномерным алгебраическим многообразием, представленным в виде таблицы. Второй пример имеет размерность 5, ему соответствует система дифференциальных уравнений десятого порядка и девяти полиномиальных уравнений относительно 15 неизвестных. Размерность многообразия решений равна шести; мы находим одномерное подмногообразие и некоторые особые точки. Главной трудностью оказывается расходимость численных расчетов вблизи кратных полюсов замкнутой системы. Одной из важных закономерностей, проявившихся в обоих примерах, стало отсутствие других полюсов, кроме комплексно сопряженных и изредка – кратных действительных. Тем самым почти все решения для оптимального гироскопического стабилизатора складываются из сравнительно быстро гаснущих колебаний. В обоих примерах многообразие решений состоит в основном из простых полюсов и позволяет выбрать стабилизатор, не создающий резонансных эффектов.

Ключевые слова: линейная стационарная система, система управления, колебательная система, управление пониженного порядка, гироскопическая стабилизация, оптимальный стабилизатор

* Статья получена 30 ноября 2021 г.

ВВЕДЕНИЕ

Многомерная вибрационная система описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\ddot{X} + D\dot{X} + KX = 0,$$

где $X(t)$ – это n -мерный вектор переменных состояния; $D = D^T$ – неопределенная матрица демпфирования, а $K = K^T$ – положительно определенная матрица жесткости ($D, K \in \mathbf{R}_{n \times n}$).

В изложении проблемы мы будем следовать профессору Т. Дамму [1, 2]. В общем случае вибрационные системы неустойчивы, но если матрица D также положительно определена, то система асимптотически устойчива. Гироскопическая стабилизация предполагает достижение или повышение устойчивости системы за счет добавления гироскопических сил $G\dot{X}$ с некоторой кососимметрической матрицей $G = -G^T$ без увеличения диссипации энергии или трения (см., напр., [3]). Причиной такой специфики является эффект «отрицательного трения» (negative damping) в моделях с вибрациями, вызванными трением (slip-sliding vibrations, [4–6]). Такое явление хорошо известно благодаря смычковым струнным инструментам, тибетским «поющим чашам» или эффекту, о котором Галилео Галилей еще в 1638 году сказал, что «стакан с водой может быть устроен так, чтобы издавать тон лишь трением кончика пальца о край стекла», а Бенджамин Франклин в 1761 году разработал «армонику», где звук производился вибрацией вращающихся стеклянных бокалов при касании их увлажненными пальцами исполнителя [7, 8]; настройка на нужный тон могла корректироваться наполненностью бокалов.

Назовем матрицу $G = -G^T \in \mathbf{R}_{n \times n}$ *гироскопическим стабилизатором* вибрационной системы, если решение X уравнения

$$\ddot{X} + (D + G)\dot{X} + KX = 0$$

асимптотически устойчиво. В этом случае система *гироскопически стабилизируема*.

Необходимое условие гироскопической стабилизации хорошо известно: оба следа матриц D и $K^{-1}D$ должны быть положительны, короткое доказательство приведено в [1].

В [5] поставлена проблема, является ли это условие также достаточным. Для размерности $n = 2$ авторы [5] доказывают это с использованием матричного метода Ляпунова, а при $n > 2$ гироскопическая стабилизируемость системы показана только при некоторых дополнительных условиях. Достаточность вышеприведенного условия в случаях $n = 3, 4$ показана в [1] с использованием техники обратных собственных векторов; для размерностей $n > 4$ гипотеза достаточности проверена на большом числе примеров.

В своей лекции о гироскопической стабилизации (Lehrstuhl für Angewandte Mathematik, Universität Bayreuth, Würzburg, June 1, 2012) Т. Дамм сформулировал ряд проблем, в том числе и строгое доказательство достаточности необходимых условий гироскопической стабилизации при $n > 4$.

Переходя от дифференциальных уравнений вибрационной системы к Лапласовой операторной форме, мы получим матричное полиномиальное уравнение

$$L(s)\hat{X} = (Es^2 + (D + G)s + K)\hat{X} = 0.$$

Все свойства входящих в него матриц указаны выше, \hat{X} – это Лапласово изображение вектора состояний $X(t)$. Теперь характеристическое уравнение принимает вид

$$F(s) = \det(Es^2 + (D + G)s + K) = 0.$$

Полюса системы z_1, \dots, z_{2n} – это корни характеристического многочлена. Коэффициенты характеристического многочлена $F(s)$; коэффициенты последнего зависят от параметров регулятора, т. е. в нашем случае от элементов матричного стабилизатора G . В свою очередь, от попадания полюсов системы в левую комплексную полуплоскость зависит важнейшее свойство системы управления – устойчивость, а от их расположения – количественная характеристика устойчивости (так называемая степень устойчивости); противоположную ей величину $H(G) = \max \operatorname{Re}(z_1, \dots, z_{2n})$ будем называть Гурвицевой функцией.

