ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 56, № 3, 2014, с. 37–47

http://journals.nstu.ru/vestnik
Scientific Bulletin of NSTU
Vol. 56, No. 3, 2014, pp. 37–47

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И РЕГУЛИРОВАНИЕ

AUTOMATIC CONTROL
AND REGULATION

УДК 62-83: 531.3

Определение индексов каузальности вход-выходных нелинейных динамических систем*

А.М. МАЛЫШЕНКО

643050, г. Томск, пр. Ленина, 30, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, д. т. н., профессор, e-mail: mam@tpu.ru

Статья содержит сведения о каузальности – одном из фундаментальных свойств вход-выходных динамических систем, в частности, объектов и систем автоматического управления. Это свойство относится к той же группе фундаментальных свойств управляемых систем, что и управляемость, достижимость, наблюдаемость и восстанавливаемость. Данная статья включает в себя классификацию динамических систем по типам каузальности, математически строгое определение понятия «индекс каузальности», которое было предложено автором ранее, а также описание метода вычисления индексов каузальности для вход-выходных нелинейных многомерных по входу и/или выходу динамических систем и алгоритм для его реализации. Этот метод базируется на использовании матриц смежности и достижимости систем. Автор ввел в этой статье понятие «условный индекс каузальности». Такие индексы следует применять в тех случаях, когда математические модели нелинейных динамических систем в форме «вход-состояние-выход» содержат мультипликативные составляющие относительно элементов векторов состояния и/или выхода систем. Индексы каузальности динамических систем позволяют определять структуру вход-выходных (внутренних) связей в этих системах. Они могут эффективно использоваться при решении задач идентификации многомерных по входу и выходу объектов и автономизации систем управления такими объектами. Индексы каузальности определяют также функциональную воспроизводимость систем, т. е. тот класс временных функций, которые могут быть реализованы на их выходе при заданных множествах начальных условий и реализуемых входных воздействиях.

Ключевые слова: многомерная по входу и выходу система, нелинейная динамическая система, система автоматического управления, фундаментальные свойства вход-выходных систем, каузальность, типы каузальности, индексы каузальности, условные и безусловные индексы каузальности, определение и вычисление индексов каузальности, алгоритм, скалярные и мультипликативные вектор-функции, диграф системы, матрицы смежности и достижимости

ВВЕДЕНИЕ

В то время как устойчивость, управляемость, наблюдаемость, достижимость и ряд других фундаментальных свойств управляемых динамических систем давно являются предметом исследований и многочисленных публикаций, относящаяся к этой же группе свойств каузальность привлекла внимание специалистов-системотехников сравнительно недавно. Она характеризует вход-выходную инерционность динамических систем. В частности, как следует из [1–3], для систем с дискретным временем – их вход-выходное запаздывание. Поэтому знание присущей системам каузальности очень важно с практической точки зрения, так как эта инерционность (запаздывание) не поддается уменьшению при использовании любого физически возможного компенсатора. В этой связи она существенно сказывается на других фундаментальных свойствах вход-выходных динамических систем, в частности, на функциональной воспроизводимости, маневренности, автономизируемости их управляемых выходов.

* *Статья получена 23 апреля 2014 г.*

Динамические системы с сюрьективными вход-выходными отображениями протекающих в них процессов по этому признаку классифицируют на каузальные и бикаузальные [1, 4, 5], на каузальные и строго каузальные [1, 5] или, что эквивалентно, на собственные и строго собственные [6, 7] системы.

В случае линейных системам класса

$$\sigma x(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{1}$$

у которых $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$ – соответственно, векторы состояния, входа и выхода, а σ – оператор дифференцирования по времени t для систем с непрерывным аргументом или сдвига на один такт вида $\sigma x(t) = x(t+1)$ для систем с дискретным относительным временем t, к классу строго каузальных систем относят те, в которых матрица D мгновенной реакции системы на входное воздействие равна нулю. В противном случае рассматриваемая система просто каузальна (бикаузальна) по входу.

В качестве количественной меры каузальности для одномерных по входу и выходу динамических систем с дискретным относительным временем в [8] предложено использовать величину, названную *характеристическим числом системы* и определенную как момент времени t, при котором выход системы «возбуждается» входом, поступившим в момент $t = 0$.

В ряде работ, в частности в [9], для многомерных по входу и выходу непрерывных систем класса (1) при $D = 0$ аналогичный по сути показатель между входом $u(t)$ и выходом y_i называется дифференциальной степенью δ_i системы относительно выхода $y_i(t)$ и определяется как минимальная степень N, при которой нарушается условие $c_i A^{N-1} B \equiv 0$, где c_i – i-я строка матрицы C. Сумма всех δ_i системы при этом называется дифференциальной степенью δ системы. Подобный δ показатель для линейных систем в [10] и для нелинейных систем в [11] называется их дифференциальным порядком.

