

УДК 681.51:519.6

Критерий расходимости и алгоритм адаптации рекуррентного алгоритма оценивания вектора состояния*

Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

630008, РФ, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: voscob@mail.ru

Рекуррентные алгоритмы оценивания (фильтры Калмана) получили широкое распространение при решении широкого круга задач управления, идентификации и фильтрации. Эти алгоритмы имеют ряд преимуществ перед другими алгоритмами решения названных задач. Главные из этих преимуществ – оптимальность оценки вектора состояния (минимизация среднеквадратической ошибки оценивания) и свойство рекуррентности, когда «новая» оценка вектора состояния получается из «старой» оценки (оценка на предыдущем шаге) и обработки «нового» измерения. Такая схема оценивания получила название «предиктор-корректор». Свойство рекуррентности существенно уменьшает вычислительные затраты на построение оценки вектора состояния и позволяет реализовать (в большинстве случаев) процесс оценивания в реальном масштабе времени. Однако при использовании этих алгоритмов на практике возникает проблема расходимости – когда «истинные» ошибки оценивания вектора состояния существенно выше «расчетных» значений, вычисленных по расчетным соотношениям алгоритма оценивания, т. е. алгоритм оценивания работает не в оптимальном режиме. Для преодоления расходимости алгоритм оценивания должен обнаружить нарушение оптимального режима и провести коррекцию расчетной схемы алгоритма. В работе построен простой и хорошо реализуемый на практике критерий расходимости рекуррентного алгоритма оценивания, который достаточно точно обнаруживает момент потери алгоритмом свойства оптимальности, т. е. момент начала резкого возрастания среднеквадратической ошибки оценивания. В основу этого критерия положена проверка статистических гипотез о свойствах обновляющего процесса, который представляет разность между текущим измерением и предсказанным значением этого измерения. При наступлении такого момента включается предлагаемый алгоритм адаптации, который изменяет ковариационную матрицу ошибки предсказания таким образом, чтобы вернуть алгоритму оценивания свойство оптимальности. Проведенный вычислительный эксперимент показал высокую эффективность построенного критерия и предложенного алгоритма адаптации даже при больших ошибках в задании матриц модели динамической системы.

Ключевые слова: рекуррентный алгоритм оценивания, фильтр Калмана, обновляющий процесс, свойство оптимальности алгоритма оценивания, расходимость алгоритма оценивания, критерий расходимости, ошибка предсказания вектора состояния, статистические свойства ошибки предсказания, алгоритм адаптации, эффективность алгоритма адаптации

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-7-22

* Статья получена 14 мая 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 60-х годов прошлого столетия *рекуррентные алгоритмы оценивания* (в литературе также используется второе название – *фильтр Калмана*) получили широкое распространение при решении ряда задач идентификации, оценивания, фильтрации и управления [2, 3, 8, 9, 15]. Эти алгоритмы имеют ряд преимуществ, к основным из которых следует отнести следующие:

1) свойство рекуррентности, когда «новая» оценка вектора состояния получается из «старой» оценки (оценка на предыдущем шаге) и обработки «нового» измерения, такая схема оценивания получила название *предиктор-корректор*. Это существенно уменьшает вычислительные затраты на построение оценки вектора состояния и позволяет реализовать (в большинстве случаев) процесс оценивания в реальном масштабе времени;

2) оптимальность оценки вектора состояния (минимизация среднеквадратической ошибки);

3) вычисление *обновляющей матрицы* алгоритма (другое название – *матрица коэффициентов фильтра Калмана*) не зависит от конкретной реализации случайного вектора измерений. Поэтому для повышения вычислительной эффективности алгоритма можно априори (до начала процедуры оценивания) вычислить все используемые в алгоритме оценивания матрицы, и тогда вычисление «новой» оценки сводится к умножению матрицы на вектор и сложению двух векторов, что минимизирует вычислительные затраты на построение «новой» оценки.

Однако при использовании на практике рекуррентных алгоритмов возникает *проблема расходимости алгоритма оценивания*. Расходимость вызывается неточностями (погрешностями), которые были допущены при построении рекуррентного алгоритма фильтрации. Одними из главных источников таких неточностей являются:

- неточность задания процессов динамики объекта и измерений;
- линеаризация уравнений динамики и измерений;
- упрощающие предположения, позволяющие дать математическое описание задачи;
- неточности в задании вероятностных характеристик шума измерений и (или) возмущения динамики объекта;
- погрешности округления, неизбежно возникающие при вычислениях с матрицами и приводящие к потере положительной определенности ковариационных матриц ошибок оценивания.

Расходимость характеризуется тем, что *истинные* ошибки оценивания вектора состояния могут существенно (на порядок и более) превышать *теоретические* значения, определяемые диагональными элементами вычисленной («теоретической») ковариационной матрицы ошибок оценивания. Расходимость является существенным препятствием для широкого и успешного применения алгоритмов рекуррентного оценивания на практике.