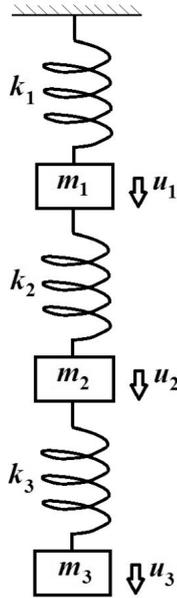
Поскольку матрицы D, K заданы и фиксированы, функция $H(G)$ зависит от элементов стабилизатора. Достижение отрицательных значений функцией $H(G)$ означает стабилизацию системы, а достижение глобального минимума – нахождение оптимального стабилизатора.

Определение. Будем говорить, что регулятор (в том числе стабилизатор) линейной стационарной системы автоматического управления имеет *пониженный порядок*, если число его настраиваемых параметров или способ их вхождения в характеристический многочлен не позволяют достигать произвольного расположения полюсов замкнутой системы.

Заметим, что произвольное расположение полюсов предполагает разбиение их множества на комплексно сопряженные пары, а настраиваемые параметры при поиске стабилизирующего управления оказываются не столько свободными переменными, сколько неизвестными, нахождение которых становится возможным благодаря требованиям к расположению полюсов (или обеспечиваемым этим расположением свойствами замкнутой системы).

В [9–11] задача минимизации Гурвицевой функции решалась для управляемого объекта, состоящего из трех массивных тел с упругими соединениями (рис. 1), близкого к вышеприведенной вибрационной системе размерности $n = 3$. Число параметров уступало степени характеристического многочлена и заведомо не позволяло добиваться произвольного расположения полюсов; сама же система задается уравнениями того же типа, что и вышеприведенная вибрационная система размерности $n = 3$.

Ее особенностью в [9–11] была упругая связь первого тела с неподвижным подвесом, отсутствие которого равносильно условию нулевой жесткости $k_1 = 0$. А матричное уравнение имеет вид, к которому выбором базиса приводится и вибрационная система:



Трехмассовый объект,
управляемый силами
 u_{1-3}

A three-mass plant controlled by forces u_{1-3}

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Если число параметров совпадает со степенью многочлена и структура регулятора обеспечивает возможность произвольного задания полюсов системы, то задача относится к синтезу *полного порядка*; для двухмассовых систем она рассматривалась в работах [12, 13]. В ряде случаев дополнительные требования к свойствам переходных процессов выполняются за счет усложнения структуры регулятора и увеличения числа его настраиваемых параметров. В этом случае говорят даже о регуляторе повышенного порядка.

Как мы увидим, число параметров гироскопического стабилизатора вибрационной системы не уступает степени характеристического многочлена, начиная с размерности $n = 5$. При этом, однако, их вхождение в коэффициенты многочлена не позволяет влиять

на пару старших и пару младших из них.

Если система стабилизируема и как минимум один стабилизирующий гироскопический регулятор существует, то большее число параметров в случаях $n \geq 3$ может обеспечить сразу бесконечное множество решений, а точнее, многообразие ненулевой размерности.

Расположение полюсов характеризуется так называемым корневым многочленом $R(s)$ [14], в который мы явно включаем полюса z_1, \dots, z_{2n} .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Зададим матричное полиномиальное уравнение, описывающее вибрационную систему третьего, а затем пятого порядка, для которых удовлетворяются необходимые условия гироскопической стабилизируемости. Наибольшая степень устойчивости вибрационной системы, которую можно обеспечить с помощью гироскопического стабилизатора, задается следом матрицы D , в этом заключается существенное отличие от ситуации, рассмотренной в [9–11], где она заранее не известна. Будем искать область в пространстве параметров регулирования, где достигается наибольшая степень устойчивости (или, что то же самое, теоретический минимум Гурвицевой функции $\min H(G) = -trD / 2n$). За счет избыточной размерности пространства варьируемых элементов гироскопического регулятора она должна быть бесконечным множеством – многообразием положительной размерности. Способ численного нахождения некоторых точек этого оптимума (т. е. многомерных векторов, включающих как

элементы матрицы стабилизатора, так и мнимые части полюсов системы) несколько отличается от методов, использованных ранее в [9–11, 14], что приводит к более низким степеням неизвестных в полиномиальных уравнениях по сравнению с теми, которые позволяли находить нульмерные множества многократных корней или корней с совпадающей действительной частью. По-видимому, это обеспечивает сходимость численного расчета в большей доле конкретных случаев.

