ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 57, № 4, 2014, с. 41–48

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 57, No. 4, 2014, pp. 41–48

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL AND IDENTIFICATION

УДК 621.321

Параметры управления пониженного порядка одноканальных систем и корневые координаты*

А.В. ЧЕХОНАДСКИХ[1], С.Н. КАЛАШНИКОВ[2]

[1] 630073, *РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, заведующий кафедрой инженерной математики. E-mail: alcheh@mail.ru*
[2] *654007, РФ, г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42, Сибирский государственный индустриальный университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: s.n.kalashnikov@yandex.ru*

В статье рассматривается важная составляющая алгебраического метода синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка для линейных одноканальных систем. Полиномиальный подход к нахождению оптимального регулятора для такой системы опирается на геометрическую интерпретацию инженерных представлений об оптимальности: полюса системы должны располагаться в максимально сдвинутой влево области заданного вида в левой комплексной полуплоскости. Максимальный сдвиг, как правило, означает, что на правой границе области, накрывающей все полюса – на прямой, на конусе, на гиперболе, оказывается наибольшее их число. Уравнения относительно координат этих правых полюсов (корневых координат) связывают степени свободы, обеспечивающиеся настраиваемыми параметрами регулятора. А само взаимное расположение полюсов соответствует критической корневой диаграмме.

Критическое расположение полюсов означает наличие у характеристического многочлена системы определенного множителя – корневого многочлена. Коэффициенты характеристического многочлена зависят от параметров управления, причем для одноканальных систем эта зависимость линейна, тогда как коэффициенты корневого многочлена зависят от корневых координат. Поделив характеристический многочлен на корневой и приравняв остаток к нулю, можно получить систему уравнений, связывающую параметры управления и корневые координаты, что позволяет выразить первые через последние. Этот прием был продемонстрирован на нескольких содержательных примерах, однако обоснования непустоты и достаточности системы уравнений не было. В статье теоретически восполняется указанный пробел; рассмотрение основывается на анализе свойств многочленов от лапласовой переменной s, коэффициенты которых оказываются линейными функциями от параметров управления и симметрическими многочленами от правых корней.

Ключевые слова: автоматическое управление, оптимальное управление, линейная одноканальная система, регулятор пониженного порядка, оптимальное расположение полюсов, корневые координаты, критическая корневая диаграмма, корневой многочлен, симметрические многочлены

DOI: 10.17212/1814-1196-2014-4-41-48

ВВЕДЕНИЕ

Построение регуляторов пониженного порядка для линейных систем автоматического управления – классическая область теории автоматического управления, в которой даже для одноканальных систем остается немало содержательных проблем [1, 2]. Одной из особенностей развития области является разрыв между основательно разработанной теорией регуляторов полного порядка, обеспечивающих заданное конструктором расположение полюсов замкнутой системы (и тем самым нужные значения основных характеристик переходных процессов), с одной

* *Статья получена 15 августа 2014 г.*
Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию № 2014/138, проект № 1052.

стороны, и преобладанием в промышленной и технической практике [3] регуляторов малых порядков, для расчета которых не предложено универсальных и надежных численных методов [4], в том числе для ПИ- и ПИД-регуляторов, синтезу и настройке которых посвящена обширная литература [5, 6], – с другой. Специфика регуляторов пониженного порядка заключается в том, что за счет изменения их параметров нельзя добиться произвольного расположения полюсов системы, а достижение оптимального расположения оказывается задачей, наталкивающейся на ряд типичных трудностей: невыпуклость, многоэкстремальность, недифференцируемость с неограниченными производными. Перечень методов, позволяющих добиваться оптимального по различным критериям расположений полюсов систем пониженного порядка, также труднообозрим; некоторые работы идейно близки к настоящей статье (см. напр., [7–12]).

