ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 59, № 2, 2015, с. 73–88

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 59, No. 2, 2015, pp. 73–88

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 539.3: 534.1

Применение теории марковских процессов к анализу нелинейных случайных колебаний*

Ж.Б. БАКИРОВ[1], М.Ж. БАКИРОВ[2]

[1] *100027, РК, г. Караганда, бульвар Мира, 56, Карагандинский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: Zh.bakirov@kstu.kz*
[2] *100027, РК, г. Караганда, бульвар Мира, 56, Карагандинский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент. E-mail: Madybacirov@rambler.ru*

Работа посвящена применению теории марковских процессов к решению нелинейных стохастических уравнений, описывающих колебания механических систем. Применение этой теории позволяет определить переходную плотность распределения фазовых переменных выходного процесса, которая дает самое полное вероятностное описание случайных колебаний. Однако область применения марковских методов ограничивается трудностями решения уравнения Фокера–Планка–Колмогорова (ФПК), представляющего собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Эти трудности возрастают при неаналитических коэффициентах, а также с увеличением числа измерений фазового пространства. Поэтому исследования в направлении расширения применения методов теории марковских процессов к анализу случайных колебании являются актуальными.

В данной работе на основе точного решения уравнения Колмогорова получены явные выражения плотности распределения перемещений для уравнения Дуффинга и уравнения с сухим трением. Эти выражения использованы для оценки точности приближенных решений, полученных методом статистической линеаризации. В работе также предложены приближенные аналитические решения уравнении нелинейных колебаний, разработанные на основе сочетания теории марковских процессов с методом стохастического усреднения. Решение для квазилинейных систем получено введением «медленно» меняющихся амплитуды и фазы колебаний. Для автономных систем укороченные уравнения для амплитуды и фазы разделяются и можно получить стационарное решение уравнения Колмогорова. Решение для квазиконсервативных систем получено введением новой «медленной» переменной – энергии колебаний. Усреднение стандартного уравнения проводится за период, соответствующий порождающей нелинейной консервативной системе. Этот подход значительно расширяет область применения теории марковских процессов к анализу нелинейных случайных колебаний.

Ключевые слова: нелинейная система, случайные колебания, марковский процесс, плотность распределения, фазовые переменные, белый шум, коэффициенты сноса и диффузии, спектральная плотность, дисперсия, стохастическое усреднение, период колебаний, энергия

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-73-88

---

*Статья получена 30 января 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

Применение теории марковских процессов к решению задач статистической динамики сводится к решению уравнения Фокера–Планка–Колмогорова (ФПК). Из этого уравнения определяется переходная плотность распределения фазовых переменных выходного процесса, которая дает самое полное вероятностное описание случайных колебаний.

Сведение задач теории случайных колебаний к исследованию решений уравнений Колмогорова открывает путь для применения к этим задачам эффективных методов математической физики. Для отыскания решений могут быть использованы как классические методы (Фурье, интегральных преобразований и т. п.), так и приближенные методы (численные методы, вариационные методы и т. п.). В приложении к уравнениям Колмогорова многие методы и технические приемы обсуждены в работе [1].

Специфика нелинейных систем проявляется в трудности построения аналитических решений уравнения ФПК для совместной плотности вероятности фазовых переменных. Точных решений уравнений ФПК для нелинейных систем известно очень мало, даже если речь идет о стационарных решениях [1, 2].

Исследование нелинейных систем на основе уравнения ФПК применительно к задачам статистической динамики рассмотрено в ряде монографий [3, 4, 5]. В них приведены некоторые точные решения, а также изложен ряд приближенных подходов к составлению и решению этого уравнения. Некоторые аспекты анализа нелинейных случайных колебаний с помощью теории марковских процессов рассмотрены в работе [6].

Многие приближенные аналитические методы направлены на упрощение уравнения ФПК. Здесь преобладают подходы, основанные на сочетании теории марковских процессов с асимтотическими методами нелинейной механики. Так, на основе сочетания теории марковских процессов с методом стохастического усреднения в работах [3, 7, 8] решен ряд задач об устойчивости и колебаниях линейных и нелинейных систем при совместном действии внешних и параметрических широкополосных случайных воздействий.

Уравнения ФПК часто используются для получения системы детерминированных уравнений относительно моментов фазовых переменных [3, 9, 10].

Некоторые авторы считают более полезным получать приближенные решения уравнения ФПК, чем разрабатывать приближенные методы решения задач статистической динамики. Уравнение ФПК в основном решается приближенными вариационными или численными методами [11, 12]. В работе [13] уравнение ФПК для нелинейной системы предлагается заменить «эквивалентным» уравнением для линейной системы, возбуждаемой аддитивным белым шумом. Неизвестные коэффициенты эквивалентной системы предлагается находить по схеме взвешенных остатков.

В последнее время развивается идея расширения области применения теории марковских процессов путем введения медленно изменяющейся переменной – энергии колебания. Тогда уравнение ФПК составляется для «укороченной» системы дифференциальных уравнений, что облегчает его решение [14, 15]. На основе этой идеи в работе [16] разработан эффективный численный алгоритм, позволяющий получить плотность распределения выходных параметров и амплитуды колебаний.

