ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 90, № 2, 2023, с. 77–88

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 90, No. 2, 2023, pp. 77–88

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
И ИНФОРМАТИКА

COMPUTER SCIENCE
AND INFORMATION SCIENCE

УДК 514.8

DOI: 10.17212/2782-2001-2023-2-77-88

О единственности потока, порождаемого нерегулярным векторным полем*

В.А. СЕЛЕЗНЕВ[a], А.В. ГОБЫШ[b]

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

[a] *seleznev@corp.nstu.ru* [b] *gobysh@corp.nstu.ru*

Поток во времени ансамбля начального состояния в многомерном фазовом пространстве, как правило, моделирует некоторый динамический процесс. Возникает вопрос единственности: при каких условиях такой поток порождается векторным полем так, что векторному полю соответствует данный поток единственным образом? Например, при анализе данных динамического процесса, когда по реализации процесса требуется восстановить векторное поле, порождающее этот процесс. Положительный ответ на этот вопрос дают классические теоремы единственности решения начальной задачи в случае регулярного векторного поля с требуемыми свойствами модуля непрерывности по пространственным переменным. В математических моделях стохастических дифференциальных уравнений, в моделях нерегулярных гидродинамических течений и ряде других случаев, когда поток порождается «плохим» векторным полем, имеющим модуль непрерывности по пространственным переменным, не отвечающим условиям теоремы единственности решения начальной задачи для векторного поля, порождающего этот поток, мы не можем говорить о корректности начальной задачи для векторного поля и тем самым о корректности нахождения траекторий, связывающих начальное и актуальное состояния ансамбля частиц в фазовом пространстве. В этом случае о единственности потока, порождаемого векторным полем, остается судить только по свойствам самого потока. Единственным известным результатом такого типа является теорема ван Кампена, которая утверждает, что единственность потока, порожденного непрерывным по пространственным переменным векторным полем, гарантируется свойствами гомеоморфности и липшицевости потока по пространственным переменным. Если векторное поле скоростей теряет свойство непрерывности по пространственным переменным, то теорема ван Кампена не работает и требуются какие-то другие свойства потока, гарантирующие его единственность. В настоящей работе устанавливаются такие свойства потока, которые гарантируют его единственность даже в случае нарушения непрерывности векторного поля, порождающего этот поток. Условия теоремы ван Кампена в определенном смысле являются частным случаем таких установленных в настоящей работе свойств потока, гарантирующих его единственность, как решения начальной задачи для нерегулярного векторного поля. Построенная здесь общая конструкция доказательства позволяет устанавливать такие свойства потоков в различных математических моделях, которые гарантируют его единственность для порождающего векторного поля.

* *Статья получена 21 февраля 2023 г.*

Ключевые слова: ансамбль начального состояния в фазовом пространстве, реализация потока ансамбля начального состояния, единственность решения начальной задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений, корректность начальной задачи для нерегулярного векторного поля, теорема ван Кампена, модуль непрерывности векторного поля, нерегулярное векторное поле, системный анализ данных реализации потока ансамбля начальных данных, обработка результатов динамического процесса

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) в единичном шаре $B^n: |y| \le 1$ евклидова пространства $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{dy}{dt} = v(y,\ t), \qquad v:\ B^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

которая посредством решения начальной задачи

$$y = \varphi_t(x)\big|_{t=0} = x \in B^n, \quad t \in [0,1],$$

$$\varphi_t(x) = \left(\varphi_t^1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\ \varphi_t^n(x_1,\ldots,x_n)\right) \tag{2}$$