Главная идея алгебраического метода отыскания критических (оптимальных и субоптимальных) расположений полюсов заключается в отыскании таких точек в пространстве C параметров управления, которым соответствует наличие на правой границе области расположения полюсов (полуплоскости, конуса, внутренности параболы или левой ветви гиперболы на комплексной плоскости) максимального их числа. Расположение этих граничных полюсов – «правых» корней характеристического уравнения системы – описывается несколькими действительными переменными χ, которые профессор А.А. Воевода в конце 1990-х годов предложил именовать корневыми координатами [13]. Поскольку в этом случае характеристический многочлен должен делиться на произведение скобок, содержащих все правые корни, возникает связь между параметрами управления C, входящими в коэффициенты характеристического многочлена, и корневыми координатами χ. В ряде содержательных примеров удавалось выразить параметры управления через корневые координаты из системы уравнений, которая возникает после приравнивания к нулю остатка от деления характеристического многочлена на корневой [14–16].

Настоящая статья посвящена обоснованию того, что такая система уравнений в случае критического расположения полюсов нетривиальна, не вырождена и обеспечивает связь параметров управления и корневых координат.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Пусть объект (plant) описывается передаточной функцией $D_{pl}(s)^{-1}N_{pl}(s)$, а регулятор (controller) – функцией $D_C(s)^{-1}N_C(s)=\left(s^u+d_{u-1}s^{u-1}+\ldots+d_0\right)^{-1}\left(b_v s^v+b_{v-1}s^{v-1}+\ldots+b_0\right)$, где $\deg D_{pl}(s)\ge\deg N_{pl}(s),\ u\ge v$, причем в соответствии с требованием правильности одно из неравенств является строгим [7]. Характеристический многочлен одноканальной системы возникает из Диофантова соотношения

$$
\begin{aligned}
f_C(s)&=D_{pl}(s)D_C(s)+N_{pl}(s)N_C(s)=\\
&=D_{pl}(s)\left(s^u+d_{u-1}s^{u-1}+\ldots+d_0\right)+N_{pl}(s)\left(b_v s^v+b_{v-1}s^{v-1}+\ldots+b_0\right),
\end{aligned}
$$

откуда видно, что коэффициенты характеристического многочлена $f_C(s)=s^n+$ $+a_{n-1}(C)s^{n-1}+\ldots+a_0(C)$ линейно зависят от $k=u+v+1$ параметров регулятора $C=(d_0,\ldots,d_{u-1},b_0,\ldots,b_v)$.

В этих условиях пониженный порядок регулятора означает, что его свободных параметров недостаточно для обеспечения произвольного расположения корней $z_1,\ldots,z_n$ замкнутой системы, т. е. k-мерное многообразие коэффициентов многочлена $f_C(s)$ строго содержится в пространстве $\mathbf{R}^n$. Если считать, что линейное вложение $C\to(a_0,\ldots,a_{n-1})$ не вырождено, то пониженный порядок регулятора, как правило, сводится к неравенству $k=\dim C<n=\deg f_C(s)$.

Качество управления, достигающегося при каждом значении параметров, определяется наименее устойчивыми корнями. Большая серия работ А.М. Шубладзе и его соавторов (см., напр., [8–11]), посвящена исследованию систем с наибольшей степенью устойчивости, достижение которой сопровождается наличием на прямой $\operatorname{Re} s = \max \operatorname{Re}(z_1,...,z_n)$ наибольшего числа полюсов системы, действительных и комплексно сопряженных, простых и кратных.

Перечень таких возможностей для разных типов устойчивости описывается критическими корневыми диаграммами [16, 17], формализующими различные варианты тех взаимных расположений корней, правая граница которых на комплексной плоскости не может быть смещена левее для оптимальных регуляторов (или существенно левее – для субоптимальных) за счет изменения параметров C. Из-за того, что каждая степень свободы в пространстве параметров связывается условием наличия на правой границе действительного корня или комплексной пары, число m этих правых корней оказывается строго больше числа параметров регулятора: $\dim C = k < m$ [16].