Методы теории марковских процессов универсальны в том смысле, что применимы как к стационарным, так и нестационарным процессам, линейным, параметрическим и нелинейным системам. Некоторые задачи удается решить в точной постановке и в замкнутом виде, что позволяет использовать полученные решения в качестве эталона при оценке других методов. Вместе с тем необходимо отдавать отчет в трудностях применения методов теории марковских процессов, которые особенно возрастают при неаналитических коэффициентах, сложных границах, а также с увеличением числа измерений фазового пространства. Поэтому исследования в направлении расширения применения методов теории марковских процессов к анализу случайных колебаний остаются актуальными.

Данная работа посвящена применению теории марковских процессов к анализу нелинейных случайных колебаний. Рассмотрены как точные, так и приближенные решения некоторых видов стохастических нелинейных дифференциальных уравнений движения механической системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать диффузионные марковские процессы. Переходная плотность вероятности $P(x,t\,|\,x_0,t_0)$ такого процесса удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i(x,t)P\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[b_{ij}(x,t)P\right] \qquad (1)$$

с начальным условием $P=\delta(x-x_0)$ при $t=t_0$. Здесь функции $a_i(x,t)$ называются коэффициентами сноса и характеризуют среднюю эволюцию процесса $x(t)$, а функции $b_{ij}(x,t)$, образующие матрицу размерности $n\times n$, характеризуют «размывание» процесса во времени и называются коэффициентами диффузии.

Диффузионные марковские процессы тесно связаны с процессами в динамических системах, возбуждаемых нормальными белыми шумами. Уравнение движения такой системы запишем в виде

$$\frac{dx}{dt}=F(x,t)+G(x,t)\xi(t)\,, \qquad (2)$$

где $F(x,t)$ – n-мерный вектор; $G(x,t)$ – матрица размерности $n\times m$; $\xi(t)$ – m-мерный вектор, компоненты которого – независимые стационарные белые шумы единичной интенсивности.

Коэффициенты интенсивности марковского процесса связаны с коэффициентами стохастического уравнения (2) следующими соотношениями:
для белого шума Ито

$$a_i=f_i(x,t),\quad b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}g_{ik}g_{jk}\ \ (i,j=1,2,\ldots,n)\,; \qquad (3)$$

для белого шума Стратоновича вводится флуктуационная поправка в коэффициент сноса [17]

$$a_i = f_i(x,t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g_{jk}, \; b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} g_{jk}. \tag{4}$$

Область применения теории марковских процессов можно расширить на любые случайные воздействия (не только белые шумы), спектральные плотности которых могут быть аппроксимированы дробно-рациональными функциями. Эти воздействия можно рассматривать как результат прохождения нормальных белых шумов через некоторые линейные фильтры – системы с конечным числом степеней свободы. Расширяя фазовое пространство за счет переменных, описывающих процессы в фильтре, вновь получаем марковскую систему. Методика составления уравнения фильтра в общем виде рассмотрена в работе [18].

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим колебательную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{u} + h(E)\dot{u} + f(u) = \xi(t), \tag{5}$$

где $E(u,\dot{u}) = \dot{u}^2/2 + \Pi(u)$, $\Pi(u) = \int f(u)du$.

Здесь $\xi(t)$ – случайный процесс типа белого шума с интенсивностью S. Отметим, что зависимости вида $h(E)$ широко используются для описания характеристик рассеяния энергии при механических колебаниях. Перепишем это уравнение в виде системы первого порядка (2), полагая $x_1 = u(t)$, $x_2 = v = \dot{u}(t)$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_1 = -h(E)x_2 - f(x_1) + \xi(t).$$

По выражению (3) найдем коэффициенты сноса и диффузии и составим стационарное уравнение ФПК (1) относительно совместной плотности вероятности перемещения и скорости $P(u,v)$:

$$v\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\{[f(u) + h(E)v]P\} + \frac{S}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что решение этого уравнения имеет вид

$$P(u,v) = C\exp\left[-\frac{2}{S}\int_0^E h(E')dE'\right], \tag{6}$$

где C – постоянная нормировки.

Рассмотрим важный частный случай линейного демпфирования $h(E) = 2\varepsilon$. Согласно (6) имеем

$$P(u,v) = C\exp\left(\frac{-2\varepsilon v^2}{S}\right)\exp\left[-\frac{4\varepsilon\Pi(u)}{S}\right].$$

Обобщенная координата и скорость процесса оказываются статистически независимыми. Проинтегрировав это выражение в бесконечных пределах по u и v, можно найти одномерные плотности вероятности:

$$P_2(v) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi s}} \exp\left(\frac{-2\varepsilon v^2}{s}\right), \quad P_1(u) = C_1 \exp\left[-\frac{4\varepsilon \Pi(u)}{S}\right]. \qquad (7)$$

Для обобщенной координаты получаем нормальное распределение.