Указанные выше показатели, как и индексы управляемости, наблюдаемости, достижимости [10], характеризуют структурные и динамические свойства систем. В этой связи в статье автора [3] их было предложено называть индексами каузальности. Там же и в [12] приведены дефиниции этих индексов и алгоритмы их определения для линейных систем по их диграфам, а также по матрицам смежности и достижимости.

В данной статье на основе этого же подхода предлагается алгоритм определения индексов каузальности для многомерных нелинейных динамических систем, причем и для систем с мультипликативными слагаемыми в их математических моделях относительно элементов вектора входных воздействий. Кроме того, вводятся понятия условных и безусловных индексов каузальности.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ КАУЗАЛЬНОСТИ

Полагаем, что исследуемая нелинейная динамическая система относится к классу многомерных по входу и выходу и описывается уравнениями

$$\sigma x(t) = g\big(x(t), u(t), f(t)\big); \qquad y(t) = h\big(x(t), u(t), f(t)\big), \tag{2}$$

где $x \in R^n$ – вектор её состояния; $y \in R^p$ – вектор выхода; а $u \in R^m$ и $f \in R^r$ для управляемых систем, соответственно, векторы её управляемого и неуправляемого входов (векторы управления и возмущения), а для других типов вход-выходных динамических систем (например, для информационных, преобразующих) – полезный сигнал и помеха. Оператор σ в (2) имеет тот же смысл, что и в (1).

Полагаем, что начальное состояние системы

$$x(0) = 0, \; y(0) = 0 \tag{3}$$

и что $g: R^n \times R^m \times R^r \to R^n$; $h: R^n \times R^m \times R^r \to R^p$ – гладкие вектор-функции, причем $g(0,0,0)=0$; $h(0,0,0)=0$. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$x_0 \triangleq x(0)\ ; \quad u_\nu \triangleq u(\nu)\ ; \quad f_\nu \triangleq f(\nu);$$

$$g^\nu \triangleq g\Big(g\Big(...g\Big(g\big(x_0, u_0, f_0\big), u_1, f_1\Big), u_2, f_2\Big)...\Big), u_{\nu-1}, f_{\nu-1}\Big)$$

и допущением, что $h \circ g^\nu$ – однозначное (сюрьективное) вход-выходное отображение системы на интервале $0 \le t \le \nu$.

Ввиду полной идентичности определения индексов каузальности относительно $u(t)$ и $f(t)$, ограничимся далее случаем, когда $f(t) \equiv 0$. Тогда индекс каузальности дискретной по времени системы (2) между входом (будем его далее называть управлением) u_j, $j \in \overline{1,m}$ и выходом y_i, $i \in \overline{1,p}$ согласно [3] – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3)

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(h_i \circ g^t\right) \ne 0.$$

Здесь $h_i(\cdot)$ – i-я строка вектор-функции $h(\cdot)$.

Если ввести обозначение градиента T по μ как $\nabla^\mu(T)$, то индекс каузальности k_i^u системы (2) по выходу y_i от управления u – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3)

$$\nabla^u\left(h_i \circ g^t\right) \ne 0.$$

Наконец, индекс каузальности $\hat{E}$ рассматриваемой системы в целом – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3)

$$\nabla^u\left(h \circ g^t\right) \ne 0.$$

При таком определении индексов каузальности многомерная по входам и выходу система (3) характеризуется двумя матрицами индексов каузальности: по управлению – $K^u = \left[k_{ij}^u\right]_{pm}$ и по возмущению – $K^f = \left[k_{ij}^f\right]_{pr}$, причем индексы за квадратными скобками указывают на размерности этих матриц.

Для непрерывных динамических систем под индексом каузальности k_{ij}^u по входу u_j и выходу y_i следует понимать минимально возможный порядок $\alpha \ge 0$ отличной от нуля в момент $t = 0_+$ производной $y_i^{(\alpha)}(t)$ реакции системы на управление $u_j(t)$ при начальном условии (3).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Будем полагать, что исследуемые процессы в системе (её поведение) описаны в форме (2) и представимы в виде:

$$\begin{aligned} \sigma x(t) &= A x(t) + B u(t) + \varphi_x^x\big(x(t)\big) + \varphi_x^u\big(u(t)\big) + \psi_x\big(x(t), u(t)\big); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + \varphi_y^x\big(x(t)\big) + \varphi_y^u\big(u(t)\big) + \psi_y\big(x(t), u(t)\big), \end{aligned} \tag{4}$$