порождает t-параметрический автоморфизм шара:

$$\varphi_t:\ B^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0,1]$$

так, что при $t = 0$ этот автоморфизм есть тождественное отображение:

$$\varphi_0 = id, \quad (\varphi_0(x) \equiv x).$$

Первый пример неединственности решения начальной задачи (2) для СОДУ (1), определяющих непрерывное по пространственным переменным векторное поле, был построен М.А. Лаврентьевым [1]. В случае неединственности решения начальной задачи согласно теореме Г. Кнезера [2] существует континуум решений начальной задачи, выходящих из одной точки, и говорить о корректности порождения в фазовом пространстве потока начального состояния векторным полем не приходится. При отсутствии известных требований [2, 3] на модуль непрерывности по пространственным переменным y векторного поля $v(y,t)$ единственность фазового потока $\varphi_t: B^n \to B^n$, порожденного посредством начальной задачи (1) и (2), можно установить, если такое имеет место, только по свойствам самого потока. Согласно вышеупомянутой теореме ван Кампена, единственность потока, порождаемого начальной задачей (1) и (2), имеет место при выполнении следующих двух свойств потока:

1) условия Липшица

$$\left|\varphi_t(x_1) - \varphi_t(x_2)\right| \le \mathrm{const}\left|x_1 - x_2\right|, \quad (x,t) \in B^n \times [0,1];$$

2) условия непрерывности $v(x,t)$ по x для всех $t \in [0,1]$.

Заметим, что согласно теореме Радемахера – Степанова [4] отображение, удовлетворяющее условию Липшица, дифференцируемо почти всюду, но его производные ограничены константой Липшица, что является жестким ограничением на эволюцию ансамбля начального состояния в фазовом пространстве. При нарушении второго условия – непрерывности $v(y,t)$ по y – единственность потока $y=\varphi_t(x)$ теоремой ван Кампена вовсе не гарантируется. В настоящей работе, во-первых, мы снимаем условие непрерывности векторного поля $v(y,t)$ по t и, во-вторых, условие ограниченности почти всюду производных $\dfrac{\partial\varphi_t^i(x)}{\partial x_j}$ $(i,j=1,\dots,n)$ заменяем условием их конечности в потоке ансамбля начального состояния. Это существенно расширяет класс потоков, порождаемых единственным образом нерегулярными векторными полями. Таким образом, основной результат работы заключается в расширении класса потоков, для которого гарантируется свойство единственности потока для порождающего его векторного поля посредством начальной задачи (1) и (2). Этот результат сформулирован в утверждении 1 раздела 2, которое выражает условия конструкции получения доказательства единственности потока, порождаемого векторным полем. Фактически этот результат дает конструкцию для получения класса теорем единственности решений начальных задач для СОДУ. Пример, иллюстрирующий применение предложенной конструкции, приводится в разделе 3, где единственный поток ансамбля начальных данных порождается задачей (1) и (2) с векторным полем, не являющимся непрерывным по пространственным переменным. Для простоты изложения, чтобы избежать громоздкости обозначений, мы ограничиваемся изотопиями единичного шара на себя, что не меняет принципа построения предлагаемой конструкции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается t-параметрический гомеоморфизм единичного шара на себя (автоморфный поток)

$$y=\varphi_t(x):\ x\in B^n,\quad y\in B^n,\quad \forall t\in[0,1], \tag{3}$$

который удовлетворяет условию (2), т. е. $\varphi_t|_{t=0}=\varphi_0$ является тождественным отображением $\varphi_0=id:\ B^n\to B^n$. Этот поток можно рассматривать как динамическое развитие по времени t ансамбля начальных данных B^n. Будем считать, что при всех $(x,t)\in B^n\times[0,1]$ траектория $y=\varphi_t(x)\in B^n$ абсолютно непрерывна по t, а отображение $\varphi_t:\ B^n\to B^n$ имеет конечные частные производные

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\varphi_t^i(x)}{\partial x_j},\qquad (i,j=1,\dots,n).$$

Тогда для всех $(y,t)\in B^n\times[0,1]$ определено векторное поле скоростей

$$\frac{dy}{dt}=\left.\frac{d\varphi_t(x)}{dt}\right|_{x=\varphi_t^{-1}(y)}=v(y,t)\,, \tag{4}$$

где $\varphi_t^{-1}(y)$ – отображение, обратное к $\varphi_t(x)$:

$$\varphi_t\circ\varphi_t^{-1}(y)\equiv y\,,\qquad \varphi_t^{-1}\circ\varphi_t(x)\equiv x\,.$$

В этом случае можно говорить, что поток φ_t (3), порождается начальной задачей (1) и (2) для векторного поля (4). В кинематике сплошных сред начальные данные x – это координаты Лагранжа, а переменные y – координаты Эйлера [5].