2. КОРНЕВЫЕ КООРДИНАТЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

Каждой критической корневой диаграмме соответствует корневой многочлен $p_\chi(s) = (s - z_1) \cdot ... \cdot (s - z_m)$ [15, 16], который явно включает в себя только корни $z_1,...,z_m$, находящиеся на правой границе области расположения всех полюсов системы. Значения этих правых корней выражаются через $k \le m$ корневых координат $\chi = (\chi_1,...,\chi_k)$, число которых совпадает с числом различных корней среди $z_1,...,z_m$. Условие критичности диаграммы выражается в соотношениях для координат, которые связывают k степеней свободы пространства параметров.

Для реализации того расположения полюсов системы, которое описывается критической диаграммой, необходимо, чтобы характеристический многочлен $f_C(s)$ содержал множитель $p_\chi(s)$. Выполнив деление многочленов с остатком $f_C(s) = p_\chi(s) q_{C,\chi}(s) + r_{C,\chi}(s)$, нужно приравнять коэффициенты получающегося остатка $r(s)$ к нулю; это дает систему алгебраических уравнений, связывающих параметры C и χ. Такая система в [14–16] оказывалась линейной по параметрам управления и позволяла выразить их через корневые координаты.

Разнообразие возникающих возможностей затрудняло формулировку достаточных условий того, что степень остатка $\deg r_{C,\chi}(s)$ точно равна $\deg p_\chi(s) - 1$, все коэффициенты остатка ненулевые и каждый из них задает нетривиальное уравнение связи C и χ, а все вместе они позволяют получить выражение C и $C = C(\chi)$. Далее указываются соображения, которые позволяют рассчитывать на это в общем случае.

Как хорошо известно [18], коэффициенты многочлена $p(s)$ являются элементарными симметрическим многочленами σ_j от корней:

$$p(s) = s^m - \sigma_1 s^{m-1} + ... + (-1)^m \sigma_m = s^m - \xi_1 s^{m-1} - ... - \xi_m, \text{ где } \xi_j = (-1)^{j+1} \sigma_j .$$

Все они выражаются через корневые координаты χ, причем дифференциальный ранг (ранг матрицы Якоби) совпадает с числом различных корней $r(\partial \sigma_i / \partial z_j) = k$ [19] и, следовательно, корневых координат.

Предложение 1. Пусть $\varsigma(z_1,...,z_m)$ – симметрический многочлен, обращающийся в ноль при отождествлении некоторой пары переменных: например, $\varsigma(z_2, z_2, z_3,...,z_m) = 0$. Тогда он делится на дискриминант $\prod_{1 \le i < j \le m} (z_i - z_j)^2$.

Доказательство. Группируя попарно входящие в $\varsigma(z_1,...,z_m)$ одночлены, которые взаимно уничтожаются при подстановке $z_1 = z_2$, можно вынести разность $z_1 - z_2$ как общий множитель и представить данный многочлен в виде $\varsigma(z_1,...,z_m)=(z_1-z_2)\varsigma_1(z_1,...,z_m)$. Очевидно, $\varsigma_1(z_1,z_2...,z_m)$ является кососимметрическим многочленом, меняющим знак при перестановке z_1 и z_2, в силу чего $\varsigma_1(z_2,z_2,z_3,...,z_m)=0$ и $\varsigma_1(z_1,...,z_m)=(z_1-z_2)\varsigma_2(z_1,...,z_m)$. В итоге $\varsigma(z_1,...,z_m)=(z_1-z_2)^2\varsigma_2(z_1,...,z_m)$. В силу симметричности исходного многочлена по всем переменным можно записать $\varsigma(z_1,...,z_m)=\prod\limits_{1\le i<j\le m}(z_i-z_j)^2\varsigma_0(z_1,...,z_m)$.

Следствие 1. В условиях предложения 1 $\deg\varsigma(z_1,...,z_m)\ge m(m-1)$.

Предложение 2. Пусть корневой многочлен $p(s,z_1,...,z_m)=s^m-\xi_1 s^{m-1}-...-\xi_m$ сепарабелен. Тогда все коэффициенты частного $q_t(s,z_1,...,z_m)$ и остатка $r_t(s,z_1,...,z_m)$ от деления одночлена s^t на многочлен $p(s)$ при $t\ge m$ являются ненулевыми симметрическими многочленами от $z_1,...,z_m$.