в которых использованы те же обозначения, что и в (1), (2), а $\varphi_x^x(x)$, $\varphi_x^u(u)$, $\varphi_y^x(x)$, $\varphi_y^u(u)$, $\psi_x(x,u)$ и $\psi_y(x,u)$ – нелинейные вектор-функции указанных аргументов. Нелинейные вектор-функции $\varphi_x^x(x)$, $\varphi_x^u(u)$, $\varphi_y^x(x)$, $\varphi_y^u(u)$ в (4) будем характеризовать в дальнейшем общей для них вектор-функцией $\varphi_k^z(z)$, полагая, что $k \in \{x, y\}$, $z \in \{x, u\}$. Эта функция, в свою очередь, может быть представлена алгебраической суммой вида

$$\varphi_k^z(z) = \varphi_{ko}^z(z) + \sum_{\chi=1}^{g} \varphi_{k\chi}^z(z_\chi), \quad g \in \{n, m\}, \tag{5}$$

т. е. состоящей из суммы вектор-функций скалярных аргументов – переменных состояния или выхода, а также вектор-функции $\varphi_{ko}^z(z)$. В последнюю входят все нелинейные слагаемые $\varphi_k^z(z)$, зависящие от двух и более составляющих вектора z и имеющие относительно них мультипликативную форму.

Таким образом в уравнениях (4) могут быть представлены составляющие

$$\zeta^x(\delta) \overset{\Delta}{=} \varphi_{xo}^x(x) + \varphi_{uo}^x(u) + \psi^x(x,u), \quad \zeta^y(\delta) \overset{\Delta}{=} \varphi_{xo}^y(x) + \varphi_{uo}^y(u) + \psi^y(x,u), \tag{6}$$

имеющие мультипликативную форму относительно элементов векторов x, u или x и u, либо относительно функций от этих величин.

Отдельные алгебраические слагаемые в строках вектор-функций $\zeta^k(\delta)$, где $k \in \{x, y\}$, $\delta \in \{x, u\}$, будем обозначать далее как $\zeta_{ib_i}^k(\delta_\nu)$, причем, номер строки $i \in \overline{1, n}$, если $k = x$, или $i \in \overline{1, p}$, если $k = y$. При этом $\delta_\nu \in R^\mu$; $m + n \ge \mu \ge 2$; $b_i = 1, 2, 3, \ldots$. Число различных вариантов Δ мультипликативных сочетаний δ_ν для каждой конкретной системы фиксировано и, в частности, может быть равным нулю.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ КАУЗАЛЬНОСТИ

При определении индексов каузальности линейных систем типа (1) согласно [3] по матрицам смежности и достижимостей необходимо предварительно сформировать матрицу смежности системы

$$E = \begin{bmatrix} \overline{A}_{nn} & \vdots & \overline{B}_{nm} & \vdots & 0_{np} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{mn} & \vdots & 0_{mm} & \vdots & 0_{mp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{C}_{pn} & \vdots & \overline{D}_{pm} & \vdots & 0_{pp} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

индексы в которой указывают на размерность соответствующих блочных матриц, а матрицы $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ получаются соответственно из A, B, C, D, если в последних ненулевые элементы заменить на единицы. Если в (1) $D \equiv 0$, то вместо матрицы $\overline{D}_{pm}$ в (7) вводится нуль-матрица 0_{pm}. Таким образом, получается квадратная матрица размерности $\alpha \times \alpha$, где $\alpha = n + m + p$.

Матрицы достижимости $SN, N = 1, 2, 3...$ для рассматриваемого класса систем определяются как

$$S N \overset{\Delta}{=} \left[sn_{i\,j} \right]_{\alpha\alpha} = \left(\left(\left(I_\alpha + E \right)^* \right)^N \right)^* = \left(\left(S1 \right)^N \right)^*, \tag{8}$$

где I_α – единичная размерности $\alpha \times \alpha$ матрица, а символ «$*$» означает, что соответствующие преобразования выполняются по правилам двоичной (булевой) арифметики. При этом, если в SN элемент $sn_{ij} = 1$, то это означает, что в диграфе системы от вершины V_j к вершине V_i имеется минимум один маршрут длины N, т. е. состоящий из N дуг. При $s_{ij} = 0$ такие маршруты отсутствуют.

Если представить SN в виде блочной матрицы

$$SN = \begin{bmatrix} SN_{n\,n} & \vdots\ SN_{n\,m} & \vdots\ 0_{n\,p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0_{m\,n} & \vdots\ I_{m\,m} & \vdots\ 0_{m\,p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ SN_{p\,n} & \vdots\ SN_{p\,m} & \vdots\ I_{p\,p} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

то индексы каузальности системы будут определяться блочными матрицами $S\,N_{pm}$, $N = 1, 2, 3,...$. В частности, индекс каузальности системы по входу u_j и выходу y_i определяется как $k_{ij} = q - 1$, где q – наименьшая степень в $S\,N = \left(\left(S1 \right)^q \right)^*$, при которой в матрице SN_{pm} элемент $s_{ij} = 1$. Индексом каузальности k_i системы по выходу y_i будет уменьшенное на единицу значение q, при котором в i-й строке SN_{pm} впервые появится отличный от нуля элемент.