Рассмотрим уравнение Дуффинга, для которого

$$\Pi = \int \left(bu^3 + \omega_0^2 u\right) du = \omega_0^2 u^2 / 2 + bu^4 / 4 .$$

Найдем коэффициент нормировки в (7) из условия

$$C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon\left(2\omega_0^2 u^2 + bu^4\right)/s\right] du = 1.$$

После интегрирования находим

$$C_1 = \frac{\sqrt{2b} e^{-1/2k}}{\omega_0 K_{1/4}(1/2k)},$$

где $k = bs / \varepsilon\omega_0^4$; $K_{1/4}(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента второго рода. Таким образом, плотность распределения перемещения для уравнения Дуффинга имеет вид

$$P(u) = \frac{\sqrt{2b} \exp\left(-\varepsilon\omega_0^4 / 2bs\right)}{\omega_0 K_{1/4}\left(\varepsilon\omega_0^4 / 2bs\right)} \exp\left[-\frac{2\varepsilon}{s}\left(\omega_0^2 u^2 + bu^4/2\right)\right].$$

Определим дисперсию перемещения. Используя замену переменных $u = t$, запишем

$$\sigma_u^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 P(u) du = C_1 \int\limits_0^{\infty} t^{1/2} \exp\left[-\varepsilon\left(bt^2 + 2\omega_0^2 t\right)/s\right] dt .$$

Интеграл возьмем с использованием интегрального представления функции параболического цилиндра [19]

$$U(a,z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(a+1/2)} \int\limits_0^{\infty} t^{a-1/2} e^{-zt-t^2 2} dt ,$$

где $\Gamma(x)$ – полная гамма-функция. Тогда

$$\sigma_u^2 = C_1 \left(\frac{s}{2\varepsilon b}\right)^{3/4} \Gamma(3/2) e^{1/2k} U\left(1, \sqrt{2/k}\right).$$

Подставляя сюда выражение для C_1 и учитывая, что

$$K_{1/4}(1/2k) = \sqrt{\pi}(2k)^{1/4} U\left(0, \sqrt{2/k}\right),$$

получаем

$$\sigma_u^2 = \frac{\omega_0^2 U(1, \sqrt{2/k})}{bU(0, \sqrt{2/k})} \sqrt{k/8}\,. \qquad (8)$$

Ранее эта задача была решена методом статистической линеаризации и получена формула, которую можно привести к виду

$$\sigma_u^2 = \omega_0^2 \left(\sqrt{1+\alpha k} - 1\right) \Big/ 6b\,, \qquad (9)$$

где $\alpha = \sqrt{15}$ из условия равенства дисперсии и $\alpha = 3$ из условия минимума среднеквадратического отклонения.

Так как формула (8) точная, то она позволяет оценить погрешность метода линеаризации. На рисунке сплошной линией показан график изменения безразмерной дисперсии $\bar{\sigma}^2 = \sigma_u^2 b \Big/ \omega_0^2$ от безразмерного параметра системы и нагружения k для уравнения Дуффинга, построенного по зависимости (8). Там же для сравнения пунктирной линией показан этот график, построенный по зависимости (9) при определении коэффициента линеаризации по минимуму среднеквадратического отклонения. Этот же график при определении коэффициента линеаризации по равенству дисперсии показан штрих-пунктирной линией. Из графика видно, что при расчете методом статистической линеаризации с использованием условия равенства дисперсии получаем результаты больше точного значения. При этом погрешность расчета с ростом параметра k уменьшается от 30 % (k = 0.1) до 4,8 % (k = 10). При определении коэффициента линеаризации по минимуму среднеквадратичного отклонения получаем дисперсии меньше точных значений. При этом погрешность результата с ростом k возрастает до 9,5 % при k = 10. Если принять среднее значение коэффициента линеаризации 3,436, то погрешность расчета меняется от +13 % $(k = 0{,}1)$ до $-1{,}9$ % при $k = 10$.

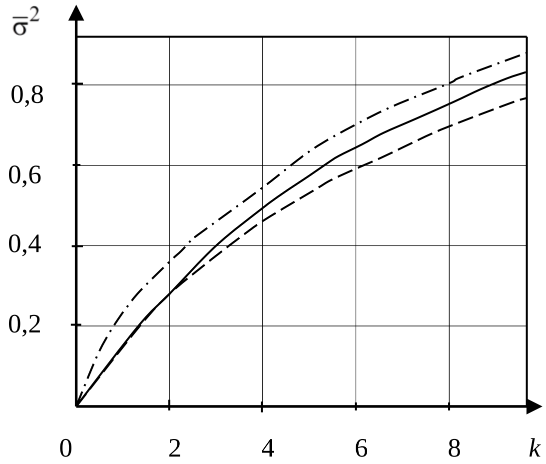

График зависимости безразмерной дисперсии
от безразмерного параметра k

Рассмотрим теперь нелинейную функцию вида

$$f(u) = \omega_0^2[u + \mu\,\mathrm{sign}(u)],$$

которая возникает при использовании виброизолятора с сухим трением или с билинейной пружиной большой начальной жесткости. В этом случае

$$\Pi = \omega_0^2(u^2/2 + \mu|u|).$$

Из условия нормировки находим

$$c_1 = e^{-k^2}\left[1 - erf(k)\right]^{-1}\Big/\sqrt{2\pi}\,\sigma_0,$$

где $\sigma_0^2 = s\big/4\varepsilon\omega_0^2$, $k = \mu\big/\sqrt{2}\sigma_0$;