Систему второго порядка $\ddot{X} + (D + G)\dot{X} + KX = 0$ приведем к нормальной системе первого порядка: $\dot{X} = X_1$; $\dot{X}_1 = -(D + G)X_1 - KX$, или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0)_{n \times n} & E_n \\ -K & -D - G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

2. РАСЧЕТ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СТАБИЛИЗАТОРОВ ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Проиллюстрируем вышесказанное на примерах вибрационных систем, близких к рассмотренным в [9–11].

2.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим трехмерную вибрационную систему с матрицами:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{-1}D = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{pmatrix},$$

Необходимые условия стабилизируемости выполнены, хотя сама система неустойчива: среди комплексных пар ее полюсов есть пара $z_{1,2} \approx 0.3621 \pm 1.2953i$.

Матрица нормальной формы первого порядка замкнутой системы принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & a & b \\ -1 & -2 & -1 & -a & -1 & c \\ 0 & -1 & -2 & -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы имеет степень 6:

$$F(s) = s^6 + s^5 + (a^2 + b^2 + c^2 + 5)s^4 + (-a^2 + b^2 + c^2 + 3)s^3 + \\ + (2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2 + 8)s^2 + 4s + 4;$$

он содержит три полиномиальных коэффициента, включающих также три элемента стабилизатора. Тем самым расчет стабилизатора оказывается задачей синтеза регулятора пониженного порядка.

Поскольку коэффициент при пятой степени равен единице, выполняются равенства $z_1 + \dots + z_6 = -1$ и $\operatorname{Re} z_1 + \dots + \operatorname{Re} z_6 = -1$, а также неравенство $\max \operatorname{Re} z_{1,\dots,6} \geq -1/6$. Таким образом, гипотетический минимум Гурвицевой функции $\min H(G) = \min H(a, b, c) = -1/6$ достигается при условии $\operatorname{Re} z_{1,\dots,6} = -1/6$ для трех комплексных пар (одна или две из которых могут быть кратным действительным корнем). Составим корневой многочлен

$$R(s) = (s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_6) = \\ = \left(s^2 + s/3 + 1/36 + \operatorname{Im}^2 z_{1,2} \right) \left(s^2 + s/3 + 1/36 + \operatorname{Im}^2 z_{3,4} \right) \times \\ \times \left(s^2 + s/3 + 1/36 + \operatorname{Im}^2 z_{5,6} \right) = \\ = \left(s^2 + 1/3s + 1/36 + y_1 \right) \left(s^2 + 1/3s + 1/36 + y_2 \right) \left(s^2 + 1/3s + 1/36 + y_3 \right).$$

Слагаемые $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ удобны вместо мнимых частей неизвестных, поскольку их неположительность допускает иные варианты расположения полюсов: например, равенство $y_1 = 0$ означало бы наличие кратного полюса $z_{1,2} = -1/6$, а неравенство $y_1 < 0$ приводило бы к возникновению пары действительных полюсов $z_{1,2} = -1/6 \pm \sqrt{-y_1}$ и выходу решения из экстремального множества $H(a, b, c) = -1/6$.

Минимум Гурвицевой функции, или, что равносильно, расположение полюсов на вертикали $\operatorname{Re} z_{1,\dots,6} = -1/6$ будем искать, приравняв корневой и характеристический многочлены: $F(s) = R(s)$. Это дает пять уравнений для коэффициентов при степенях от s^4 до $s^0 = 1$ (равенство коэффициентов при s^5 выполняется автоматически):

$$a^2 + b^2 + c^2 - y_1 - y_2 - y_3 + 55/12 = 0; \\ -a^2 + b^2 + c^2 - 2/3(y_1 + y_2 + y_3) + 157/54 = 0; \\ 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc) - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3 - 1/6(y_1 + y_2 + y_3) + 8 - 5/432 = 0; \\ 1/3(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 1/54(y_1 + y_2 + y_3) - 4 + 1/6^4 = 0; \\ y_1 y_2 y_3 + 1/36(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 1/6^4(y_1 + y_2 + y_3) - 4 + 1/6^6 = 0.$$