Если исходная система уравнений (2) может быть представлена в форме (4), а входящие в нее функции $\varphi_k^z(z)$ – в форме (5) и при этом

$$\varphi_{xo}^x(x) = \varphi_{uo}^x(u) = \varphi_{xo}^y(x) = \varphi_{uo}^y(u) = \psi^x(x,u) = \psi^y(x,u) \equiv 0,$$

то для определения индексов каузальности системы может быть использован описанный выше способ. Для этого лишь необходимо при формировании ее матрицы смежности E и матриц достижимости $S\,N$ (будем их для этого случая обозначать как $\overline{E}$ и $\overline{S\,N}$) использовать вместо ранее введенных скелетных матриц $\overline{A}_{nn}, \overline{B}_{nm}, \overline{C}_{pn}, \overline{D}_{pm}$ эквивалентные им по топологии исследуемой системы скелетные матрицы

$$\begin{aligned} &\check{A}_{nn} = \left(\overline{A}_{nn} + \hat{A}_{nn} \right)^*; \qquad &\check{B}_{nm} = \left(\overline{B}_{nm} + \hat{B}_{nm} \right)^*; \\ &\check{C}_{pn} = \left(\overline{C}_{pn} + \hat{C}_{pn} \right)^*; \qquad &\check{D}_{pm} = \left(\overline{D}_{pm} + \hat{D}_{pm} \right)^*. \end{aligned} \tag{10}$$

Используемые здесь матрицы $\hat{A}_{nn}, \hat{B}_{nm}, \hat{C}_{pn}, \hat{D}_{pm}$ определяются по вторым слагаемым в (5) – суммам, соответственно, в $\varphi_x^x(x)$, $\varphi_u^x(u)$, $\varphi_x^y(x)$, $\varphi_u^u(u)$. В каждой из этих матриц i-й столбец формируется по соответствующей вектор-функции $\varphi_{k_i}^{z}(z_i)$, представленной в (5). В частности, отображение $\varphi_{x_i}^{x}(x_i)$ в i-й столбец матрицы $\hat{A}_{nn}$ сводится к отображению ненулевых элементов $\varphi_{x_i}^{x}(x_i)$ единичными элементами в этом столбце $\hat{A}_{nn}$. Нулевые элементы переписываются без изменений.

Отметим также, что для подобного класса нелинейных динамических систем легко реализуемым является и способ определения индексов каузальности по диграфам систем, как это описано в [3], если последние построить по матрицам $\check{A}_{nn}, \check{B}_{nm}, \check{C}_{pn}, \check{D}_{pm}$.

Если в модели исследуемой системы имеются мультипликативные составляющие (6), то каждая из таких составляющих $\zeta_{ib_i}^{x}(\delta_\nu)$ в диграфе системы может быть отражена дугами, направленными от всего множества образующих δ_ν вершин из x и/или u в вершину x_i, а составляющая $\zeta_{ib_i}^{y}(\delta_\nu)$ – вершину y_i. Однако расчет индексов каузальности по такому диграфу указанным выше способом становится некорректным, так как непосредственное управление переменной $x_i(y_i)$ через составляющие $\zeta_{ib_i}^{x}(\delta_\nu)$ (соответственно, $\zeta_{ib_i}^{y}(\delta_\nu)$) возможно лишь при одновременном «возбужденном» состоянии всех элементов δ_ν. Не упрощает решение указанной задачи и введение в диграф системы дополнительных вершин, соответствующих всем мультипликативным составляющим ее модели, так как подобный диграф будет иметь изменяемую структуру, к тому же с неоднозначным отображением переменных состояния и управления.

По указанной причине для последующих расчетов индексов каузальности систем, математические модели которых содержат составляющие $\zeta^k(\delta)$, используем наряду с ранее введенными матрицами достижимостей $\overline{S1}$ модифицированные матрицы достижимостей $\overline{S_N 1}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, учитывающие поэтапную «возбудимость» переменных системы от мультипликативных составляющих в (4).

Введем вектор логических переменных $\bar{\delta}$, элементы которого $\bar{\delta}_\nu$, $\nu = \overline{1, \Delta}$ определяются логическим умножением булевых переменных векторов x, u, входящих в эти элементы. При этом для всех управляющих воздействий принимаем

$$\bar{u}_j = 1, \quad j = \overline{1, m}. \tag{11}$$

В этой связи слагаемым $\varphi_{uo}^{x}(u)$, $\varphi_{uo}^{y}(u)$ в (6) всегда будут соответствовать логические переменные $\bar{\delta}_\nu = 1$.