интеграл вероятностей $\qquad erf_{(x)} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt.$

Теперь плотность распределения перемещения примет вид

$$P(u) = \frac{[1 - erf(k)]^{-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\exp(k^2)}\exp[-(\mu|u| + u^2/2)].$$

Определим дисперсию процесса

$$\sigma_u^2 = 2c_1\int_0^\infty u^2\exp\left[-(\mu u + u^2/2)\big/\sigma_0^2\right]du =$$

$$= 2c_1\left\{\sqrt{\pi/2}\sigma_0^3(1 + k^2/2)e^{k^2}\left[1 - erf(k)\right] - \mu\sigma_0^2\right\}.$$

После подстановки значения c_1 получаем точное значение

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_0^2} = 1 + 2k^2 - \frac{2ke^{-k^2}}{\sqrt{\pi}\left[1 - erf(k)\right]}. \tag{10}$$

Эта задача в работе [17] была решена методом статистической линеаризации. Это решение в наших обозначениях имеет вид

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 + \mu\sqrt{2/\pi}/\sigma_u}.$$

Решая это квадратное уравнение, можно найти безразмерную дисперсию

$$\bar{\sigma} = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{1 + \frac{\pi}{k^2}} - 1\right].$$

Сравнение точной (10) и этой приближенной формулы показывает, что при $k \to 0$ эти формулы совпадают. Расхождение результатов вычислений по этим формулам возрастает по мере роста параметра нелинейности k. При $k = 0{,}5$ расхождение составляет 2,2 %, при $k = 1$ расхождение 4,5 %, а при очень большом уровне нелинейности $(k = 2)$ погрешность достигает 20 %.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Точные решения получены для случайных воздействий типа «белого шума». При произвольных воздействиях, спектральная плотность которых описываются дробно-рациональными функциями, решение можно получить расширением фазового пространства за счет переменных уравнения фильтра. Однако получить точные решения для нелинейных задач в этом случае не удается.

Значительное расширение возможностей практического применения метода марковских процессов к нелинейным системам может быть достигнуто при использовании этого метода в сочетании с методом усреднения Крылова–Боголюбова. Применение этого метода покажем на примере квазилинейной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + h(u, \dot{u}, t) + \Omega^2 u = q(t), \tag{11}$$

где $q(t)$ – стационарный центрированный широкополосный случайный процесс, имеющий порядок малого параметра μ.

Предположим, что функция $h(u, \dot{u}, t)$ имеет порядок μ^2. Чтобы воспользоваться основной теоремой об асимптотических марковских свойствах решения системы стохастических уравнений в стандартной форме, необходимо в уравнений (11) перейти к «медленным» переменным по формулам

$$x_{(t)} = A_{(t)} \sin[\Omega t + \varphi_{(t)}], \quad \dot{x}_{(t)} = \Omega A_{(t)} \cos[\Omega t + \varphi_{(t)}]. \tag{12}$$

$$x_{(t)} = x_{c(t)} \cos \Omega t + x_{s(t)} \sin \Omega t, \quad \dot{x}_{(t)} = \Omega[-x_{c(t)} \sin \Omega t + x_{s(t)} \cos \Omega t]. \tag{13}$$

Разрешив эти соотношения относительно «медленных» переменных и продифференцировав их с учетом уравнения движения, получаем систему двух уравнений первого порядка относительно амплитуды и фазы или амплитуд x_c и x_s. В силу принятых предположений о порядке величин в правых частях этих уравнений мы приходим к системе уравнений в стандартной форме. После применения процедуры стохастического усреднения получаем систему укороченных нелинейных уравнений, которые описывают двумерный марковский процесс.

При решении вопроса о том, каким именно представлением, (12) или (13), лучше воспользоваться для конкретной системы, следует исходить из стремления получить более простое уравнение ФПК. В частном случае автономной системы, в которой функция h не зависит явно от времени, целесообразно воспользоваться представлением (12), поскольку укороченное уравнение относительно амплитуды не будет содержать фазу $\phi(t)$. Остановимся на этом случае подробнее.

Переходя к «медленным» переменным (12) в уравнении (11), получим следующую систему уравнений в стандартной форме:

$$\dot{A} = \Omega^{-1}(\ddot{u} + \Omega^2 u)\cos\theta = -\Omega^{-1}\left[h(A\sin\theta, \Omega A\cos\theta) - q(t)\right]\cos\theta,$$

$$\dot{\phi} = -(\Omega A)^{-1}(\ddot{u} + \Omega^2 u)\sin\theta = +(\Omega A)^{-1}\left[h(A\sin\theta, \Omega A\cos\theta) - q(t)\right]\sin\theta,$$

где $\theta = \Omega t + \phi(t)$.