Наличие пяти уравнений относительно шести неизвестных позволяет выразить пять из них через одно; пусть, например, свободной переменной будет элемент b . Поскольку левые уравнения не меняются при одновременной смене знака у элементов a, b, c , вычисления можно вести только на положительном полуинтервале. Полученное одномерное алгебраическое многообразие показано в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Многообразие элементов экстремального стабилизатора для трехмерной системы

Variety of extreme stabilizer elements for a three-dimensional system

b	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.032	± 2.0329245
a	-0.5698	± 0.5115	± 0.5116	± 0.6243	± 0.8532	± 0.8721	± 0.87263
c	-1.4379	∓ 1.2257	∓ 0.8679	∓ 0.3783	± 0.2894	± 0.3435	± 0.34511
y_1	0.4124	0.4016	0.4016	0.4252	0.5700	0.6481	0.66664
y_2	1.9158	2.4242	2.4221	1.6247	0.8035	0.6866	0.66699
y_3	4.6472	3.7716	3.7745	5.3163	8.0214	8.2561	8.26308

Из последнего столбца видно, что границы интервала $b \approx \pm 2,0329$ обусловлены приближением к кратной комплексной паре полюсов $z_{1-4} \approx -1/6 \pm \sqrt{2/3} \cdot i$, найти которую более точно, задав соответствующий корневой многочлен $R(s) = (s^2 + 1/3s + 1/36 + y_1)^2 (s^2 + 1/3s + 1/36 + y_2)$, не удастся: численный расчет решения системы полиномиальных уравнений расходится.

2.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЯТИМЕРНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

При рассмотрении этого примера будем допускать сокращения в местах, полностью аналогичных трехмерному случаю, и пропуски в значительно более громоздких, чем выше, выражениях. Зададим пятимерную вибрационную систему матрицами:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c & -d \\ a & 0 & -f & -g & -h \\ b & f & 0 & -k & -l \\ c & g & k & 0 & -m \\ d & h & l & m & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{-1}D = \begin{pmatrix} 5/6 & -2/3 & 1/2 & -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 4/3 & -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1/2 & -1 & 3/2 & -1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & -1 & 4/3 & 4/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/2 & -2/3 & -5/3 \end{pmatrix},$$

Необходимые условия стабилизируемости выполнены; все пять пар полюсов комплексны, а одна из них определяет неустойчивость системы:

$$z_{9,10} \approx 0.8980 \pm 0.9095i.$$

Матрица нормальной формы 1-го порядка системы принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a & b & c & d \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -a & -1 & f & g & h \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -b & -f & -1 & k & l \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -c & -g & -k & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -d & -h & -l & -m & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} F(s) = & s^{10} + 2s^9 + [a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + 8]s^8 + \\ & + [3(d^2 + h^2 + l^2 + m^2) + 8]s^7 + [a^2(k^2 + l^2 + m^2 + 3) + b^2(g^2 + h^2 + m^2 + 3) + \\ & + c^2(f^2 + h^2 + l^2 + 3) + d^2(f^2 + g^2 + k^2 + 9) + f^2m^2 + g^2l^2 + h^2k^2 + \\ & + 3(f^2 + g^2 + 3h^2 + 3k^2 + 9l^2 + 9m^2) - 2a(bgk + bhl - cfk + chm - dfl - dgm + b) - \\ & - 2b(cfg + cgm + dfh - dkm + c + f) - 2cd(gh + kl + 1) - 2fm(gl - hk) - 2ghkl - \\ & - 2(CG + dh + fg + gh + gk + hl + kl + lm) + 17]s^6 + \dots + 2[a(2a - 3b + 2c - d) + \\ & + b(3b - 4c + 2d - 3f + 2g - h) + c(c - 3d + 2f - 4g + 2h + 2k - l) + \\ & + d(2d - f + 2g - 3h - k + 2l - m) + f(3f - 4g + 2h) + g(2g - 2h - 2k + l) + \\ & + h(3h + 2k - 4l + 2m) + 3k(k - l) + 3l(l - m) + 2m^2 + 15.5] \cdot s^2 + 20s + 6. \end{aligned}$$

Здесь четыре постоянных и семь переменных коэффициентов; несмотря на то что матрица стабилизатора содержит десять переменных элементов,

достигать произвольно заданного расположения полюсов за счет их выбора заведомо невозможно. Невзирая на равенство степени характеристического многочлена и размерности пространства параметров стабилизатора, расчет опять оказывается задачей синтеза регулятора пониженного порядка.