Данное утверждение вытекает из того, что все коэффициенты многочленов $q_t(s)$ и $r_t(s)$ оказываются нетривиальными многочленами от элементарных симметрических функций $\xi_1,...,\xi_m$ и в силу алгебраической независимости последних [18] не обращаются в ноль. Например,

$$s^4=\left(s^4-\xi_1 s^3-\xi_2 s^2-\xi_3 s-\xi_4\right)1+\left(\xi_1 s^3+\xi_2 s^2+\xi_3 s+\xi_4\right);$$

$$s^5=\left(s^4-\xi_1 s^3-\xi_2 s^2-\xi_3 s-\xi_4\right)[s+\xi_1]+\left\{\left(\xi_1^2+\xi_2\right)s^3+(\xi_1\xi_2+\xi_3)s^2+(\xi_1\xi_3+\xi_4)s+\xi_1\xi_4\right\};$$

$$s^7=\left(s^4-\xi_1 s^3-\xi_2 s^2-\xi_3 s-\xi_4\right)\left[s^3+\xi_1 s^2+\left(\xi_1^2+\xi_2\right)s+\xi_1^3+2\xi_1\xi_2+\xi_3\right]+$$
$$+\left\{\left(\xi_1^4+3\xi_1^2\xi_2+2\xi_1\xi_3+\xi_2^2+\xi_4\right)s^3+\left(\xi_1^3\xi_2+\xi_1^2\xi_3++2\xi_1\xi_2^2+\xi_1\xi_4+2\xi_2\xi_3\right)s^2+\right.$$
$$\left.+\left(\xi_1^3\xi_3+\xi_1^2\xi_4+2\xi_1\xi_2\xi_3+\xi_2\xi_4+\xi_3^2\right)s+\xi_1^3\xi_4+2\xi_1\xi_2\xi_4+\xi_3\xi_4\right\}$$

и т. д.; в квадратные скобки заключено частное $q_t(s)$, в фигурные – остаток $r_t(s)$.

Замечание. При делении суммарная степень по переменным $s,z_1,...,z_m$ всех возникающих одночленов сохраняется; у входящих в остаток $r_t(s)$ одночленов суммарная степень по $z_1,...,z_m$ равна t, а в частном $q_t(s)$, соответственно, эти суммарные степени равны $t-m$. В частности, степени коэффициентов остатков как функций от корней $z_1,...,z_m$ с ростом t повышаются. Это видно и из вышеприведенных примеров.

Следствие 2. Из замечания и следствия 1 ясно, что при несепарабельном корневом многочлене $p(s)$ и соотношении степеней $t<m(m-1)$ все коэффициенты остатков $r_t(s)$ не обращаются в тождественный ноль.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 3. Пусть $f_1(s),...,f_l(s)$ – некоторые многочлены, деление которых на многочлен $p(s)$ приводит к остаткам $r_1(s),...,r_l(s)$ и частным $q_1(s),...,q_l(s)$. Тогда деление линейной комбинации $\beta_1 f_1(s)+...+\beta_l f_l(s)$ на многочлен $p(s)$ дает остаток $r(s)=\beta_1 r_1(s)+...+\beta_l r_l(s)$ и частное $q(s)=\beta_1 q_1(s)+...+\beta_l q_l(s)$.

Положив $f_n(s)=s^n,...,f_m(s)=s^m$, $r_0(s)=a_{m-1}(C)s^{m-1}+...+a_0(C)$, применим предложение 3 к характеристическому и корневому многочленам системы:

$$f_C(s)=s^n+a_{n-1}(C)s^{n-1}+...+a_0(C)=(q_n(s)+a_{n-1}(C)q_{n-1}(s)+...+a_m(C)q_m(s))p_\chi(s)+$$
$$+r_n(s)+a_{n-1}(C)r_{n-1}(s)+...+a_m(C)r_m(s)+r_0(s).$$

Предложение 4. Остатки $r_m(s)...,r_n(s)$ линейно независимы над полем **R**.