Поэтому в данной работе для предотвращения такой расходимости предлагаются критерий расходимости (определяет момент нарушения оптимального режима оценивания) и алгоритм адаптации процедуры оценивания (коррекция ковариационной матрицы ошибки предсказания вектора состояния для восстановления оптимального режима оценивания).

1. РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Необходимым условием применения рекуррентного алгоритма (фильтра Калмана) является возможность описания исследуемой динамической системы (или процесса) в пространстве состояний. При этом описание включает две модели: модель динамики вектора состояний системы и модель измерений вектора состояний. Приведем запись этих моделей в самом общем виде.

Предположим, что модель дискретной системы описывается разностными уравнениями первого порядка вида [2, 3, 4, 10, 11, 15]

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k) + \Psi(k+1, k)u(k), \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x(t)$ – t -мерный вектор состояния системы; $w(t)$ – p -мерный вектор возмущения; $u(t)$ – r -мерный вектор управления. Матрицу $\Phi(k+1, k)$ размером $t \times t$ называют переходной матрицей состояния; матрицу $\Gamma(k+1, k)$ размером $t \times p$ – переходной матрицей возмущений; матрицу $\Psi(k+1, k)$ размером $t \times r$ – переходной матрицей управления. Очевидно, что, зная: а) возмущающую последовательность $\{w(0), w(1), \dots\}$; б) управляющую последовательность $\{u(0), u(1), \dots\}$; в) вектор начального состояния $x(0)$, можно вычислить последовательность состояний $\{x(1), x(2), \dots\}$.

Вектор состояния (или часть его проекций) измеряется с помощью определенных датчиков, и этот процесс измерения описывается матричным соотношением

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + \eta(k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $z(k+1)$ – n -мерный вектор измерения; $\eta(k+1)$ – n -мерный вектор ошибки измерения (или шум измерения); $H(k+1)$ – матрица размером $n \times t$ – матрица измерений.

Относительно дискретных последовательностей, входящих в (1) и (2), сделаем следующие (не очень обременительные) предположения.

1. Процесс $\{w(i), k = 0, 1, \dots\}$ является p -мерной гауссовской белой последовательностью, для которой

$$M[w(k)] = m_w(k); \quad M[w(j)w^T(k)] = V_w(k)\delta_{jk}, \quad (3)$$

где

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $V_w(k)$ – ковариационная матрица и два вектора $w(j)$ и $w(k)$ не коррелированы, если $j \neq k$ (на это указывает дискретная функция Дирака (4)).

2. Процесс $\eta(k+1)$ представляет собой n -мерную гауссовскую белую последовательность, для которой

$$M[\eta(k+1)] = \bar{0}; \quad M[\eta(j+1)\eta^T(k+1)] = V_\eta(k+1)\delta_{jk}, \quad (5)$$

где $\bar{0}$ – вектор с нулевыми проекциями (нулевой вектор).

3. Для любых j и k

$$M[w(k)\eta^T(j)] \equiv O, \quad (6)$$

где O – нулевая матрица соответствующего размера, т. е. векторы $w(k)$ и $\eta(j)$ не коррелированы.

4. Вектор начального состояния $x(0)$ – это гауссовский m -вектор с

$$M[x(0)] = m_x(0); \quad M[x(0)x^T(0)] = V_x(0), \quad (7)$$

который не зависит от $\{w(k), k=0, 1, \dots\}$ и $\{\eta(k+1), k=0, 1, \dots\}$, т. е.

$$M[x(0)w^T(k)] = O; \quad M[x(0)\eta^T(k+1)] = O \quad (8)$$

для любого $k=0, 1, \dots$

При сделанных предположениях оценка $\hat{x}(k+1)$ рекуррентного алгоритма (фильтра Калмана), которая минимизирует текущую СКО оценивания

$$\Delta(k+1) = M\left[\|\hat{x}(k+1) - x(k+1)\|^2\right], \quad (9)$$

определяется следующими рекуррентными соотношениями [5, 9]:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & \Phi(k+1, k)\hat{x}(k) + K(k+1)\{z(k+1) - \\ & - H(k+1)[\Phi(k+1, k)\hat{x}(k) + \Gamma(k+1, k)m_w(k) + \Psi(k+1, k)u(k)]\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$k=1, 2, \dots$, и начальным условием $x(0) = m_x(0)$;

$$K(k+1) = V_\varepsilon(k+1)H^T(k+1)V_\eta^{-1}(k+1); \quad k=1, 2, \dots; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(k+1) = & (V_\varepsilon k+1|k) - V_\varepsilon(k+1|k)H^T(k+1) \times \\ & \times \left[H(k+1)V_\varepsilon(k+1|k)H^T(k+1) + V_\eta \right]^{-1} H(k+1)V_\varepsilon(k+1|k); \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_\varepsilon(k+1|k) = \Phi(k+1, k)V_\varepsilon(k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)V_w(k)\Gamma^T(k+1, k), \quad (13)$$

$k=1, 2, \dots$, и начальным условием $V_\varepsilon(0) = V_x(0)$,

где $\hat{x}(k+1|k)$ – предсказания вектора состояния в момент $k+1$ по измерениям до k -го момента включительно, матрица $V_\varepsilon(k+1)$ – ковариационная мат-

рица случайной ошибки оценивания $\varepsilon(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$, матрица $V_\varepsilon(k+1|k)$ – ковариационная матрица случайной ошибки предсказания $\varepsilon(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)$.