Значения булевых переменных $\bar{x}_i$, $i = \overline{1, n}$, соответствующих переменным состояния x_i системы, будем определять после каждого очередного вычисления $\overline{SN}$ по их блочным матрицам $\overline{SN}_{nm}$, аналогичным SN_{nm} для SN линейной системы в (9). При этом будем считать, что для соответствующего N

$$\bar{x}_{iN} = \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \right)^{*}, \quad i \in \overline{1, n}. \tag{12}$$

Здесь β_{ij} – элемент i-й строки и j-го столбца блок-матрицы $\overline{SN}_{nm}$.

Матрицы достижимости для нелинейных систем с мультипликативными составляющими $\zeta^x(\delta)$, $\zeta^y(\delta)$ определяем по рекуррентной формуле

$$\overline{S(N+1)} = \left(\overline{SN} \cdot \overline{S_N 1}\right)^*, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \tag{13}$$

где $\overline{S_N 1}$ – модифицированная матрица достижимости $\overline{S}1$, получаемая по $\overline{S_{N-1} 1}$ с учетом дополнительных маршрутов (дуг) в диграфе системы, порождаемых мультипликативными составляющими $\zeta^x(\delta)$, $\zeta^y(\delta)$ и определяемых по $\overline{\delta N}$. Последняя представляет собой значение $\overline{\delta}$, вычисленное с учетом (11) и (12) по $\overline{S(N-1)}$, т. е. по матрице достижимости, порядковый номер которой равен $(N-1)$.

Для определения матрицы достижимости $\overline{S}1$ вычисляем

$$\overline{S\,0} = \left(I_\alpha + \overline{E}\right)^* \tag{14}$$

и $\overline{\delta 1}$ с учетом лишь $\varphi^x_{uo}(u)$, $\varphi^y_{uo}(u)$ и преобразуем $\overline{S\,0}$ в $\overline{S\,1}$, используя $\overline{\delta 1}$, подобно тому, как это делается при вычислении $\overline{S_N 1}$ по $\overline{S_{N-1} 1}$.

Если в $\overline{\delta N}$ какой-либо элемент $\overline{\delta N_k}$, $k \in \overline{1, \Delta}$, соответствующий слагаемому в $\zeta^x_i(\delta)$, принимает значение, равное 1, то в *i*-й строке блок-матрицы $\overline{S_N 1}_{nn}$ ($\overline{S_N 1}_{nm}$) при преобразовании $\overline{S_{N-1} 1}$ в $\overline{S_N 1}$ элементы всех столбцов, порядковые номера которых совпадают с порядковыми номерами координат вектора состояния x (управления u), входящих в δN_k, должны быть приняты равными единице. Аналогичным образом видоизменяются $\overline{S_{N-1} 1}_{pn}$ и/или $\overline{S_{N-1} 1}_{pm}$ в блок-матрицы $\overline{S_N 1}_{pn}$, $\overline{S_N 1}_{pm}$ матрицы $\overline{S_N 1}$ в ситуациях, когда $\overline{\delta N_k} = 1$, а определяющая ее δN_k соответствует мультипликативной составляющей в $\zeta^y_i(\delta)$ и содержит сомножителями элементы x и/или u. Остальные элементы $\overline{S_{N-1} 1}$ переписываются в $\overline{S_N 1}$ без изменений.

С учетом введенных обозначений и расчетных соотношений алгоритм определения индексов каузальности для нелинейных систем рассматриваемого класса (4) сводится к следующей последовательности процедур [12, 13].

1. Представить исходную математическую модель системы в форме (5).

2. Сформировать для нее скелетные матрицы $\overline{A}_{nn}, \overline{B}_{nm}, \overline{C}_{pn}, \overline{D}_{pm}$, а при наличии в модели нелинейных вектор-функций скалярных аргументов – и матрицы $\hat{A}_{nn}, \hat{B}_{nm}, \hat{C}_{pn}, \hat{D}_{pm}$.

3. Определить $\check{A}_{nn}, \check{B}_{nm}, \check{C}_{pn}, \check{D}_{pm}$ по (10) и матрицу смежности

$$E = \begin{bmatrix} \overline{A}_{nn} & \vdots & \overline{B}_{nm} & \vdots & 0_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{mn} & \vdots & 0_{mm} & \vdots & 0_{mp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{C}_{pn} & \vdots & \overline{D}_{pm} & \vdots & 0_{pp} \end{bmatrix}.$$

4. Сформировать по мультипликативным составляющим модели вектор δ и вектор-функции $\zeta^x(\delta)$, $\zeta^y(\delta)$.