Предположим, что $\alpha_m r_m(s)+...+\alpha_n r_n(s)=0$ и n_1 – максимальный номер, для которого $\alpha_{n_1}\neq 0$. Подставив $r_k(s)=s^k-p(s)q_k(s)$, получим равенство $\alpha_m s^m+...+\alpha_{n_1}s^{n_1}=$ $=p(s)[\alpha_m q_m(s)+...+\alpha_{n_1}q_{n_1}(s)]$. Если многочлен $\alpha_m s^m+...+\alpha_{n_1}s^{n_1}$ нетривиален, то он имеет n_1 фиксированных корней $\zeta_1,...,\zeta_{n_1}$ в поле **C**, считая с их кратностями. Придавая корневым переменным $z_1,...,z_m$ значения, отличные от $\zeta_1,...,\zeta_{n_1}$, приходим к противоречию с равенством $\alpha_m s^m+...+\alpha_{n_1}s^{n_1}=p(s)[\alpha_m q_m(s)+...+\alpha_{n_1}q_{n_1}(s)]$.

Следствие 3. Точно так же устанавливается, что остатки $r_m(s),...,r_n(s)$ линейно независимы над кольцом $\mathbf{R}(C)$. Это свойство легко усматривается также и из различия в степенях коэффициентов $r_m(s)...,r_n(s)$ как функций от корней (см. замечание к предложению 2).

Предложение 5. Остаток от деления характеристического многочлена на корневой

$$r_{C,\xi}(s)=r_n(s,\xi)+a_{n-1}(C)r_{n-1}(s,\xi)+...+a_m(C)r_m(s,\xi)+r_0(s)=$$
$$=r_n(s,\xi)+a_{n-1}(C)r_{n-1}(s,\xi)+...+a_m(C)r_m(s,\xi)+a_{m-1}(C)s^{m-1}+...+a_0(C)$$

не содержит тождественно нулевых коэффициентов при степенях s.

Это следует из того, что коэффициенты при переменной s остатков $r_0(s,\xi),r_m(s,\xi),...,r_n(s,\xi)$ оказываются нетривиальными линейными комбинациями одночленов различных степеней от корней $z_1,...,z_m$ (см. предложение 2 и замечание к нему).

Теорема (А.В. Чехонадских). Пусть зависимость коэффициентов характеристического многочлена $f_C(s)=s^n+a_{n-1}(C)s^{n-1}+...+a_0(C)$ от $k<n$ параметров управления $C=(c_1,...,c_k)$ линейна и невырожденна, а корни $z_1,...,z_m$ многочлена $p_\chi(s)=(s-z_1)\cdot...\cdot(s-z_m)$, соответствующего некоторой критической корневой диаграмме, выражаются через $l\le m$ корневых координат χ, причем $m\le n<m(m-1)$. Тогда приравнивание к нулю остатка $r_{C,\chi}(s)$ от деления характеристического многочлена на корневой позволяет выразить параметры управления C через корневые координаты χ.

Доказательство. Как указано в разделе 1, число m корней, реализующих корневую диаграмму, больше числа k параметров управления: $k<m$. По предложению 2 и следствию 2 $\deg r_{C,\chi}(s)=m-1$, причем никакие коэффициенты многочлена $r_{C,\chi}(s)$ при переменной s не обращаются в тождественный ноль (предложение 5). Система уравнений, полученная из приравнивания к нулю коэффициентов при различных степенях переменной s:

$$r_n(s,\xi)+a_{n-1}(C)r_{n-1}(s,\xi)+...+a_m(C)r_m(s,\xi)+a_{m-1}(C)s^{m-1}+...+a_0(C)=0$$

содержит m линейных уравнений относительно коэффициентов $a_0(C),...,a_{n-1}(C)$. Очевидно, ранг этой системы также равен m (слева в матрицу системы входит единичный блок порядка m). Выбрав k коэффициентов $a_j(C)$, зависимость которых от параметров управления C взаимно однозначна, выразим их из этой системы через многочлены $\xi_1,...,\xi_m$ (это возможно, так как по предложению 4 столбцы, не входящие в единичный блок, независимы), что позволяет выразить также параметры управления $C=(c_1,...,c_k)$ через корневые координаты χ.