Приведенные выражения определяют последовательность вычислений матриц рекуррентного алгоритма. Последовательность использования формул следующая: (13), (12), (11):

$$V_\varepsilon(k) \rightarrow V_\varepsilon(k+1|k) \rightarrow V_\varepsilon(k+1) \rightarrow K(k+1). \quad (14)$$

На практике часто встречается случай скалярных измерений, по которым необходимо оценить вектор состояний. Рассмотрим следующую динамическую систему со стационарным вектором измерения x (широко используемую в задачах идентификации стационарных систем) и скалярными измерениями z_{k+1} [4]:

$$x(k+1) = x(k) = x, \quad (15)$$

$$z_{k+1} = h_{k+1}x + \eta_{k+1}, \quad (16)$$

где h_{k+1} – вектор-строка размером $1 \times m$ (аналог матрицы $H(k+1)$ при векторных измерениях); η_{k+1} – случайная скалярная величина – шум измерения. Предположим, что

- вектор состояния x есть гауссовский случайный m -мерный вектор с вектором математического ожидания и корреляционной матрицей

$$m_x = M[x]; \quad V_x = M[(x - m_x)(x - m_x)^T];$$

- шум измерения $\{\eta_{k+1}, k=0, 1, \dots\}$ представляет собой скалярную гауссовскую белую последовательность со следующими числовыми характеристиками:

$$M[\eta_{k+1}] = 0; \quad M[\eta_{k+1}^2] = \sigma_{k+1}^2; \quad M[\eta_j \eta_k] = 0 \text{ при } j \neq k.$$

При сделанных предположениях из уравнений (10)–(13) непосредственно получаем рекуррентный алгоритм *оптимального оценивания стационарного вектора состояния по скалярным измерениям*, описываемый следующими уравнениями:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + \frac{V_\varepsilon(k+1)h_{k+1}^T}{\sigma_{k+1}^2} [z_{k+1} - h_{k+1}\hat{x}(k)], \quad (17)$$

$$V_\varepsilon(k+1) = V_\varepsilon(k) - \frac{V_\varepsilon(k)h_{k+1}^T h_{k+1} V_\varepsilon(k)}{\left[h_{k+1} V_\varepsilon(k) h_{k+1}^T + \sigma_{k+1}^2 \right]} \quad (18)$$

для $k = 0, 1, 2, \dots$ с точкой «старта» $\hat{x}(0) = m_x, V_\varepsilon(0) = V_x$.

Видно, что алгоритм оценивания стационарного вектора состояния по скалярным наблюдениям включает умножение матрицы на вектор, но не содержит обращения матриц, которое присутствует в алгоритме оценивания общего вида (см. (12)).

Заметим, что алгоритм оценивания нестационарного вектора состояний по скалярным измерениям был приведен в работе [7], где решалась задача оценки градиента в экстремальных системах автоматического регулирования.

Отметим некоторые специфические особенности построенных алгоритмов оценивания:

- текущая оценка $\hat{x}(k+1)$ вектора состояния определяется двумя слагаемыми: вектором предсказания (первое слагаемое в (10), (17)) и вектором коррекции (второе слагаемое в (10), (17)), который зависит от нового вектора измерения $z(k+1)$ (или от скалярного измерения z_{k+1});
- матрица $K(k+1)$ не зависит от измерений $\{z_1, \dots, z_{k+1}\}$, поэтому она может быть вычислена априори, и ее элементы сохранены в памяти компьютера, что позволяет строить оценку $\hat{x}(k+1)$ в реальном масштабе времени;
- вычисление ковариационной матрицы $V_\varepsilon(k+1)$ вектора ошибки оценивания позволяет определить числовые характеристики случайной ошибки оценивания $\xi(k+1) = \varepsilon(k+1) - M[\varepsilon(k+1)]$, что позволяет говорить о точности алгоритма оценивания градиента.

Последние две особенности отчасти обуславливают процесс *расходимости алгоритма оценивания* – истинные ошибки оценивания вектора состояния могут существенно превышать расчетные значения, определяемые диагональными элементами вычисленной («теоретической») ковариационной матрицы $V_\varepsilon(k+1)$ ошибок оценивания. Почему это происходит?