Векторное поле $v(y,t)$, определяемое по потоку φ_t согласно (4), может не только не иметь модуля непрерывности по $y\in B^n$, удовлетворяющего условиям теоремы единственности начальной задачи (1) и (2), но даже не являться непрерывным по y. Пример такого потока приведен нами в разделе 3. В связи с этим возникает задача: установить такие свойства потока φ_t (3), при которых он порождается единственным решением начальной задачи (1) и (2) для «плохого» векторного поля (4). Как выше указывалось, единственным результатом в этом направлении является теорема ван Кампена. И в настоящей работе мы усиливаем эту теорему, расширяя свойства потока φ_t ансамбля начальных данных в конечномерном фазовом пространстве, при которых этот поток порождается единственным решением начальной задачи (1) и (2) для векторного поля (4).

2. КОНСТРУКЦИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОТОКА

Пусть φ_t – поток (3), определяющий векторное поле скоростей $v(y,t)$ (4) и удовлетворяющий начальной задаче (1) и (2). Пусть $y=\psi_t(x)$ – другое решение начальной задачи (1) и (2):

$$\frac{dy}{dt}=v(y,t)\,,\qquad y=\left.\psi_t(x)\right|_{t=0}\equiv x\,. \tag{5}$$

Таким образом, потоки φ_t и $\psi_t(x)$ порождаются одним и тем же векторным полем $v(y,t)$. Тогда вместе с уравнением (4), определяющим $v(y,t)$, мы имеем

$$\left.\frac{d\psi_t(x)}{dt}\right|_{x=\psi_t^{-1}(y)}=v(y,t)\,. \tag{6}$$

Определим поток смещения F_t (рис. 1):

$$x=F_t(z)=\varphi_t^{-1}\circ\psi_t(z)\,. \tag{7}$$

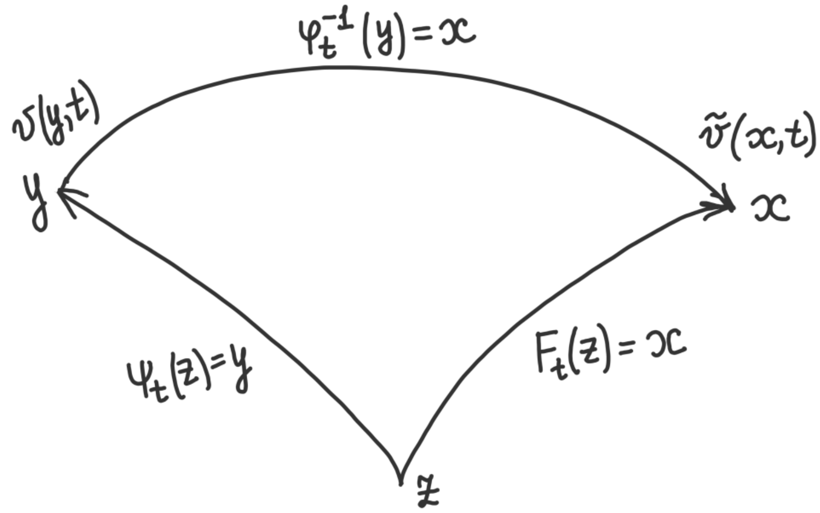

Рис. 1. Поток смещения F_t

Fig. 1. Displacement flow F_t

Наличие потока смещения определяется следующими обстоятельствами. В актуальную точку (y,t) траектории $y=\psi_t(x)$, выходящей из начальной точки $(z,0)$, приходит траектория $y=\varphi_t$, выходящая из начальной точки $(x,0)$. Следовательно, для потока (7) $x=F_t(z)$ точки $x\in B^n$ зависят от времени t и являются актуальными координатами. Выразим из (7)