Замечание. Подстановка полученных алгебраических выражений параметров управлений в остальные $m-k$ уравнений приводит к системе уравнений относительно корневых координат. Ее совместность является необходимым условием реализуемости критической корневой диаграммы, а ее решение позволяет указать конкретные точки в пространстве параметров и выяснить, действительно ли расположение полюсов отвечает критической диаграмме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанная теорема теоретически обеспечивает важнейший этап алгебраического метода синтеза линейных САУ с регулятором пониженного порядка. Осуществляемое в серии примеров с объектами 6-го порядка и регуляторами различной структуры явное выражение параметров управления через корневые координаты опирается на очевидные свойства системы уравнений $r_{C,\chi}(s)=0$; через корневые координаты выражается также и целевая функция – численная характеристика расположения полюсов и достигнутого качества управления. Очевидность этих свойств уравнений в каждом из примеров не позволяла, однако, гарантировать их универсальность даже для линейных одноканальных систем.

Здесь возможность обращения зависимости полюсов системы от параметров управления установлена при достаточно широких предположениях, выполняющихся в большинстве естественно возникающих случаев. Во-первых, это инъективность вхождения параметров регулятора в коэффициенты характеристического многочлена замкнутой системы; во-вторых, это соотношение степеней $n<m(m-1)$ характеристического (n) и корневого (m) многочленов, а поскольку степень m связана с числом параметров управления, то приведенное неравенство означает отсутствие слишком большого разрыва между порядками объекта и регулятора.

Авторы сердечно благодарны профессору А.А. Воеводе, предложившему концепцию корневых координат и поставившему ряд исследовательских проблем в этом направлении. Большую помощь в работе авторы получили от канд. физ.-мат. наук А.Н. Корюкина, который на нескольких содержательных примерах продемонстрировал алгебраический метод синтеза и обеспечил практическую базу для теоретической разработки этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Unsolved problems in mathematical systems and control theory // Ed. by V.D. Blondel, A. Megretski. – Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2004. – 350 p.

2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7–46.

3. *Kano M., Ogawa M.* The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey // Journal of Process Control. – 2010. – Vol. 20, iss. 9. – P. 969–982. – doi:10.1016/j.jprocont.2010.06.013.

4. *Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D.* Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions // Automatica. – 2003. – Vol. 39, iss. 8. – P. 1479–1485. – doi:10.1016/S0005-1098(03)00129-8.

5. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры / В.А. Бойченко, А.П. Курдюков, В.Н. Тимин, М.М. Чайковский, И.Б. Ядыкин // Управление большими системами. – 2007. – Вып. 19. – С. 23–126.

6. *Saeki M., Aimoto K.* PID controller optimization for H_∞-control by linear programming // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2000. – Vol. 10, iss. 2. – P. 83–99. – doi: 10.1002/(SICI)1099-1239(200002)10:2<83::AID-RNC464>3.0.CO;2-L.

7. *Волгин Л.Н.* Оптимальное дискретное управление динамическими системами. – М.: Наука, 1986. – 240 с.

8. *Шубладзе А.М.* Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 3. – С. 93–105.

9. *Шубладзе А.М.* Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 67–79.

10. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 1 / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, А.А. Якушева, С.И. Кузнецов // Управление большими системами. – 2008. – Вып. 22. – С. 86–100.

11. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 2 / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, А.А. Якушева, С.И. Кузнецов // Управление большими системами. – 2008. – Вып. 23. – С. 39–55.

12. *Веревкин В.И., Калашников С.Н., Быстров В.А.* Оптимизация управлений электрошлаковой наплавки с помощью математического моделирования // Известия вузов. Черная металлургия. – 1992. – № 9. – С. 73–76.