Увеличение ошибки оценивания можно объяснить уменьшением элементов обновляющей матрицы $K(k+1)$ фильтра до маленьких значений (иногда и до нуля), что обуславливает снижение «чувствительности» алгоритма к вновь поступающим измерениям. Такое «расчетное» уменьшение элементов матрицы $K(k+1)$ является «правильным» только при условии, что априорная информация, необходимая для вычисления $K(k+1)$, задана точно. Понятно, что на практике такая ситуация – скорее исключение, чем правило. Например, изменения в «истинной» модели системы матриц $\Phi(k+1, k)$, $\Gamma(k+1, k)$ после завершения переходного процесса алгоритма оценивания могут привести к увеличению значений обновляющего процесса $\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)$. Однако это не вызовет изменения оценки $\hat{x}(k+1)$ из-за малой величины «корректора» $K(k+1)\tilde{z}(k+1|k)$. Аналогичный эффект может наблюдаться из-за неточного задания или изменения в процессе работы фильтра вторых моментов случайных процессов $w(k)$, $\eta(k)$.

Таким образом, расходимость обусловлена отличием параметров «истинной» (но неизвестной) модели от параметров «расчетной» модели, по которой вычисляются оценки $\hat{x}(k)$, и выражается в потере «чувствительности» алгоритма к новым измерениям, несущим информацию о поведении «истинной» модели.

Для иллюстрации такой расходимости приведем следующий пример.

Предположим, что «истинная» модель динамической системы описывается следующими скалярными уравнениями:

$$x(k+1) = x(k) + 1 + w(k), \quad (19)$$

$$z(k+1) = x(k+1) + \eta(k+1) \quad (20)$$

со следующими характеристиками:

$$x(0) \sim N(0, V_x), \quad w(k) \sim N(0, V_\omega), \quad \eta(k) \sim N(0, V_\eta).$$

В качестве «расчетной» модели (нижний индекс p в обозначениях) брались соотношения

$$x_p(k+1) = x_p(k) + w(k), \quad (21)$$

$$z_p(k+1) = x_p(k+1) + \eta(k+1), \quad (22)$$

где $x_p(0) \sim N(0, V_x)$. Видно, что в расчетной модели отсутствует слагаемое 1, входящее в выражение (19). Алгоритм оценивания, построенный по уравнениям «истинной модели», описывается соотношениями

$$V_\varepsilon(k+1|k) = V_\varepsilon(k) + V_\omega, \quad K(k+1) = \frac{V_\varepsilon(k+1|k)}{V_\varepsilon(k+1|k) + V_\eta},$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \hat{x}(k) + 1, \quad (23)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)[z(k+1) - \hat{x}(k+1|k)],$$

$$V_\varepsilon(k+1) = (I - K(k+1))V_\varepsilon(k+1|k), \text{ где } k=0, 1, \dots; \hat{x}(0) = 0; V_\varepsilon(0) = V_x.$$

Алгоритм оценивания, построенный по уравнениям (21) и (22), отличается от предыдущего только двумя уравнениями:

$$\hat{x}_p(k+1|k) = \hat{x}_p(k), \quad (24)$$

$$\hat{x}_p(k+1) = \hat{x}_p(k+1|k) + K(k+1)[z(k+1) - \hat{x}_p(k+1|k)], \text{ где } \hat{x}_p(0) = 0. \quad (25)$$

На рис. 1 показаны графики значений квадратов ошибок оценивания $\Delta(k) = (\hat{x}(k) - x(k))^2$ – график 1; $\Delta_p(k) = (\hat{x}_p(k) - x(k))^2$ – график 2, соответствующие $V_x = 1.01$; $V_\omega = 0.01$; $V_\eta = 1.0$. Анализ этих графиков указывает на «расходимость» оценки $\hat{x}_p(k)$, которая уже наступает после третьего шага алгоритма оценивания. После этого шага ошибка $\Delta_p(k)$ начинает монотонно возрастать и существенно (на 2-3 порядка) превосходит $\Delta(k)$. Графики 3, 4 будут пояснены позже.

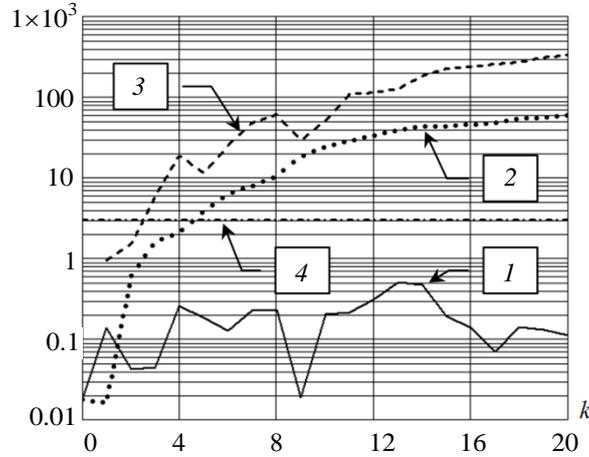


Рис. 1. Расходимость алгоритма оценивания

Возникает вопрос: *можно ли устранить (или хотя бы существенно уменьшить) расходимость алгоритма оценивания?*

Ответ: *расходимость алгоритма в определенной степени можно устранить*, но для этого в рекуррентный алгоритм оценивания необходимо ввести две новые «компоненты»:

- проверку адекватности «истинной» (существующей в реальности) и «расчетной» (используемой при построении алгоритма оценивания) моделей динамической системы с помощью некоторого критерия;
- управление параметрами «расчетной» модели или параметрами алгоритма оценивания для устранения этой неадекватности.