Введем двумерный вектор $x(t)$ с компонентами $x_1 = A(t)$, $x_2 = \phi(t)$ и перепишем это уравнение в виде

$$\dot{x}_i = h_i(x,t) + \sum g_{ij}(x,t)q_j(t), \tag{14}$$

где h_i, g_{ij} – периодические функции времени с периодом T;

$$g_{11} = \Omega^{-1}\cos(\Omega t + \phi), \quad g_{21} = -(\Omega A)^{-1}\sin(\Omega t + \phi), \quad g_{12} = g_{22} = 0.$$

Согласно теореме, доказанной Р.З. Хасьминским [20], решение этой системы асимптотически сходится к диффузионному марковскому процессу. Коэффициенты сноса $a_i(x)$ и диффузии $b_{ij}(x)$ этого предельного марковского процесса определяются следующими выражениями [7]:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{T}\int_0^T h_i(x,t)dt + \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int_0^T d\tau \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial g_{ik}(x,\tau)}{\partial x_j}\times \\ &\qquad \times g_{jm}(x,\tau+u)K_{km}(u)dU, \\ b_{ij} &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int_0^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \partial g_{ik}(x,\tau) g_{jm}(x,\tau)K_{km}(t-\tau)dt, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $K_{ij}(\tau) = \left\langle q_i(t)q_j(t+\tau)\right\rangle$ – взаимные корреляционные функции случайных процессов.

Нетрудно видеть, что соотношения (15) содержат дополнительную операцию усреднения за период по методу Крылова–Боголюбова по сравнению с соотношениями (4), определяющими коэффициенты сноса и диффузии марковского процесса. Первое слагаемое для коэффициента $a_i(x)$ представляет первое приближение обычного детерминистического метода усреднения. Второе слагаемое появляется при трактовке белого шума в смысле Стратоновича и определяет флуктуационную поправку к коэффициенту сноса. Из выражений (15) следует, что коэффициенты диффузии и флуктуационная поправка к коэффициенту сноса имеют второй порядок малости по сравнению с членами, входящими в правую часть системы (14).

Предельный диффузионный марковский процесс $x(\tau)$, получаемый из системы (14) при стремлении к нулю малых параметров, можно рассматривать как вектор решения следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = a_i(x) + \xi_i(\tau),$$

где $\xi_i(\tau)$ – эквивалентные процессы типа белого шума с матрицей коэффициентов интенсивности b_{ij}.

Из формулы (15) следует, что первый член в коэффициенте сноса a_1 равен

$$a_{11} = -\Omega^{-1} h_1(A) = \frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} h(A\sin\theta, \Omega A\cos\theta)\cos\theta d\theta.$$

Тогда второй член в a_1 равен

$$a_{12} = \frac{1}{T}\int_0^T d\tau \left[\frac{\partial g_{11}(x,\tau)}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{0} g_{21}(x, \tau + u) K_q(u) du \right] = \frac{D_0}{4\Omega^2 A},$$

где $D_0 = 2\pi S_q(\Omega)$; $S_q(\omega)$ – спектральная плотность внешнего воздействия.

В выражениях для коэффициентов сноса b_{11}, b_{12} также остается по одному слагаемому. После вычислений имеем: $b_{12} = 0$, $b_{11} = D/2\Omega^2$.

Укороченное уравнение для амплитуды теперь примет вид

$$\dot{A} = -\Omega^{-1} h_1(A) + D_0 / 4\Omega^2 A + \xi(t). \tag{16}$$

Мы видим, что при таком подходе внешнее широкополосное воздействие заменяется белым шумом, у которого спектральная плотность равна значению спектральной плотности исходного процесса на собственной частоте системы. Это возможно при конечных значениях малого параметра при условии, что спектральная плотность внешнего воздействия близка к постоянной в пределах диапазона частот, который существенно превышает характерную ширину околорезонансной зоны. Это и есть качественное условие широкополосности спектра возбуждения для рассматриваемых квазилинейных систем.

Стационарное уравнение ФПК, соответствующее уравнению (16), имеет вид

$$\frac{d}{dA}\left\{\left[-\frac{h_1(A)}{\Omega} + \frac{D_0}{4\Omega^2 A} \right] P \right\} = \frac{D_0}{4\Omega^2} \frac{d^2 P}{dA^2}.$$

Это уравнение имеет решение

$$P(A) = CA\exp\left[-H(A)\right], \qquad H(A) = \frac{4\Omega^2}{D_0}\int_0^A h_1(A^1) dA'. \tag{17}$$

В частном случае линейной системы $h = 2\varepsilon\dot{u}$ решение (17) представляет известное распределение Релея

$$P_{(A)} = (A/\sigma^2)\exp(-A^2/2\sigma^2), \quad \sigma^2 = D_0/4\varepsilon\Omega^2.$$

Это распределение является точным.

Для неавтономных квазилинейных систем типа (11), у которых функция h явно зависит от времени, укороченные уравнения для амплитуды и фазы уже не разделяются. Для анализа уравнений ФПК в этом случае приходится пользоваться приближенными методами. В некоторых случаях удается получить точное аналитическое решение уравнений ФПК, которые соответствуют представлению (13). Сюда относятся, прежде всего, системы с внешним или параметрическим периодическим возбуждением [3].