$$y=\psi_t(z)=\varphi_t\circ F_t(z)$$

и вычислим касательный вектор к траектории $y=\psi_t(x)$ в актуальной точке (y,t) этого потока. Обозначив через $D\varphi_t\circ F_t(z)$ матрицу Якоби производной отображения $\varphi_t:\ B^n\to B^n$ в точке $x=F_t(z)$, вычислим

$$\left.\frac{d\psi_t(z)}{dt}\right|_{z=\psi_t^{-1}(y)}=\left.\frac{d}{dt}\big(\varphi_t\circ F_t(z)\big)\right|_{z=\psi_t^{-1}(y)}=$$

$$=\left.\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\circ F_t(z)+D\varphi_t\circ F_t(z)\,\frac{dF_t(z)}{dt}\right)\right|_{z=\psi_t^{-1}(y)=F_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}(y)}=$$

$$=\frac{d\varphi_t}{dt}\circ F_t(z)\circ F_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}(y)+D\varphi_t\circ F_t(z)\circ F_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}(y)\,\frac{dF_t}{dt}\circ F_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}(y)=$$

$$=\frac{d\varphi_t}{dt}\circ\varphi_t^{-1}(y)+D\varphi_t\circ\varphi_t^{-1}(y)\,\frac{dF_t}{dt}\circ F_t^{-1}\circ\varphi_t^{-1}(y)\,. \quad (8)$$

Векторное поле $v(y,t)$ в актуальных координатах (t,y) является общим как для траектории $y=\psi_t(z)$, выходящей из начальной точки $(z,0)$, так и для траектории $y = \varphi_t(x)$, выходящей из начальной точки $(x,0)$. Поэтому имеем два тождественно равных представления векторного поля:

$$v(y,t) \equiv \frac{d\varphi_t}{dt} \circ \varphi_t^{-1}(y) \equiv \frac{d\psi_t}{dt} \circ \psi_t^{-1}(y) . \tag{9}$$

Подставим в это равенство правую часть представления (8), получим

$$\frac{d\varphi_t}{dt} \circ \varphi_t^{-1}(y) \equiv \frac{d\varphi_t}{dt} \circ \varphi_t^{-1}(y) + D\varphi_t \circ \varphi_t^{-1}(y) \frac{dF_t}{dt} \circ F_t^{-1} \circ \varphi_t^{-1}(y) .$$

Откуда после сокращения одинаковых слагаемых в левой и правой части и обозначения $\varphi_t^{-1}(y) = x$ приходим к условию

$$D\varphi_t(x) \frac{dF_t}{dt} \circ F_t^{-1} \equiv D\varphi_t(x)\, \tilde{v}\left(x,t\right) \equiv 0 , \tag{10}$$

где $D\varphi_t(x)$ – матрица производной отображения $y = \varphi_t(x)$, $\varphi_t :\ B^n \to B^n$, а $\tilde{v}(x,t)$ – векторное поле потока смещения $x = F_t(z)$ в актуальной для этого потока точке (x,t) (рис. 1).

В точках $(x,t) \in B^n \times [0,\mathrm{T}]$ невырожденности матрицы $D\varphi_t(x)$ имеем

$$\det\left\| D\varphi_t(x) \right\| \neq 0 .$$

Следовательно, в этих точках векторное поле $\tilde{v}(x,t)$

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{dF_t}{dt} \circ F_t^{-1}(x) = 0 . \tag{11}$$

Таким образом, поток $x = F_t(z)$ становится тождественным $F_t(z) \equiv z$, поэтому из представления (7) заключаем, что потоки φ_t и ψ_t совпадают:

$$\varphi_t(x) \equiv \psi_t(x) .$$

Мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть поток $y = \varphi_t(x)$, $\varphi_t :\ B^n \times [0,1] \to B^n$ порождается решением начальной задачи (1) и (2), пусть траектории $t \to \varphi_t(x)$ абсолютно непрерывны по t для всех $(x,t) \in B^n \times [0,1]$ и матрица производной $D\varphi_t(x)$ отображения $\varphi_t :\ B^n \to B^n$ не вырождена при всех $(x,t) \in B^n \times [0,1]$. Тогда $y = \varphi_t(x)$ – единственное решение начальной задачи (1) и (2).