Наличие в рекуррентном алгоритме этих двух новых элементов позволяет говорить об адаптивности алгоритма оценивания.

2. КРИТЕРИЙ РАСХОДИМОСТИ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА

Большинство используемых критериев адаптации рекуррентного алгоритма основано на следующем *свойстве оптимальности оценивания* [11]: *если вектор $\hat{x}(k)$ является оптимальной оценкой (т. е. минимизирует функционал (9)), то обновляющая дискретная последовательность*

$$\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k)$$

является белой гауссовской последовательностью с числовыми характеристиками:

$$m_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1) = M[\tilde{z}(k+1|k)] = \bar{0}; \quad (26)$$

$$V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, j+1) = M[\tilde{z}(k+1|k)\tilde{z}^T(j+1|j)] =$$

$$= \begin{cases} H(k+1)V_{\varepsilon}(k+1|k)H^T(k+1)+V_{\eta}(k+1), & \text{если } k=j; \\ O, & \text{если } k \neq j. \end{cases} \quad (27)$$

Верхний индекс «opt» указывает, что эти значения числовых характеристик справедливы только для оптимальной оценки $\hat{x}(k)$. Очевидно, что отклонение «расчетной» модели от «истинной», в свою очередь, вызовет отклонение числовых характеристик «истинной» обновляющей последовательности алгоритма оценивания

$$\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad (28)$$

от характеристик $m_{\tilde{z}}(k+1)$, $V_{\tilde{z}}(k+1)$, которые вычисляются по «расчетной» модели системы. Таким образом, проверку адекватности моделей можно свести к проверке гипотез о количественных характеристиках последовательности (28).

В качестве основной гипотезы H_0 принимается предположение, что процесс $\tilde{z}(k+1|k)$ имеет первые два момента, определяемые соотношениями (26) и (27), т. е. алгоритм работает в оптимальном режиме. Заметим, что при вычислении матрицы $V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, k+1)$ используются параметры «расчетной» модели, по которой строилась оценка $\hat{x}(k)$. В качестве альтернативной гипотезы H_1 принимается обратное предположение: процесс $\tilde{z}(k+1|k)$ имеет первые два момента, отличные от значений (26) и (27).

Для проверки этих гипотез в качестве критерия примем случайную величину

$$\rho(k+1) = \tilde{z}^T(k+1|k) \left(V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, k+1) \right)^{-1} \tilde{z}(k+1|k). \quad (29)$$

Покажем, что если справедлива гипотеза H_0 , то распределение случайной величины $\rho(k+1)$ можно аппроксимировать χ^2 -распределением с n степенями свободы, где n – число проекций вектора измерений. Первоначально вычислим математическое ожидание $M[\rho(k+1)]$. Имеет место очевидное равенство

$$\begin{aligned} M[\rho(k+1)] &= Sp \left[\left(V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, k+1) \right)^{-1} M \left[\left(\tilde{z}(k+1|k) \tilde{z}^T(k+1|k) \right) \right] \right] = \\ &= Sp \left[\left(V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, k+1) \right)^{-1} V_{\tilde{z}}(k+1, k+1) \right]. \end{aligned}$$

Если выполняется равенство (т. е. рекуррентный алгоритм работает в оптимальном режиме)

$$V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, k+1) = V_{\tilde{z}}(k+1, k+1), \quad (30)$$

то

$$M[\rho(k+1)] = n. \quad (31)$$

Кроме этого, при принятии гипотезы H_0 случайная величина $\rho(k+1)$ представляет собой сумму квадратов n случайных величин с единичной дисперсией и нулевым средним. Поэтому проверку нулевой гипотезы можно свести к проверке гипотезы о том, что величина $\rho(k+1)$ имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы. Для этого введем интервал

$$\Theta_\beta = [\theta_{\beta/2}, \theta_{1-\beta/2}], \quad (32)$$

где $\theta_{\beta/2}, \theta_{1-\beta/2}$ – квантили χ^2 -распределения с n степенями свободы уровня значимости $\beta/2, 1-\beta/2$ соответственно. Если $\rho(k+1)$ попадает в интервал (32), то с вероятностью ошибки первого рода, равной β , принимается гипотеза H_0 (т. е. алгоритм оценивания работает в оптимальном режиме). Напомним, что ошибкой первого рода при проверке статистических гипотез называется отвержение гипотезы H_0 и принятие гипотезы H_1 , хотя на самом деле гипотеза H_0 справедлива.

В таблице приведены квантили для $n = 1, 2, \dots, 10$ и $\beta = 0.1$.

Квантили χ^2 -распределения

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\theta_{0.05}$	0.039	0.103	0.352	0.711	1.145	1.645	2.167	2.733	3.325
$\theta_{0.95}$	3.800	6.000	7.815	9.488	11.070	12.590	14.06	15.500	16.910

Таким образом, если выполняется неравенство

$$\theta_{\beta/2} \leq \rho(k+1) \leq \theta_{1-\beta/2}, \quad (33)$$

то принимается гипотеза об оптимальном режиме работы рекуррентного алгоритма оценивания.