5. Принять $N=0$ и вычислить $\overline{S0}$ согласно (14).

6. Принять $N=N+1$.

7. Вычислить $\overline{\delta N}$, используя (11), (12) и $\overline{S(N-1)}$.

8. Вычислить $\overline{S_N 1}$. Если при этом все элементы ее блок-матрицы $\overline{S_N 1}_{pm}$ равны единице, перейти к п. 10. В противном случае – вычислить $\overline{S(N+1)}$ согласно (13).

9. Если все элементы $\overline{S(N+1)}_{pm}$ равны единице или если не все элементы этой матрицы равны единице, но при этом все элементы вектора $\overline{\delta N}$ равны единице и $\overline{S(N+1)}=\overline{SN}$, вычислить индексы каузальности системы согласно приведенным ниже указаниям (перейти к п. 10). В противном случае перейти к п. 6.

10. Вычислить индексы каузальности.

Как и в случае линейных систем, индексы каузальности систем рассматриваемого класса определяются по блок-матрицам $\overline{SN}_{pm}$, если модель (5) не содержит мультипликативных составляющих. При этом способ их вычисления аналогичен тому, что был использован для линейных систем. В частности, $k_{ij}=q-1$, где q – наименьшее значение N, при котором в матрице $\overline{SN}$, представленной в виде (9), в блоке $\overline{SN}_{pm}$ элемент $\overline{SN}_{pm}(i,j)$ равен единице. Индекс каузальности системы по выходу y_i находится как уменьшенное на единицу значение q, при котором в *i*-й строке $\overline{SN}_{pm}$ впервые появляется отличный от нуля элемент.

При наличии в математической модели нелинейной системы мультипликативных составляющих описанный выше способ определения индексов каузальности для многомерных по входу систем может дать искаженные результаты при оценке этих индексов между конкретными выходами и теми управляющими входами системы, которые входят в $\varphi^x_{uo}(u)$, $\varphi^y_{uo}(u)$, а также в составляющие $\psi_x(x,u)$ и $\psi_y(x,u)$. Например, в двигателе постоянного тока (ДПТ) с независимым возбуждением при отсутствии напряжения в якорной цепи или цепи возбуждения индексы каузальности между скоростью вращения и этими входами в отдельности равны ∞, т. е. из состояния покоя ДПТ не может быть выведен в режим вращения только при одностороннем питании.

В этой связи целесообразно использовать понятия безусловных и условных индексов каузальности. При этом под безусловным индексом каузальности k_{ij} между входом u_j, $j\in\overline{1,m}$ и выходом y_i, $i\in\overline{1,p}$ будем понимать его значение, определенное при условии, что все составляющие вектора управления u, кроме u_j, тождественно равны нулю.

Каждый из условных индексов каузальности k^{ε}_{ij}, где ε – выбранная совокупность составляющих вектора $u(t)$, включающая u_j, $j\in\overline{1,m}$, а $j\in\overline{1,m}$, определяется по описанному выше алгоритму при исключении из правых частей математической модели системы (4) тех слагаемых, которые содержат управляющие воздействия, не принадлежащие множеству ε. Если во всем множестве матриц достижимости $\overline{SN}$ у их блок-матриц $\overline{SN}_{pm}$ элементы $\overline{SN}_{pm}(i,j)$ равны нулю, то условный индекс каузальности k^{ε}_{ij} данной системы следует считать равным бесконечности. Это означает, что в данной системе добиться изменений y_i только с помощью включенных в множество ε составляющих вектора u невозможно.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИНДЕКСАХ КАУЗАЛЬНОСТИ

Знание индексов каузальности объектов управления (ОУ) позволяет более целенаправленно вести схемотехническое проектирование для них систем автоматического управления (САУ), что особенно важно для многомерных по входу и выходу объектов, в том числе для объектов, которые имеют избыточную размерность вектора управления [12, 13].

Для многомерного по входу и выходу объекта матрица индексов каузальности по управляющим воздействиям дает информацию о том, какими вход-выходными связями обладают эти объекты, т. е. какова структура его внутренних взаимосвязей. В частности, равные бесконечности индексы каузальности свидетельствуют о том, что между соответствующими входами и выходами ОУ отсутствуют причинно-следственные связи, а значит, такие каналы принципиально не могут обеспечить управляемость объекта.

Отмеченный выше физический смысл индексов каузальности дискретных по времени систем позволяет заключить, что они характеризуют минимально достижимое время реагирования каждой из управляемых величин ОУ на входные управляющие воздействия. Чем меньше индекс каузальности вход-выходного канала объекта, тем меньше задержка реакции ОУ по этому каналу. Поэтому при наличии альтернативных вариантов схемотехнических решений САУ предпочтение следует отдать тому из них, который обеспечивает минимальные индексы каузальности для каждой или хотя бы части управляемых переменных. Аналогичным образом следует поступать и в случае непрерывных по времени объектов управления.