13. *Воевода А.А., Плохотников В.В., Чехонадских А.В.* О совмещенных декартовых координатах в пространстве корней многочленов с действительными коэффициентами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2001. – № 1 (23). – С. 153–156.

14. *Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V.* Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system // Algebra and Model Theory 8 / Novosibirsk State Technical University. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2011. – P. 19–39.

15. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

16. *Чехонадских А.В.* Экстремальные расположения полюсов систем автоматического управления с регулятором пониженного порядка // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 10. – С. 6–24.

17. *Воевода А.А., Чехонадских А.В.* Построение списка критических расположений полюсов систем автоматического управления // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2014. – № 2–3 (23–24). – С. 7–18.

18. *Варден Б.Л. ван дер.* Алгебра: пер. с нем. – М.: Наука, 1975. – 648 с.

19. *Чехонадских А.В.* О ранге и аннуляторе дифференциала вектора коэффициентов многочлена // Научный вестник НГТУ. – 2007. – № 3 (28). – С. 207–212.

Чехонадских Александр Васильевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований – теория автоматического управления, теория графов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: *alcheh@ngs.ru*

Калашников Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор Сибирского государственного индустриального университета. Основные направления научных исследований – моделирование сложных технологических процессов, информационные системы и технологии. Имеет более 150 публикаций. E-mail: *s.n.kalashnikov@yandex.ru*

Low Order Control Parameters of SISO Systems and Root Coordinates *

A.V. CHEKHONADSKIKH[1], *S.N. KALASHNIKOV*[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D.Sc. (Eng.), head of engineering mathematics department. E-mail: alcheh@ngs.ru*

[2] *Siberian State Industrial University, 42 Kirov Street, Novokuznetsk, 654007, Russian Federation, D. Sc. (Eng.,), professor. E-mail: kafedraitm@mail.ru*

The paper is devoted to an important component of an algebraic method of designing algorithms of the low order control for linear SISO systems. A polynomial approach to finding an optimal controller for such a system relies on the geometril interpretation of engineering conceptions of optimality: system poles have to be placed in the most left shifted area in the left complex semi-plane. As a rule, the maximum shift means that the largest number of system poles is located on the right border of the area covering all poles – on a straight line, on a cone or on a hyperbole. Equations relating to coordinates of these right poles (root coordinates) connect freedom degrees provided by free regulator parameters. And the mutual location of poles corresponds to the critical root diagram.

The critical pole location means that a characteristic polynomial has a certain factor, namely a root polynomial. Coefficients of the characteristic polynomial depend on control parameters, and this dependence is linear for SISO systems whereas coefficients of the root polynomial depend on root coordinates. Having divided the characteristic polynomial by the root one and having equated the excess to zero, we will receive the system of equations connecting control parameters and root coordinates, which makes it possible to express the former on terms of the latter. This approach was shown on several conceptual examples; however completeness and sufficiency of the equation system were not validated.

This gap is theoretically explained in the article; consideration is based on the analysis of properties of polynomials depending on the *s* Laplace variable whose coefficients appear to be linear functions of control parameters and symmetric polynomials of the right roots.

Keywords: automatic control, optimal control, linear SISO system, low order controller, optimal root location, root coordinates, critical root diagram, root polynomial, symmetric polynomials

REFERENCES

1. Blondel V.D., Megretski A., ed. Unsolved problems in mathematical systems and control theory. Princeton, Oxford, Princeton University Press, 2004. 350 p.

2. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Trudnye zadachi lineinoi teorii upravleniya. Nekotorye podkhody k ikh resheniyu [Hard problems in linear control theory: possible approaches to solution]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, iss. 5, pp. 681–718. doi: 10.1007/s10513-005-0115-0

* *Received 15 August 2014.*

The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, state task № 2014/138, project 1052.