Коэффициент при девятой степени равен двум, так что выполняются равенство $z_1 + \dots + z_{10} = -2$ и неравенство $\max \operatorname{Re} z_{1,\dots,10} \geq -0.2$. Таким образом, гипотетический минимум Гурвицевой функции $\min H(G) = \min H(a, \dots, m) = -0.2$ достигается при условии $\operatorname{Re} z_{1,\dots,10} = -0.2$ для всех пяти комплексных пар (из них одна пара и более могут оказаться кратным действительным корнем). Составим корневой многочлен

$$\begin{aligned} R(s) &= (s - z_1) \cdots (s - z_{10}) = \\ &= (s^2 + 0.4s + 0.04 + \operatorname{Im}^2 z_{1,2}) \cdots (s^2 + 0.4s + 0.04 + \operatorname{Im}^2 z_{9,10}) = \\ &= (s^2 + 0.4s + 0.04 + y_1)(s^2 + 0.4s + 0.04 + y_2) \cdots (s^2 + 0.4s + 0.04 + y_5). \end{aligned}$$

Как и выше, будем нумеровать мнимые координаты по возрастанию: $y_1 \leq \dots \leq y_5$, допуская при этом и неположительные значения.

Минимум Гурвицевой функции также будем искать, приравняв характеристический и корневой многочлены $F(s) = R(s)$, что дает девять уравнений для коэффициентов при степенях от s^8 до s^0 относительно пятнадцати неизвестных: десяти элементов матрицы стабилизатора и пяти корневых координат.

В общем случае этим задается шестимерное алгебраическое многообразие; попробуем найти некоторые точки, как регулярные, так и особые. За пять свободных переменных возьмем элементы a, b, c, f, g . Ради нахождения некоторых особых точек многообразия сделаем шестой переменной одну из корневых координат y_k , так как ее изменение может привести к сближению со значениями координат $y_{k \pm 1}$, кратными полюсам и т. д.

Как и в трехмерном случае, все одночлены, входящие в характеристический многочлен и уравнения многообразия, имеют четную суммарную степень по элементам стабилизатора. Поэтому решения, найденные при любых их значениях, сохраняются при одновременной смене знака всех элементов.

Сначала придадим переменным элементам стабилизатора значения $a = b = c = f = g = 0.5$ и проследим корневой годограф по сетке одной из корневых координат (ею окажется y_4 , см. далее) и т. д. Равенство $F(s) = R(s)$ здесь ведет к следующим уравнениям при степенях $s^8 - s^0$:

$$(d^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) + 7.45 = 0;$$

$$3(d^2 + h^2 + l^2 + m^2) - 1.6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 7.04 = 0;$$

$$(d^2 + h^2)k^2 + (d + h)k(m - l) + 9.5d^2 + 9.5h^2 + 3.25k^2 + 9.75l^2 + 9.75m^2 + \\ + 0.5d(l + m - 6h) - l(2.5h + 2k + 3m) - 0.5hm - d - h - k - y_1(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) - \\ - y_2(y_3 + y_4 + y_5) - y_3(y_4 + y_5) - y_4y_5 - 1.12(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 17.914 = 0;$$

...

$$0.4(y_1y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3y_5 + y_1y_2y_4y_5 + y_1y_3y_4y_5 + y_2y_3y_4y_5) + \\ + 0.032(y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_2y_5 + y_1y_3y_4 + y_1y_3y_5 + y_1y_4y_5 + y_2y_3y_5 + \\ + y_2y_3y_5 + y_2y_4y_5 + y_3y_4y_5) + 1.92 \cdot 10^{-3}(y_1(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_2(y_3 + y_4 + y_5) + \\ + y_3(y_4 + y_5) + y_4y_5) + 1.024 \cdot 10^{-4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 10(0.2^9 - 2) = 0; \\ (0.04 + y_1)(0.04 + y_2)(0.04 + y_3)(0.04 + y_4)(0.04 + y_5) - 6 = 0.$$

Некоторые характерные свойства одномерного подмножества решений, полученного заданием y_k , представлены в табл. 2. Прежде всего заметим, что получить решения для значений y_1 , близких к нулю, не удастся из-за расходимости расчета. Самые близкие к нулю значения y_1 получаются, но при задании переменной y_4 (и однажды – y_2) с большим номером, эти значения выделены в таблице полужирным шрифтом. Как и для трехмерной системы, граница (здесь левая) для корневой координаты y_1 возникла вблизи почти кратной пары, выделенной курсивом в левом столбце (с мнимой частью $\pm\sqrt{y_{1,2}} \approx \pm 0.4816$).