Замены переменных (12) и (13) позволяют получать уравнение движения в стандартной форме лишь при условии линейности порождающей системы, получаемой из исходной при $\mu = 0$. Такие системы называются квазилинейными. Метод усреднения можно применять и для систем, не являющихся квазилинейными, если использовать операцию усреднения за период соответствующей порождающей нелинейной консервативной системы. Такие системы называются квазиконсервативными. Эта схема усреднения дает возможность существенно расширять класс нелинейных стохастических задач, допускающих аналитическое решение методами теории марковских процессов.

Применение этого подхода покажем для системы с одной степенью свободы вида

$$\ddot{u} + h(u,\dot{u}) + f(u) = g(u)\xi(t). \tag{18}$$

Функцию h и спектральную плотность $s_0/2\pi$ стационарного центрированного белого шума $\xi(t)$ будем считать пропорциональными малому параметру μ^2. Функцию $f(u)$ полагаем однозначной, проходящей через начало координат и монотонно возрастающей при изменении u от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим порождающую консервативную систему

$$\ddot{u} + f(u) = 0.$$

Это уравнение имеет первый интеграл

$$E = \dot{u}^2/2 + \Pi(u), \tag{19}$$

где потенциальная энергия системы $\Pi = \int_0^u f(u')du'$; E – постоянная интегрирования, имеющая смысл полной энергии системы.

Разрешим это уравнение относительно производной

$$\frac{du}{dt} = \pm[2E - 2\Pi(u)]^{1/2}.$$

Проинтегрировав это уравнение с разделяющимися переменными по замкнутой фазовой траектории, находим период свободных колебаний порождающей системы

$$T_0(E) = 2\int_{u-}^{u_+} [2E - 2\Pi(u)]^{-1/2} du\,, \tag{20}$$

где $u_+ > 0$, $u_- < 0$ – максимальные и минимальные корни уравнения $\Pi(u) = E$.

Для анализа системы (18) введем вместо $\dot{u}$ новую переменную $E(t)$ согласно зависимости (19). Дифференцируя (19) с учетом (18), получаем

$$\dot{E} = [2E - 2\Pi(u)]^{1/2}\{-h(u,[2E - 2\Pi(u)]^{1/2}) + g(u)\xi(t)\}\,.$$

В силу принятых допущений о малости h и ξ полная энергия должна быть медленно меняющейся функцией. Поэтому правую часть этого уравнения можно усреднить по быстрой переменной u за период колебаний $T_0(E)$. В результате этого получаем укороченное уравнение для энергии

$$\dot{E} = -\frac{Q(E)}{T_0(E)} + \frac{S_0 R(E)}{2T_0(E)} + \eta(t)\,, \tag{21}$$

где $\eta(t)$ – процесс типа белого шума с интенсивностью $S_0 S(E)/T_0(E)$.
В этом уравнении

$$Q(E) = \int_{u_-}^{u_+} h\{u,[2E - 2\Pi(u)]^{1/2}\}\,du + \int_{u_+}^{u_-} h\{u,-[2E - 2\Pi(u)]^{1/2}\}\,du\,,$$

$$R(E) = 2\int_{u_-}^{u_+} g^2(u)[2E - 2\Pi(u)]^{-1/2} du\,, \tag{22}$$

$$S(E) = 2\int_{u_-}^{u_+} g^2(u)[2E - 2\Pi(u)]^{1/2} du\,.$$

Стохастическому уравнению (21) соответствует следующее уравнение ФПК:

$$\frac{\partial P(E,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}\left\{\left[\frac{S_0 R(E)/2 - Q(E)}{T_0(E)}\right]P\right\} + \frac{S_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}\left[\frac{S(E)}{T_0(E)}P\right].$$

С учетом того, что $R(E) = dS/dE$, можно получить стационарное решение этого уравнения

$$P(E) = CT_0(E)\exp\left[-\frac{2}{S_0}\int_0^E \frac{Q(E')}{S(E')}dE'\right]. \tag{23}$$

По выражению (23) можно найти стационарную плотность вероятности амплитуды процесса $A(t)$. Для простоты будем считать $h(u,\dot{u})$ четной по u и нечетной относительно $\dot{u}$, а $f(u)$ – нечетной функцией. Тогда в (22) пределы интегрирования будут симметричными $u_+ = -u_- = A$, например:

$$Q(E) = 4\int_0^A h\{u, [2E - \Pi(u)]^{1/2}\}\, du\,.$$

Так как при значениях $u = A$ скорость $\dot{u} = 0$, то амплитуда связана с энергией неявной зависимостью, вытекающей из (19)

$$E = \Pi(A)\text{, причем } |dE / dA| = f(A)\,.$$

Используя эти соотношения, из (23) получим плотность вероятности амплитуды

$$P(A) = Cf(A)T_0[\Pi(A)]\exp\left\{-\frac{2}{S_0}\int_0^A \frac{Q[\Pi(A')]}{S[\Pi(A')]} f(A')dA'\right\}. \qquad (24)$$

В частном случае линейного демпфирования

$$P(A) = Cf(A)T_0[\Pi(A)]\exp[-(4\varepsilon / s_0)\Pi(A)]\,.$$

Выражения для (23) и (24) содержат весьма сложные интегралы, и прямой анализ этих выражений затруднителен. Для систем с малой нелинейностью в работе [7] предложено приближенное вычисление этих интегралов на основе метода гармонической линеаризации.