Заметим, что подход, основанный на проверке статистических гипотез, был предложен автором для выбора параметра регуляризации в устойчивых алгоритмах параметрической идентификации и при решении обратных задач [5, 6].

Вернемся к примеру оценивания вектора состояния динамической системы (19) и (20), когда расчетная модель задавалась уравнениями (21) и (22), т. е. переходная матрица была задана с ошибкой. На рис. 1 график 3 показывает значения критерия $\rho(k)$, а прямая 4 – квантиль $\theta_{0.95} \chi^2$ -распределения с $n=1$ степенями свободы. Видно, что момент нарушения неравенства (33) соответствует резкому возрастанию ошибки оценивания (кривая 2), что говорит о начале процесса расходимости алгоритма оценивания.

Таким образом, проверка адекватности реальной и расчетной моделей свелась к проверке неравенства (33), и поэтому величину (29) можно рас-

считать как критерий расходимости рекуррентного алгоритма оценивания. При невыполнении этого неравенства (т. е. если значение критерия (29) попало в критическую область) можно говорить о существенном (значимом) расхождении между реальной и расчетной моделями, следовательно, необходимо осуществить коррекцию параметров рекуррентного алгоритма.

3. ПРОЦЕДУРА АДАПТАЦИИ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

В публикациях [1, 12, 13, 14] было предложено несколько подходов к построению адаптивных алгоритмов оценивания, в частности на проверке свойства (26) обновляющей последовательности. Однако, получаемые процедуры адаптации были либо сложны для практического применения, либо имели низкую эффективность. Поэтому рассмотрим адаптацию, основанную на коррекции ковариационной матрицы ошибки предсказания.

Обратимся к соотношениям (10)–(13), описывающим работу алгоритма оценивания. Видно, ковариационная матрица ошибки предсказания $V_\varepsilon(k+1|k)$ оказывает влияние и на ковариационную матрицу ошибки оценивания $V_\varepsilon(k+1)$, и на обновляющую матрицу $K(k+1)$. Поэтому адаптацию алгоритма оценивания будем производить коррекцией «расчетной» матрицы $V_\varepsilon(k+1|k)$ в виде

$$V_\varepsilon^{(a)}(k+1|k) = (1 + k_V(k+1)) \left[\Phi(k+1|k) V_\varepsilon(k) \Phi^T(k+1|k) + \Gamma(k+1|k) V_w(k) \Gamma^T(k+1|k) \right]. \quad (34)$$

Матрица $V_\varepsilon^{(a)}(k+1|k)$ – ковариационная матрица ошибки предсказания после процедуры адаптации. Коэффициент $k_V(k+1)$ назовем коэффициентом (параметром) адаптации. Для задания этого коэффициента предлагается использовать следующее соотношение:

$$k_V(k+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho(k+1) \leq \theta_{1-\beta/2}; \\ \frac{\max(\rho(k+1), n) - n}{\theta_{1-\beta/2}}, & \text{если } \rho(k+1) > \theta_{1-\beta/2}, \end{cases} \quad (35)$$

где $\theta_{1-\beta/2}$ – квантиль χ^2 -распределения с n степенями свободы уровня значимости $1-\beta/2$.

Работу предложенной процедуры адаптации можно описать следующими этапами.

1. На некотором шаге $k+1$ рекуррентного алгоритма оценивания вычисляется обновляющая последовательность

$$\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - H(k+1) \hat{x}(k+1|k)$$

и вычисляются значения критерия (29), в котором

$$V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1, j+1) = H(k+1)V_{\varepsilon}(k+1|k)H^T(k+1) + V_{\eta}(k+1)$$

определяется через расчетные значения матриц.

2. Если выполняется неравенство (33), то алгоритм оценивания работает в оптимальном режиме и идет построение расчетной оценки $\hat{x}(k+1)$, а затем переход к новому шагу и пункту 1. В противном случае – пункт 3.

3. По формуле (35) вычисляется коэффициент адаптации и по формуле (34) – матрица $V_{\varepsilon}^{(a)}(k+1|k)$, которая в дальнейших расчетах выступает в роли новой матрицы $V_{\varepsilon}(k+1|k)$. Переход к пункту 1.