Таблица 2

Table 2

Подмножество экстремального стабилизатора пятимерной вибрационной системы, параметризованное корневой координатой

Subvariety of extreme stabilizer elements for a three-dimensional system

y_1	0.11783597	0.11783600	0.11844	0.11855	0.13841	0.13844	<i>0.23193649</i>
y_2	<i>1.23537</i>	1.23263	0.94721	0.93192	0.50098	0.58832	0.23193650
y_3	<i>1.23593</i>	1.23870	1.84467	1.92645	2.29442	1.24772	1.56857
y_4	3.62254	3.62250	3.0	2.9	2.89	3.62255	3.42957
y_5	6.33818	6.33820	6.65514	6.69490	9.05740	11.3066	14.4978
d	1.83585	1.83584	1.78375	1.77396	-1.2302	-0.6007	0.30773
h	0.39518	0.39518	0.34716	0.33903	0.19953	0.55392	-0.4397
k	-0.86791	-0.86791	-0.8721	-0.8738	-1.3554	1.66884	2.05213
l	0.89961	0.89961	1.00559	1.01800	1.24446	2.17725	0.28419
m	-0.10393	-0.10391	0.20354	0.24530	1.57590	-1.1227	2.81598

Расчет начинает сходиться при $y_1 \approx 0.232$, и это связано с возникновением близости кратной пары $y_{1,2} \approx 1.2319365$ (правый столбец табл. 2). Еще один типичный момент можно усмотреть из сравнения левого и предпоследнего столбцов таблицы. Задававшиеся значения $y_4 = 3.62254$ и 3.62255 различаются мало (на 10^{-5}), но скачок в значениях и знаках зависимых переменных достаточно велик. К таким скачкам при малых изменениях задаваемых величин расчеты приводят нередко.

Но обращает на себя внимание то, что самые медленные и самые быстрые гармоники решения с циклическими частотами $\sqrt{y_1}$ и $\sqrt{y_5}$ в нашей таблице растут монотонно по отношению друг к другу.

Аналог табл. 2 можно составить для любой точки годографа, представленного в таблице. Достаточно пройти по некоторой сетке значений любой из независимых переменных, фиксируя остальные, так же, как это было сделано с y_4 .

Стоит отметить и такой аспект: ни разу не было найдено различных действительных корней. Все получавшиеся в расчетах решения содержали только комплексно сопряженные пары с редкими исключениями для действительной кратной пары, например: $a = 0.6$; $b = 0.4$; $c = 0.5$; $f = 0.5$; $g = 0.4$. При этом корневые координаты получились такие: $y_1 \approx -0.00083891$; $y_2 \approx 0.8027$; $y_3 \approx 1.5521$; $y_4 \approx 3.7127$; $y_5 \approx 5.7461$. Отрицательное значение координаты y_1 свидетельствует скорее о погрешности вычислений вблизи кратного действительного корня, чем о переходе в действительную область.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Как видно из рассмотренных примеров, решение задачи оптимального гироскопического стабилизатора действительно оказывается бесконечным множеством – одномерным алгебраическим многообразием для системы размерности 3 и шестимерным для размерности 5. По-видимому, оно скроено достаточно сложно; можно предположить его кусочную дифференцируемость, равно как и возможность разрывов (по крайней мере, изломов) при наличии кратных корней. Последнее иногда отражается на сходимости расчета решений конкретных систем полиномиальных уравнений при задании независимых переменных (неизвестных) и вычислении остальных. Проявляются и некоторые свойства, прежде всего аналог четности – совпадение множества корней.

Поскольку число независимых элементов гироскопического стабилизатора G равно $(n^2 - n) / 2$, число корневых координат y_1, \dots, y_n совпадает с размерностью системы n , а число уравнений, связывающих элементы и координаты, на единицу меньше степени характеристического многочлена: $2n - 1$. Очевидно следующее утверждение.