Суть подхода заключается в том, чтобы в (22) функцию $2E(A) - 2\Pi(u)$ аппроксимировать квадратной зависимостью $\lambda^2(A)(A^2 - u^2)$. Этот прием аналогичен методу гармонической линеаризации при анализе детерминированных нелинейных колебаний. Аналогия будет полной, если выбрать коэффициент линеаризации, имеющий смысл квадрата частоты собственных колебаний порождающей консервативной системы, в соответствии с зависимостью

$$\lambda^2(A) = \left\{\frac{2\pi}{T_0[\Pi(A)]}\right\}^2 = \frac{4}{\pi A^2}\int_0^A \frac{uf(u)du}{\sqrt{A^2 - u^2}}\,.$$

При таком приближении функции Q, R, S могут быть найдены из (22) в конечном виде, если $h(u,\dot{u})$ – полином.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе применением теории марковских процессов получены точные решения задач о случайных колебаниях некоторых нелинейных систем. На основе сочетания теории марковских процессов с методом стохастического усреднения получены приближенные аналитические решения двух видов нелинейных уравнений, расширяющих область применения метода к анализу случайных колебаний.

Дальнейшим развитием применения теории марковских процессов к анализу случайных колебаний является разработка приближенных методов решения задач для неавтономных систем, когда нелинейные функции явно зависят от времени. Важно также получение точных решений для частных видов нелинейностей при воздействиях, отличных от «белого шума».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.

2. *Socha L.* Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems: recent results. Pt. 1. Theory // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58, iss. 3. – P. 178–205. – doi: 10.1115/1.1896368.

3. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.

4. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 368 с.

5. *Красовский А.А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 244 с.

6. *Ibrahim R.A.* Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems // Journal of Mechanical Design. – 1995. – Vol. 117, iss. B. – P. 222–233. – doi: 10.1115/1.2836461.

7. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 176 с.

8. *Митропольский Ю.А., Коломиец В.Г.* Усреднение в стохастических системах // Украинский математический журнал. – 1971. – Т. 23, № 3. – С. 318–345.

9. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

10. *Макаров Б.П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1983. – 264 с.

11. Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment // T.P. Sapsis, A.F. Vakakis, L.A. Bergman // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2011. – Vol. 26, iss. 2. – P. 119–133. – doi: 10.1016/j.probengmech.2010.11.006.

12. *Cross E.J., Worden K.* Approximation of the Duffing oscillator frequency response function using the FPK equation // Journal of Sound and Vibration. – 2011. – Vol. 330, iss. 4. – P. 743–756. – doi: 10.1016/j.jsv.2010.08.034.

13. *Lacquanti S., Riccardi G.* A probabilistic linearization method for nonlinear systems subjected to additive an multiplicative excitations // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2006. – Vol. 41, iss. 10. – P. 1191–1205. – doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.002.

14. *Haung Z.L., Zhu W.Q., Suzuki Y.* Stochastic averaging of strongly nonlinear inder combined harmonic and white noise excitations // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 238, iss. 2. – P. 233–256. – doi: 10.1006/jsvi.2000.3083.

15. *Роев Б.А.* Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний в системах со случайными параметрами // Вестник МГУП имени Ивана Федорова. – 2005. – № 4. – С. 47–57.

16. *Бакиров Ж.Б., Михайлов В.Ф.* Анализ нелинейных случайных колебаний методом усреднения // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78, вып. 5. – С. 714–720.

17. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежости в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1983. – 351 с.

18. *Бакиров Ж.Б., Михайлов В.Ф.* Моделирование случайных процессов // Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. – 2009. – № 2. – С. 98–103.

19. Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

20. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Бакиров Жетписбай Бакирович, доктор технических наук, профессор Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – динамика и прочность машин. Имеет около 200 публикаций. E-mail: zh.bakirov@kstu.kz

Бакиров Мади Жетписбаевич, кандидат технических наук, доцент Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – механика деформируемого твердого тела. Имеет 30 публикаций. E-mail: Madybacirov@rambler.ru

Application of the Markov process theory to the analysis of nonlinear random oscillations[*]

ZH.B. BAKIROV[1], *M.ZH. BAKIROV*[2]

[1] *Karaganda State Technical University, 56, Bulvar Mira, Karaganda, 100027, Kazakhstan; D.Sc. (Eng.), professor. E-mail: Zh.bakirov@kstu.kz*
[2] *Karaganda State Technical University, 56, Bulvar Mira, Karaganda,100027, Kazakhstan; PhD (Eng.), associate professor. E-mail: Madybacirov@rambler.ru*

The work is devoted to the application of the Markov process theory to the solution of not-linear stochastic equations describing oscillations of mechanical systems. Application of this theory allows determining the transitional density of output process phase variable distribution which gives the most complete probabilistic description of random oscillations. However, the scope of the Markov methods is limited by difficulties of solving the Foker-Plank-Kolmogorov (FPK) equation which is a nonlinear partial differential equation. These difficulties increase with nonanalytic coefficients as well as with an increase in the number of phase space measurements. Therefore, research aimed at expanding the application of the Markov process theory to the analysis of random oscillations is relevant.