Проведенные нами исследования показали [12, 14], что индексы каузальности объекта управления предопределяют реализуемую в создаваемой для него системе управления функциональную воспроизводимость, т. е. способность такой системы реализовывать заданного класса временные функции в качестве своих выходов при возможных в них начальных условиях и управлениях. Применительно к объектам и системам автоматического управления вышеуказанное свойство представляет несомненный практический интерес, так как очерчивает класс реализуемых без заметных искажений командных (задающих) воздействий. Это особенно важно для САУ, реализующих режимы слежения и программного управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Каузальность вход-выходных динамических систем правомерно считать таким же фундаментальным свойством этих систем, как управляемость, достижимость, наблюдаемость и восстанавливаемость (УДНВ) [10]. Предложенные ранее автором статьи для квалиметрии каузальности индексы каузальности следует отнести к структурным инвариантам для систем указанного выше класса, к которым относятся также и структурные индексы управляемости, достижимости, наблюдаемости и восстанавливаемости.

Для нелинейных многомерных по входу и/или выходу динамических систем расчет индексов каузальности по диграфам этих систем становится проблематичным. Более предпочтительным для их вычисления в таких случаях является описанный в статье алгоритм, базирующийся на использовании матриц смежности и достижимости системы.

В тех случаях, когда в математической модели вход-выходных отображений системы имеются мультипликативные относительно переменных состояния и выхода системы слагаемые типа $\psi_x(x,u)$ и/или $\psi_y(x,u)$ в (4), каузальность системы, как показано в данной статье, следует характеризовать, используя и условные индексы каузальности, введенные автором в данной статье.

Определение индексов каузальности вход-выходных динамических систем, в частности, объектов и систем автоматического управления, позволяет оценивать структуру их вход-выходных (внутренних) взаимосвязей, а также потенциально достижимую в них функциональную воспроизводимость – способность реализовывать заданного класса временные функции в качестве своих выходов при различных начальных условиях и управлениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hammer J.* Fraction representations of non-linear systems: a simplified approach // International Journal of Control. – 1986. – Vol. 46, № 2. – P. 455–472.
2. *Lee H.G., Aropastathis A., Mareus S.I.* Linearisation of discrete-time systems // International Journal of Control. – 1987. – Vol. 45, № 5. – P. 1803–1822.
3. *Малышенко А.М.* Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 32–36.
4. *Commault C., Lafay J.F., Malarbe M.* Structure of linear systems. Geometric and transfer matrix approaches // Kybernetika. – 1991. – Vol. 27, № 3. – P. 170–185.
5. *Hammer J.* Stabilization of non-linear systems // International Journal of Control. – 1986. – Vol. 44, № 5. – P. 1349–1381.
6. *Chan J.-T., Wei L.-F.* Adaptive multi-channel signal tracking controller for minimum or nonminimum phase systems // International Journal of Control. – 1989. – Vol. 50, № 1. – P. 65–73.
7. *Rao S.K., Chen C.-T.* Design of minimal-degree compensators with assignable poles or structure // Automatica. – 1987. – Vol. 23, № 2. – P. 241–245.
8. *Lee H.G., Aropostathis A., Mareus S.I.* Linearization of discrete-time systems // International Journal of Control. – 1987. – 45, № 5. – P. 1803–1822.
9. *Roppenecker G., Lohmann B.* Vollstandige Modale Synthese von Entkopplungs-regelungen // Automatisierungstechnik. – 1988. – Vol. 36, № 11. – S. 434–441.
10. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
11. *Hirschorn R.M., Davis J.H.* Global output tracking for nonlinear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1988. – Vol. 26, № 6. – P. 1321–1330.
12. *Малышенко А.М.* Системы автоматического управления с избыточной размерностью вектора управления. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2005. – 302 с.
13. *Малышенко А.М.* Индексы каузальности динамических систем и их использование в схемотехническом проектировании и при оценке функциональной воспроизводимости систем автоматического управления // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, № 5. – С. 37–43.
14. *Малышенко А.М., Рыбеков Е.А., Кочеткова Е.А.* Программное обеспечение для расчета индексов каузальности вход-выходных линейных динамических систем: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619662 от 13.08.2013 г.