Приведем запись процедуры адаптации рекуррентного алгоритма оценивания (17)–(18) стационарного вектора состояния. Для принятой модели определим

$$\tilde{z}(k+1|k) = z_{k+1} - h_{k+1}\hat{x}(k); \quad V_{\tilde{z}}^{(\text{opt})}(k+1|k) = h_{k+1}V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T + \sigma_{k+1}^2.$$

Тогда критерий (29) можно записать в виде

$$\rho(k+1) = \frac{(z_{k+1} - h_{k+1}\hat{x}(k))^2}{h_{k+1}V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T + \sigma_{k+1}^2}. \quad (36)$$

Из этого выражения видно, что величину $\rho(k)$ можно уменьшить путем увеличения $V_{\varepsilon}(k)$, что эквивалентно увеличению вектора $K(k+1)$ (см. выражение (17)). Увеличение $V_{\varepsilon}(k)$ можно достигнуть умножением этой матрицы на скалярную величину $c_V(k)$. Тогда адаптивный алгоритм рекуррентного оценивания можно записать в виде

$$\hat{x}_a(k+1) = \hat{x}_a(k) + \frac{c_V(k)V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T}{c_V(k)h_{k+1}V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T + \sigma_{k+1}^2} [z_{k+1} - h_{k+1}\hat{x}_a(k)]; \quad (37)$$

$$V_{\varepsilon}(k+1) = c_V(k)V_{\varepsilon}(k) - \frac{c_V^2(k)V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T h_{k+1}V_{\varepsilon}(k)}{c_V(k)h_{k+1}V_{\varepsilon}(k)h_{k+1}^T + \sigma_{k+1}^2}, \quad (38)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_a(0) = m_x; \quad V_{\varepsilon}(0) = V_x.$$

Для выбора множителя $c_V(k)$ предлагается следующее соотношение:

$$c_V(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(k) \leq 3.8; \\ \frac{\rho(k)}{3.8}, & \text{если } \rho(k) > 3.8. \end{cases} \quad (39)$$

Константа 3.8 является квантилем $\theta_{0.95} \chi^2$ -распределения с числом степеней свободы 1 (см. таблицу).

Для иллюстрации работоспособности предложенных алгоритмов адаптации вернемся к примеру оценивания вектора состояния системы (19) и (20) при неправильной расчетной модели (21), (22). Для этой системы использовался частный случай коррекции (34), где коэффициент $k_V(k+1)$ определялся выражением (35). На рис. 2 график 1 – значения ошибки оценивания $\Delta(k) = (\hat{x}(k) - x(k))^2$ для «истинной» модели; кривая 2 – величина $\Delta_a(k) = (\hat{x}_a(k) - x(k))^2$ ошибки оценивания адаптивным алгоритмом; кривая 3 – значения статистики $\rho_a(k)$ для адаптивного алгоритма. Видно следующее:

- все значения $\rho_a(k)$ находятся ниже граничного значения $\theta_{0.95}$ – штриховая линия на рис. 2;
- оценка адаптивного фильтра $\hat{x}_a(k)$ имеет существенно более высокую точность по сравнению с фильтром, построенным по неточной модели системы (см. рис. 1).

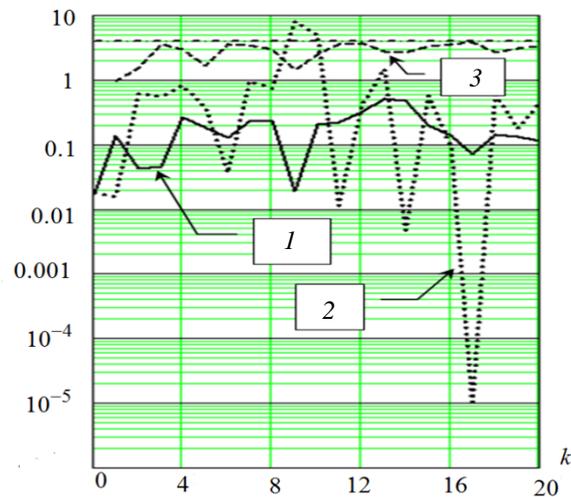


Рис. 2. Адаптация алгоритма оценивания

Результаты как этого вычислительного эксперимента, так и других, выполненных с разными моделями динамических систем, позволяют говорить об эффективности предложенного подхода к построению адаптивных алгоритмов оценивания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный критерий позволяет достаточно точно оценить момент начала расходимости рекуррентного алгоритма оценивания вектора состояния динамических систем. Он не требует никакой априорной информации об оцениваемом векторе состояния. Для предотвращения расходимости предложена процедура адаптации, которая состоит в коррекции ковариационной матрицы ошибки предсказания, что позволяет поддерживать оптимальный режим работы алгоритма оценивания даже при больших ошибках задания как переходной матрицы системы, так и других матриц, входящих в модель системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуэн К.Ф., Грант П.М. Адаптивные фильтры: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
2. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М.: Наука, 1984. – 186 с.
3. Браммер Л., Зифлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 199 с.
4. Воскобойников Ю.Е. Рекуррентное оценивание вектора состояния динамических систем. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 136 с.
5. Воскобойников Ю.Е. Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации: научная монография. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 168 с.
6. Воскобойников Ю.Е. Устойчивые алгоритмы решения обратных задач: научная монография. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ (Сибстрин), 2007. – 188 с.
7. Воскобойников Ю.Е., Ханин А.Г. Рекуррентный алгоритм оценивания градиента в системах экстремального регулирования // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 3–9.
8. Карелин А.Е. Синтез, исследование и применение рекуррентных алгоритмов оценивания параметров математических моделей объектов в автоматизированных системах управления: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2007. – 18 с.
9. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: пер. с англ. / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
10. Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 340 с.
11. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
12. Doblinger G. An adaptive Kalman filter for the enhancement of noisy AR signals // Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'98, 31 May – 3 June 1998. – Monterey, California: IEEE, 1998. – Vol. 5. – P. 305–308. – doi: 10.1109/ISCAS.1998.694474.
13. Naykin S. Adaptive filter theory. Chap. 9. – New York: Prentice-Hall, 1987. – 323 p.
14. Adaptive filtering of color noise using the Kalman filter algorithm / S. Xiong, Z. Zhou, L. Zhong, C. Xu, W. Zhang // Proceedings of the 17th Instrumentation and Measurement Technology Conference, Baltimore, Maryland, USA, 1–4 May 2000. – Piscataway, New Jersey: IEEE Service Center, 2000. – Vol. 2. – P. 1009–1012.
15. Spall J.C. Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control. – Hoboken, New Jersey: Wiley, 2003. – 618 p.