In this work explicit expressions for the movement distribution density for the Duffing equation and the dry friction equation are obtained based on the exact solution of the Kolmogorov equation. These expressions are used for assessing the accuracy of approximate solutions obtained by method of statistical linearization. Approximate analytical solutions of the nonlinear oscillation equation developed on the basis of a combination of the Markov process theory and the stochastic averaging method are also proposed in the paper. The solution for quasilinear equation systems is obtained by the introduction of "slow" changing amplitudes and phases of oscillations.

For autonomous systems truncated equations for amplitude and phase are divided and it is possible to obtain a stationary solution of the Kolmogorov equation. The solution for quasiconservative systems is obtained by the introduction of a new "slow" variable, namely, oscillation energy. Averaging of the standard equation is carried out for the period of the corresponding generating nonlinear conservative system. This approach considerably expands the application of the Markov process theory to the analysis of nonlinear random oscillations.

Keywords: nonlinear system, random fluctuations, the Markov process, distribution density, phase variables, white noise, drift and diffusion coefficients, spectral density, dispersion, stochastic averaging, period of oscillations, energy

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-73-88

REFERENCES

1. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977. 488 p.

2. Socha L. Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems: recent results. Pt. 1. Theory. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, iss. 3, pp. 178–205. doi: 10.1115/1.1896368

[*] *Received 30 January 2015.*

3. Dimentberg M.F. *Nelineinye stokhasticheskie zadachi mekhanicheskikh kolebanii* [Nonlinear stochastic problems of mechanical oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 368 p.

4. Nikolayenko N.A., Ul’yanov S.V. *Statisticheskaya dinamika mashinostroitel'nykh konstruktsii* [Statistical dynamics of engineering designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 368 p.

5. Krasovskii A.A. *Fazovoe prostranstvo i statisticheskaya teoriya dinamicheskikh sistem* [Phase space and statistical theory of dynamic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 244 p.

6. Ibrahim R.A. Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems. *Journal of Mechanical Design*, 1995, vol. 117, iss. B, pp. 222–233. doi: 10.1115/1.2836461

7. Dimentberg M.F. *Sluchainye protsessy v dinamicheskikh sistemakh s peremennymi parametrami* [Casual processes in dynamic systems with variable parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 176 p.

8. Mitropolskii Yu.A., Kolomiets V.G. Usrednenie v stokhasticheskikh sistemakh [A veraging in stochastic systems]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal – Ukrainian mathematics journal*, 1971, vol. 23, no. 3, pp. 318–345. (In Russian)

9. Bolotin V.V. *Sluchainye kolebaniya uprugikh sistem* [Random vibrations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 336 p.

10. Makarov B.P. *Nelineinye zadachi statisticheskoi dinamiki mashin i priborov* [Nonlinear problems of the statistical dynamics of machinery and instruments]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1983. 264 p.

11. Sapsis T.P., Vakakis A.F., Bergman L.A. Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, vol. 26**,** iss. 2**,** pp. 119–133. doi: 10.1016/j.probengmech.2010.11.006

12. Cross E.J.; Worden K. Approximation of the Duffing oscillator frequency response function using the FPK equation. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, vol. 330, iss. 4, pp. 743–756. doi: 10.1016/j.jsv.2010.08.034

13. Lacquanti S., Riccardi G. A probabilistic linearization method for nonlinear systems subjected to additive an multiplicative excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, iss. 10, pp. 1191–1205. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.002

14. Haung Z.L., Zhu W.Q., Suzuki Y. Stochastic averaging of strongly nonlinear inder combined harmonic and white noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol. 238, iss. 2, pp. 233–256. doi: 10.1006/jsvi.2000.3083

15. Roev B.A. *Vzaimodeistvie vynuzhdennykh i parametricheskikh kolebanii v sistemakh so sluchainymi parametrami* [Interaction of the compelled and parametrical fluctuations in systems with casual parameters]. *Vestnik MGUP imeni Ivana Fedorova – Vestnik MGUP by Ivan Fedorov*, 2005, no. 4, pp. 47–57.

16. Bakirov Zh.B., Mikhaylov V.F. Analiz nelineinykh sluchainykh kolebanii metodom usredneniya [Analysis of non-linear stochastic oscillations by the averaging method]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 714–720. (In Russian)

17. Bolotin V.V. *Metody teorii veroyatnostei i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzhenii* [Methods of probability theory and theory of reliability in calculations of constructions]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1983. 351 p.

18. Bakirov Zh.B., Mikhaylov V.F. Modelirovanie sluchainykh protsessov [Modeling of casual processes]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Seriya: Matematika – Bulletin of Karaganda State University. Series: Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 98–103.

19. Abramovitz M., Stegun I.A., eds. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. New York, Dover Publications, 1964. 1046 p. (Russ. ed.: Abramovits M., Stigan I. eds. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam: s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami*. Translated from English Moscow, Nauka Publ., 1979. 830 p.).

20. Khas'minskii R.Z. *Ustoichivost' sistem differentsial'nykh uravnenii pri sluchainykh vozmushcheniyakh ikh parametrov* [Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 368 p.