Вывод 1. Приведенная конструкция доказательства единственности решения начальной задачи (1) и (2) основана на выполнении ключевого тождества (10) для потока смещения (7). Следовательно, класс теорем единственности решения задачи (1) и (2) можно получать, формулируя условие выполнения тождества (10) или его обобщений почти всюду на множестве $B^n \times [0,1]$, за исключением множества $E \subset B^n \times [0,1]$ нулевой меры Лебега таким образом, чтобы изотопия $\varphi_t : B^n \times [0,1] \to B^n$ однозначно продолжалась на E с сохранением свойства изоморфности отображения $D\varphi_t : B^n \to B^n$.

Замечание 1. Приведенную конструкцию условий единственности решения начальной задачи (1) и (2) можно сформулировать, требуя **только** локального выполнения свойств указанных в следствии. Мы этого не делаем, чтобы избежать дополнительных обозначений и оставить прозрачность приведённой геометрической конструкции.

3. ПРИМЕР ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОТОКА, ПОРОЖДАЕМОГО ВСЮДУ РАЗРЫВНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

Пусть $y = h(x)$ – гомеоморфный автоморфизм шара B^n: $|x| \le 1$, тождественный на границе этого шара: $h(x)\big|_{|x|=1} \equiv x$.

Определим поток $h_t(x): B^n \times [0,1] \to B^n$ следующим образом:

$$y = h_t(x) = \begin{cases} t \cdot h\left(\dfrac{x}{t}\right), & |x| \le t \le 1, \\ x, & 0 \le t \le |x|. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть гомеоморфизм

$$h: B^n \to B^n, \qquad h(x) = \left(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots, h_n(x_1,\dots,x_n)\right)$$

имеет конечные производные $\dfrac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}$ $(i, j = 1,\dots,n)$ для всех $x \in B^n$ и пусть матрица производной $Dh(x)$ не вырождена в $B^n \setminus \Omega$, где множество Ω имеет нулевую меру Лебега. Условия на множество Ω будут наложены ниже.

Найдем векторное поле $v_h(y,t): B^n \times [0,1] \to B^n$, которое порождает поток $y = h_t(x)$, определенный в (12):

$$v_h(y,t) = \frac{dh_t(x)}{dt}\bigg|_{x=h_t^{-1}(y)} =$$

$$= \begin{cases} h\left(\dfrac{x}{t}\right) - Dh\left(\dfrac{x}{t}\right)\left(\dfrac{x}{t}\right)\bigg|_{x=th^{-1}\left(\frac{y}{t}\right)}, & |x| \le t \le 1, \\ 0, & 0 \le t \le |x|, \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{y}{t} - Dh \circ h^{-1}\left(\dfrac{y}{t}\right) h^{-1}\left(\dfrac{y}{t}\right), & \left|h^{-1}\left(\dfrac{y}{t}\right)\right| \le 1, \\ 0, & 1 \le \left|h^{-1}\left(\dfrac{y}{t}\right)\right|. \end{cases} \tag{13}$$

Кинематика потока $h_t(x)$ такова (см. рис. 2): в пересечении внешности конуса $|x| \ge t$ и цилиндра $B^n \times [0,1]$ имеем $y = h_t(x) \equiv x$, $v_h(y,t) \equiv 0$, это значит, что все точки этого множества являются стационарными точками векторного поля $v_h(y,t)$ на временном интервале $0 \le t \le |x|$; на временном интервале $|x| \le t \le 1$ возникают траектории $y = h_t(x)$.