Малышенко Александр Максимович, доктор технических наук, профессор, действительный член Международной академии высшей школы и Академии электротехнических наук Российской Федерации, профессор кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики Национального исследовательского Томского политехнического университета. Основные направления научных исследований – теория автоматического управления, управление подвижными объектами. Имеет более 250 публикаций, в том числе 11 монографий. E-mail: mam@tpu.ru

Definition of causality indexes of input-output nonlinear dynamic systems[*]

A.M. MALYSHENKO

National research Tomsk polytechnic university, 30 prospect Lenina, Tomsk, 634050, Russian Federation, doctor of technical Sciences, professor of integrated computer control systems department, e-mail: mam@tpu.ru

This article contains information about causality – one of the fundamental properties of input-output of dynamic systems, in particular, objects and automatic control systems. This property belongs to the same group as the fundamental properties of control systems, that and controllability, reachability, observability, recoverability. This article includes a classification of dynamic systems by types of causality, a mathematically rigorous definition of "the index of causality", which was proposed by the author before, as well as a description of the method of calculation of indexes of causality for input-output nonlinear multidimensional input and/or output dynamic systems and the algorithm of its realization. This method is based on the using of matrices of the adjacency and the reachability of systems. The author has put into this article the concept of conditional index causality ". Such indexes should be applied in cases where a mathematical model of non-linear dynamic systems in the form of "input-state-output" include the multiplicative components on the elements of the vector of state and/or the output of systems. Indexes of the causality of dynamic systems enable you to define the structure of input-output (internal) connection in these systems. They can be used effectively in meeting the challenges of identification of ob-

[*] *Received 23 April 2014.*

jects with multidimensional inputs and outputs, as well as in the task autonomization control outputs in those objects. Indexes of causality determine also functional reproducibility of systems, i.e. the class of functions that can be implemented on their output under specified sets of initial conditions and the possible control.

Keywords: multidimensional on input and output system, nonlinear dynamic system, automatic control system, fundamental properties of input-output systems, causality, causality types, indexes of causality, conditional and unconditional indexes of causality, definition and calculating causality indexes , algorithm, scalar and multiplicative vector-functions, digraph of system, matrixes of adjacency and reachability

REFERENCES

1. Hammer J. Fraction representations of non-linear systems: a simplified approach. International Journal of Control, 1986, vol. 46, no. 2, pp. 455-472.

2. Lee H.G., Aropastathis A., Mareus S.I. Linearisation of discrete-time systems. International Journal of Control, 1987, vol. 45, no. 5, pp. 1803-1822.

3. Malyshenko A.M. Opredelenie indeksov kauzal'nosti upravliaemykh dinamicheskikh sistem [Determination of causality indexes of controlled dynamic systems]. *Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika – Proceedings of the Academy of Sciences USSR. Technical cybernetics*, 1990, no. 1, pp. 32-36.

4. Commault C., Lafay J. F., Malarbe M. Structure of linear systems. Geometric and transfer matrix approaches. Kybernetika, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 170-185.

5. Hammer J. Stabilization of non-linear systems. International Journal of Control, 1986, vol. 44, no. 5, pp. 1349-1381.

6. Chan J.-T., Wei L.-F. Adaptive multi-channel signal tracking controller for minimum or nonminimum phase systems. International Journal of Control. 1989, vol. 50, no. 1, pp. 65-73.

7. Rao S.K., Chen C.-T. Design of minimal-degree compensators with assignable poles or structure. Automatica, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 241-245.

8. Lee H.G., Aropostathis A., Mareus S.I. Linearization of discrete-time systems. International Journal of Control, 1987, vol. 45, no. 5, pp. 1803-1822.

9. Roppenecker G., Lohmann B. Vollstandige Modale Synthese von Entkopplungs-regelungen. Automatisierungstechnik, 1988, vol. 36, no. 11, ss. 434-441.

10. Streits V. *Metod prostranstva sostoyanii v teorii diskretnykh lineinykh sistem upravleniya* [Method of state spaces in theory of digital linear control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 296 p.

11. Hirschorn R.M., Davis J.H. Global output tracking for nonlinear systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 1988, vol. 26, no. 6, pp. 1321-1330.

12. Malyshenko A.M. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s izbytochnoi razmernost'yu vektora upravleniya* [Automatic control systems with redundant dimension of control vector]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2005. 302 p.

13. Malyshenko A.M. Indeksy kauzal'nosti dinamicheskikh sistem i ikh ispol'zovanie v skhemotekhnicheskom proektirovanii i pri otsenke funktsional'noi vosproizvodimosti sistem avtomaticheskogo upravleniia [Dynamical systems causality indices and their use in schematic design and in functional reproducibility assessment of automatic control systems]. *Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 37-43.

14. Malyshenko A.M., Ribakov E.A., Kochetkova E.A. *Programmnoe obespechenie dlia rascheta indeksov kauzal'nosti vkhod-vykhodnykh lineinykh dinamicheskikh sistem* [Software for calculating causality indexes of linear input-output dynamic systems]. State registration certificate of computer program, no. 2013619662, 2013.