3. Kano M., Ogawa M. The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey. *Journal of Process Control*, 2010, vol. 20, iss. 9, pp. 969–982. doi:10.1016/j.jprocont.2010.06.013

4. Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D. Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions. *Automatica,* 2003, vol. 39, iss. 8, pp. 1479–1485. doi:10.1016/S0005-1098(03)00129-8

5. Boichenko V.A., Kurdyukov A.P., Timin V.N., Chaikovskii M.M., Yadykin I.B. Nekotorye metody sinteza regulyatorov ponizhennogo poryadka i zadannoi struktury [Some design methods of controllers of low order and fixed structure]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale system control,* 2007, iss. 19, pp. 23–126.

6. Saeki M., Aimoto K. PID controller optimization for H_∞-control by linear programming. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 83–99. doi: 10.1002/(SICI)1099-1239(200002)10:2<83::AID-RNC464>3.0.CO;2-L

7. Volgin L.N. *Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* [Optimal discrete control of dynamic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 240 p.

8. Shubladze A.M. Dostatochnye usloviya ekstremuma v sistemakh maksimal'noi stepeni ustoichivosti. I [Sufficient conditions of extremum in crest relative stability systems. I]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 1997, no. 3, pp. 93–105. (In Russian)

9. Shubladze A.M. Dostatochnye usloviya ekstremuma v sistemakh maksimal'noi stepeni ustoichivosti. II [Sufficient conditions of extremum in crest relative stability systems. II]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1997, no. 8, pp. 67–79. (In Russian)

10. Shubladze A.M., Popad'ko V.E., Yakusheva A.A., Kuznetsov S.I. Issledovanie optimal'nykh po stepeni ustoichivosti reshenii pri PID-upravlenii. Ch. 1 [PID controllers' stability degree optimization. Pt. 1]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale system control*, 2008, iss. 22, pp. 86–100.

11. Shubladze A.M., Popad'ko V.E., Yakusheva A.A., Kuznetsov S.I. Issledovanie optimal'nykh po stepeni ustoichivosti reshenii pri PID-upravlenii. Ch. 2 [PID controllers' stability degree optimization. Pt. 2]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale system control*, 2008, iss. 23, pp. 39–55.

12. Verevkin V.I., Kalashnikov S.N., Bystrov V.A. Optimizatsiya upravlenii elektroshlakovoi naplavki s pomoshch'yu matematicheskogo modelirovaniya [Control optimization of an electric slag overlaying by means of mathematical modeling]. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya – Steel in Translation*, 1992, no. 9, pp. 73–76. (In Russian)

13. Voevoda A.A., Plokhotnikov V.V., Chekhonadskikh A.V. O sovmeshchennykh dekartovykh koordinatakh v prostranstve kornei mnogochlenov s deistvitel'nymi koeffitsientami [On the combined Cartesian coordinates in root space of polynomials with real coefficients]. *Sbornik nauchnyh trudov NGTU – Transaction of Scientific Papers of Novosibirsk State Technical University*, 2001, no. 1 (23), pp. 153–156.

14. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system. *Algebra and Model Theory 8*. Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011, pp. 19–39.

15. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoinogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 593–604. doi: 10.3103/S8756699012060076

16. Chekhonadskikh A.V. Ekstremal'nye raspolozheniya polyusov sistem avtomaticheskogo upravleniya s regulyatorom ponizhennogo poryadka [Extremal pole placement in control systems with a low order controller]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, iss. 10, pp. 1717–1731. doi: 10.1134/S0005117914100014

17. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Postroenie spiska kriticheskikh raspolozhenii polyusov sistem avtomaticheskogo upravleniya [Construction of the critical location list of automatic control system poles]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2–3 (23–24), pp. 7–18.

18. Waerden B.L. van der. *Algebra*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1967. (Russ. ed.: Varden B.L. van der. *Algebra*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 648 p.).

19. Chekhonadskikh A.V. O range i annulyatore differentsiala vektora koeffitsientov mnogochlena [On differential rang of polynomial coefficients-roots correspondence]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of Novosibirsk State Technical University*, 2007, no. 3 (28), pp. 207–212.