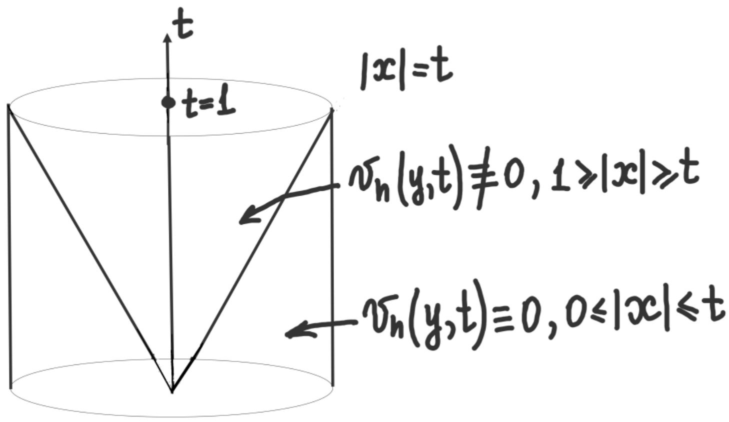

Рис. 2. Кинематика потока $h_t(x)$

Fig. 2. Flow kinematics $h_t(x)$

Согласно условию (10) для единственности потока $h_t(x)$ из (12), порождаемого векторным полем $v_h(y,t)$ из (13) посредством начальной задачи (1) и (2), требуется, чтобы ядро линейного матричного оператора $Dh_t(x)$ состояло из нулевых элементов для всех $(x,t) \in (B^n \setminus \Omega) \times [0,1]$:

$$KerDh_t(x) = 0, \quad (x,t) \in (B^n \setminus \Omega) \times [0,1]. \tag{14}$$

Имеем

$$Dh_t(x) = D\left(t\,h\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \begin{cases} E, & 0 \le t \le |x|, \\ Dh\left(\dfrac{x}{t}\right), & |x| \le t \le 1. \end{cases}$$

Для выполнения условия (14) требуется, чтобы определенное каким-либо способом продолжение на $\Omega\times[0,1]$ линейного отображения $Dh\left(\frac{x}{t}\right)$ не имело нетривиальных решений уравнения (10).

Вывод 2. Пусть $h: B^n \to B^n$ – гомеоморфный автоморфизм шара B^n, тождественный на границе: $h\big|_{|x|=1} = id$, и пусть существуют конечные (необязательно ограниченные!) частные производные $\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}$ для всех $x \in B^n$. Тогда поток $y = h_t(x)$, представленный в (12), является единственным решением начальной задачи (1) и (2) для векторного поля (13). При этом векторное поле (13) не является даже непрерывным в точках цилиндра $(y,t) \in B^n \times [0,1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конструкция доказательства в разделе 2, условия выполнения которой даны в утверждении 1 и выводе 1, а также пример в разделе 3 показывают, что условие единственности потока, порождаемого начальной задачей (1) и (2), может выполняться для «плохих» векторных полей, если выполняется условие единственности тривиального решения линейной системы уравнений (11) для почти всех $(x,t) \in B^n \times [0,1]$, за исключением точек множества $E \subset B^n \times [0,1]$ нулевой лебеговой меры. При этом тривиальное нулевое решение системы (11) должно непрерывно продолжаться на указанное множество *E*. Полученные результаты дают возможность исследовать свойства эргодичности и хаотичности [6] для потоков, порожденных начальными задачами (1) и (2), а также аналогичные свойства для реализаций стохастических динамических систем [7, 8], в том числе стохастических систем типа Ланжевена [9–12] в случае нерегулярных векторных полей. Построение векторных полей по реализациям стохастических траекторий позволяет установить отношение скоростей изменения величин, участвующих в формировании потока, тем самым сформулировать законы формирования потока по эмпирическим данным, как, например, в моделях типа В. Вольтерра [13]. Теоремы единственности решения начальной задачи (1) и (2) для векторных полей, имеющих обобщенные производные, исследовались ранее одним из авторов в работе [14]. Класс изотопий, построенных в примере раздела 3, рассматривался для построения квазиконформных изотопий шара B^n в работе [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lavrentieff M.* Sur une équation différentielle du premier ordre // Mathematische Zeitschrift. – 1925. – Vol. 23 (1). – P. 197–209. – DOI: 10.1007/BF01506227.