Предложение. В регулярном случае размерность многообразия оптимальных стабилизаторов вибрационной системы равна $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Всё вышесказанное позволяет оценить, насколько разнообразны и содержательные вопросы поднимает проблема гироскопической стабилизации

вибрационных систем. Исследования в этой области обещают новые идеи и подходы к разработке гироскопической автоматики в целом. С точки зрения теории автоматического управления проблема гироскопической стабилизации дает важный пример синтеза управления пониженного порядка при любой размерности пространства параметров. Как и предложенный авторами [9–11] алгебраический подход к поиску оптимальных расположений полюсов замкнутых систем (в частности, использование критических корневых диаграмм и корневых многочленов), здесь проявляются и труднопредсказуемые ограничения в численном решении систем полиномиальных уравнений. Поскольку последняя задача является «статической» (без свободных параметров), можно надеяться на ее успешное решение, чего отчасти и удалось достигнуть за счет снижения степеней уравнений по сравнению с [9–11].

Автор считает приятным долгом поблагодарить профессора Т. Дамма (Technische Universität Kaiserslautern) за введение в эту исключительно содержательную тематику, а также рад выразить свою признательность профессору О.Н. Кириллову (Northumbria University, Newcastle), из работ которого он сумел составить представление о физико-механических процессах в вибрационных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Damm T., Homeyer J. On indefinite damping and gyroscopic stabilization // IFAC Proceedings. – 2011. – Vol. 44 (1). – P. 7589–7593.
2. Damm T., Homeyer J. Gyroscopic stabilization of 2nd-order-systems with indefinite damping // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2011. – Vol. 11. – P. 811–812. – DOI: 10.1002/pamm.2011110394.
3. Markus A.S., Barkwell L., Lancaster P. Gyroscopically stabilized systems: A class of quadratic eigenvalue problems with real spectrum // Canadian Journal of Mathematics. – 1992. – Vol. 44 (1). – P. 42–53.
4. Popp K., Rudolph M. Avoidance of stick-slip motion by vibration control // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – Vol. 3. – P. 120–121.
5. Kliem W., Pommer C. Indefinite damping in mechanical systems and gyroscopic stabilization // Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik. – 2009. – Vol. 60, N 4. – P. 785–795.
6. Hieu N.N., Chung P.N. Analysis of stability and stick-slip motion of a friction-induced vibrating system with dwell-time effect // International Journal of Mechanical Sciences. – 2021. – Vol. 205. – P. 106605. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106605.
7. Kirillov O.N. Subcritical flutter in the acoustics of friction // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2008. – Vol. 464, N 2097. – P. 2321–2339.
8. Kirillov O.N. Nonconservative stability problems of modern physics. – 2nd ed. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2021. – 528 p. – (Studies in mathematical physics; vol. 14).
9. Корюкин А.Н., Чехонадских А.В. Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 4 (66). – С. 3–22.
10. Корюкин А.Н., Чехонадских А.В. Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 2 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 37–56.
11. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system // Algebra and Model Theory 8: Collection of papers / Novosibirsk State Technical University. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2011. – P. 19–39.
12. Воевода А.А. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.
13. Бобобеков К.М., Воевода А.А. Синтез двухканальной системы полиномиальным методом: обеспечение астатизма // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 7–19.
14. Чехонадских А.В. Корневые координаты в синтезе одноканальных систем автоматического управления пониженного порядка // Автометрия. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 69–81.
15. Zhmud V., Dimitrov D. Designing of the precision automatic control systems. – Novosibirsk: Kant, 2017. – 126 p.

Чехонадских Александр Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления, теория графов, прикладная алгебра. Имеет около 100 печатных работ и учебных пособий. E-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

Chekhonadskih, Alexander V., D.Sc. (Eng.), associate professor at the Algebra and Mathematical Logics Department, Novosibirsk State Technical University. The main field of his research activities is theory of automatic control, graph theory, and applied algebra. He is the author of about 100 publications and teaching manuals. E-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-81-94