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

3. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Иностранная литература, 1958. – 474 с.

4. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 492 с.

6. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 350 с.

7. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

8. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984. – 272 с.

9. *Рудяк В.Я.* Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 1. Кинетическая теория. – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 320 с.

10. *Рудяк В.Я.* Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 2. Гидродинамика. – Новосибирск: НГАСУ, 2005. – 468 с.

11. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

12. Anomalous diffusion and nonergodicity for heterogeneous diffusion processes with fractional Gaussian noise / W. Wang, A.G. Cherstvy, X. Liu, R. Metzler // Physical Review E. – 2020. – Vol. 102. – P. 012146. – DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012146.

13. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

14. *Селезнев В.А.* О единственности решения начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в заданном классе отображений // Динамика сплошной среды. – 1990. – № 97. – С. 107–113.

15. *Селезнев В.А.* О некоторых задачах квазиконформного изотопирования // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38, № 2. – С. 372–382.

Селезнев Вадим Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – методы геометрической теории функции в задачах механики сплошных сред и уравнениях математической физики, в том числе фрактальные структуры в математических моделях физических процессов. Имеет более 120 печатных работ, в том числе 10 учебных пособия. E-mail: seleznev@corp.nstu.ru

Гобыш Альбина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, математический анализ. Имеет более 60 печатных работ, в том числе 24 учебных пособия. E-mail: gobysh@corp.nstu.ru

Seleznev Vadim A., D.Sc. (Phys.&Math.), Professor, Head of the Department of Engineering Mathematics at theNovosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on methods of geometric function theory in problems of continuum mechanics and equations of mathematical physics, including fractal structures in mathematical models of physical processes. He has more than 120 publications, including 10 textbooks. E-mail: seleznev@corp.nstu.ru

Gobysh Albina V., PhD (Phys.&Math.), Associate Professor at the Department of Engineering Mathematics, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on mathematical modeling and mathematical analysis. She has more than 60 publications, including 24 textbooks. E-mail: gobysh@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2023-2-77-88

On the uniqueness of the flow generated by an irregular vector field *

V.A. SELEZNEV [a], *A.V. GOBYSH* [b]

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[a] *seleznev@corp.nstu.ru* [b] *gobysh@corp.nstu.ru*

Abstract

The flow in time of an initial state ensemble in a multidimensional phase space, as a rule, models some dynamic process. Under what conditions is such a flow generated by a vector field in such a way that the given flow corresponds to the vector field in a unique way? A positive answer to this question is given by the classical uniqueness theorems for the solution of the initial value problem in the case of a regular vector field with the required properties of the modulus of continuity in space variables. In mathematical models of stochastic differential equations, in models of irregular hydrodynamic flows, and in a number of other cases when the flow is generated by a "bad" vector field that has a modulus of continuity in space variables that does not meet the conditions of the uniqueness theorem for solving the initial problem for a vector field, generating this flow, we cannot speak about the correctness of the initial problem for the vector field and, thus, about the correctness of finding the trajectories connecting the initial and actual states of the ensemble of particles in the phase space. In this case, the uniqueness of the flow generated by the vector field remains to be judged only by the properties of the flow itself. The only known result of this type is van Kampen's theorem, which states that the uniqueness of a flow generated by a vector field continuous in space variables is guaranteed by the properties of homeomorphism and the Lipschitz property of the flow in space variables. If the vector velocity field loses the property of continuity in space variables, then van Kampen's theorem does not work and some other properties of the flow are required to guarantee its uniqueness. In this paper, we establish such properties of a flow that guarantee its uniqueness even in the case of a violation of the continuity of the vector field that generates this flow. The conditions of van Kampen's theorem in a certain sense are a special case of the properties of the flow established in this paper, which guarantee its uniqueness as a solution to the initial problem for an irregular vector field. The general construction constructed here makes it possible to establish such properties of flows in various mathematical models that guarantee its uniqueness for a generating vector field.