*An optimal gyroscopic stabilizer of a multidimensional vibration system**

A.V. CHEKHONADSKIKH

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

chekhonadskikh@corp.nstu.ru

Abstract

We study the stabilizing problem for a multidimensional vibration system using a gyroscopic stabilizer. A vibration system is given by a second order differential equation with symmetrical matrix coefficients: a positive definite stiffness matrix and an indefinite damping matrix; in general, such a system is unstable. We need find an optimal gyroscopic stabilizer for it represented by a skew-symmetric matrix coefficient in a speed term. The choice of this control type is dictated by the tendency to avoid additional vibrations caused by slip-slide friction. Its feature is a reduced order of the controller, regardless of the dimension of the system and the number of tunable parameter. Our goal is to elucidate the most important properties of the gyroscopic stabilizers variety. It is described by a polynomial equations system. The dimension of the general solution variety in the regular case is easily found and some of its points can be calculated numerically. We start with an example of dimension 3, which leads to a system of 6th order ordinary differential equations (ODE) and then a system of five polynomial equations with regard to six unknowns. Its general solution turns out to be a one-dimensional algebraic variety presented in a table form. The second example has dimension 5; it corresponds to a tenth-order system of differential equations and nine polynomial equations in fifteen unknowns. The dimension of the solution manifold is equal to six; we find a one-dimensional subvariety and some singular points. The main difficulty is the divergence of numerical calculations near the multiple poles of a closed system. One of the important properties, that manifested itself in both examples, was the presence of complex conjugate poles and occasionally multiples of real ones; thus, almost all solutions for an optimal gyroscopic stabilizer are made up of relatively rapidly decaying oscillations. In both examples, the variety of solutions consists mostly of simple poles and allows one to choose a stabilizer that does not create resonant effects.

Keywords: linear time invariant system, control system, vibration system, low-order control, gyroscopic stabilization, optimal stabilizer

REFERENCES

1. Damm T., Homeyer J. On indefinite damping and gyroscopic stabilization. *IFAC Proceedings*, 2011, vol. 44 (1), pp. 7589–7593.

* Received 30 November 2021.

2. Damm T., Homeyer J. Gyroscopic stabilization of 2nd-order-systems with indefinite damping. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 11, pp. 811–812. DOI: 10.1002/pamm.201110394.
3. Markus A.S., Barkwell L., Lancaster P. Gyroscopically stabilized systems: A class of quadratic eigenvalue problems with real spectrum. *Canadian Journal of Mathematics*, 1992, vol. 44 (1), pp. 42–53.
4. Popp K., Rudolph M. Avoidance of stick-slip motion by vibration control. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 3, pp. 120–121.
5. Kliem W., Pommer C. Indefinite damping in mechanical systems and gyroscopic stabilization. *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik*, 2009, vol. 60, no. 4, pp. 785–795.
6. Hieu N.N., Chung P.N. Analysis of stability and stick-slip motion of a friction-induced vibrating system with dwell-time effect. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, vol. 205, p. 106605. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106605.
7. Kirillov O.N. Subcritical flutter in the acoustics of friction. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008, vol. 464, no. 2097, pp. 2321–2339.
8. Kirillov O.N. *Nonconservative stability problems of modern physics*. 2nd ed. Berlin, Boston, De Gruyter, 2021. 528 p.
9. Koryukin A.N., Chekhonadskih A.V. *Predel ustoichivosti trekhmassovoi sistemy s regulyatorom 3-go poryadka*. Ch. 1 [Stability limit of the triple mass system with 3rd order controller. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 4 (66), pp. 3–22.
10. Koryukin A.N., Chekhonadskih A.V. *Predel ustoichivosti trekhmassovoi sistemy s regulyatorom 3-go poryadka*. Ch. 2 [Stability limits of three-mass system with a 3rd order controller. Pt. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 37–56.
11. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system. *Algebra and Model Theory* 8. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011, pp. 19–39.
12. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilization of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.
13. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Sintez dvukhkanal'noi sistemy polinomial'nym metodom: obespechenie astatizma [Synthesis of two-channel system polynomial method: ensuring astatic]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no 1 (83), pp. 7–19.
14. Chekhonadskikh A.V. Root coordinates in the design of SISO control systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2015, vol. 51, iss. 5, pp. 485–495. Translated from *Avtometriya*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 69–81.
15. Zhmud V., Dimitrov D. *Designing of the precision automatic control systems*. Novosibirsk, Kant, 2017. 126 p.

Для цитирования:

Чехонадских А.В. Оптимальный гироскопический стабилизатор многомерной вибрационной системы // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 81–94. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-81-94.

For citation:

Chekhonadskikh A.V. Optimal'nyi giroskopicheskiy stabilizator mnogomernoi vibratsionnoi sistemy [An optimal gyroscopic stabilizer of a multidimensional vibration system]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 2 (86), pp. 81–94. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-81-94.