Keywords: the ensemble of the initial state in phase space, the realization of the flow of the ensemble of the initial state, the uniqueness of the solution of the initial problem of the system of ordinary differential equations, the correctness of the initial problem for an irregular vector field, van Kampen's theorem, the modulus of continuity of the vector field, irregular vector field, system analysis of the data of the implementation of the initial data ensemble flow, processing of the results of the dynamic process

REFERENCES

1. Lavrentieff M. Sur une équation différentielle du premier ordre. *Mathematische Zeitschrift*, 1925, vol. 23 (1), pp. 197–209. DOI: 10.1007/BF01506227.

2. Hartman Ph. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1970. 720 p. (In Russian).

3. Coddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Theory of ordinary differential equations]. Moscow, Inostrannaya literature Publ., 1958. 474 p. (In Russian).

* *Received 21 February 2023.*

4. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* [Geometric measure theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 760 p. (In Russian).

5. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy*. T. 1 [Continuum mechanics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 492 p.

6. Crownover R.M. *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamical systems]. Moscow, Postmarket Publ., 2000. 350 p. (In Russian).

7. Schuster H.G. *Determinirovannyi khaos* [Deterministic chaos]. Moscow, Mir Publ., 1988. 240 p. (In Russian).

8. Zaslavskii G.M. *Stokhastichnost' dinamicheskikh sistem* [Stochasticity of dynamical systems]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 272 p.

9. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya aerogidromekhanika gomogennykh i geterogennykh sred*. T. 1. *Kineticheskaya teoriya* [Statistical aerohydromechanics of homogeneous and heterogeneous media. Vol. 1. Kinetic theory]. Novosibirsk, NGASU Publ., 2004. 320 p.

10. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya aerogidromekhanika gomogennykh i geterogennykh sred*. T. 2. *Gidrodinamika* [Statistical aerohydromechanics of homogeneous and heterogeneous media. Vol. 2. Hydrodynamics]. Novosibirsk, NGASU Publ., 2005. 468 p.

11. Stratonovich R.L. *Nelineinaya neravnovesnaya termodinamika* [Nonlinear nonequilibrium thermodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 480 p.

12. Wang W., Cherstvy A.G., Liu X., Metzler R. Anomalous diffusion and nonergodicity for heterogeneous diffusion processes with fractional Gaussian noise. *Physical Review E*, 2020, vol. 102, p. 012146. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012146.

13. Volterra V. *Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie* [Mathematical theory of the struggle for existence]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 286 p. (In Russian).

14. Seleznev V.A. O edinstvennosti resheniya nachal'noi zadachi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii v zadannom klasse otobrazhenii [On the uniqueness of the solution of the initial problem for ordinary differential equations in a given class of mappings]. *Dinamika sploshnoi sredy = Continuum dynamics*, 1990, no. 97, pp. 107–113.

15. Seleznev V.A. O nekotorykh zadachakh kvazikonformnogo izotopirovaniya [On some problems of quasiconformal isotoping]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 372–382. (In Russian).

Для цитирования:

Селезнев В.А., Гобыш А.В. О единственности потока, порождаемого нерегулярным векторным полем // Системы анализа и обработки данных. – 2023. – № 2 (90). – С. 77–88. – DOI: 10.17212/2782-2001-2023-2-77-88.

For citation:

Seleznev V.A., Gobysh A.V. O edinstvennosti potoka, porozhdaemogo neregulyarnym vektornym polem [On the uniqueness of the flow generated by an irregular vector field]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 2 (90), pp. 77–88. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-2-77-88.