Воскобойников Юрий Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики НГАСУ (Сибстрин), профессор кафедры автоматики НГТУ, заслуженный работник Высшей школы РФ. Основное направление научных исследований – решение некорректных задач интерпретации данных, задачи вычислительной томографии, идентификация динамических систем, фильтрация сигналов и изображений. Имеет более 290 научных публикаций, 6 монографий, 16 учебников и учебных пособий. E-mail: voscob@mail.ru

The divergence criterion and the adaptation algorithm of the recurrent algorithm of the state vector estimation*

Yu.E. VOSKOBOINIKOV

Novosibirsk State Architecture and Building University, 113, Leningradskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia, D.Sc. (Phys. & Math.), professor. E-mail: voscob@mail.ru

Recurrent estimation algorithms (Kalman filter) is widespread in solving a wide range of problems of control, identification and filtering. These algorithms have several advantages over other algorithms for solving these problems. The main of these advantages is an optimal estimate of the state vector (minimization of the mean square error of estimation) and the recur-

* Received 14 May 2015.

rence property when a "new" estimate of the state vector is obtained from an "old" estimate (evaluation at the previous step) and processing a "new" measurement. This scheme has received the predictor-corrector name. The recurrence property significantly reduces the computational cost to build estimates of the state vector and (in most cases) allows implementing the estimation process in real-time. However, when these algorithms are used in practice, the problem of divergence arises when the "true" error of estimation of the state vector is significantly higher than the "design" values calculated through the estimated correlations of the estimation algorithm, i.e. the estimation algorithm does not work optimally. To overcome the divergence, the estimation algorithm must detect the violation of the optimal mode and to correct the computational scheme of the algorithm. In this paper we construct a simple divergence criterion of the recurrent algorithm estimation well implemented in practice, which accurately detects the time when the algorithm loses the optimality property, i.e. the beginning of a sharp increase in the root mean square error of estimation. This criterion is based on testing statistical hypotheses of properties of the updating process that represents the difference between the current measurement and the predicted value of this measurement. When such a moment occurs, the proposed adaptation algorithm which modifies the variance-covariance matrix of the prediction error intervenes so as to give back the optimality property to the estimation algorithm. The implementation of the computing experiment showed a high efficiency of the constructed criterion and the proposed adaptation algorithm, even with large errors in the matrix model of the dynamic system.

Keywords: recursive estimation algorithm, the Kalman filter, updating process, the optimality property of the estimation algorithm, the divergence of the estimation algorithm, the criterion of divergence, prediction error of the state vector, statistical properties of the prediction error, adaptation algorithm, efficiency of the adaptation algorithm

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-7-22

REFERENCES

1. Covan C.F., Grant P.M. *Adaptive filter*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1985. 382 p. (Russ. ed.: Kouen K.F., Grant P.M. *Adaptivnye fil'try*. Moscow, Mir Publ., 1988. 392 p.).
2. Balakrishnan A.V. *Kalman filtering theory*. New York, Optimization software, 1982. 182 p. (Russ. ed.: Balakrishnan A.V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 186 p.).
3. Brammer K., Siffing G. *Kalman-Busi filter*. New York, Artech House Publishers, 1985. 202 p. (Russ. ed.: Brammer L., Zifling G. *Fil'tr Kalmana-B'yusi*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 199 p.).
4. Voskoboinikov Yu.E. Rekurrentnoe otsenivanie vektora sostoyaniya dinamicheskikh sistem [Recurrent estimation of state vector of dynamic systems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2014. 136 p.
5. Voskoboinikov Yu.E. *Ustoichivye metody i algoritmy parametricheskoi identifikatsii* [The stable methods and algorithms for parametric identification]. Novosibirsk, NGASU (Sibstrin) Publ., 2006. 168 p.
6. Voskoboinikov Yu.E. *Ustoichivye algoritmy resheniya obratnykh zadach* [The stable algorithms for solving inverse problems]. Novosibirsk, NGASU (Sibstrin) Publ., 2007. 188 p.
7. Voskoboinikov Yu.E., Khanin A.G. Rekurrentnyi algoritm otsenivaniya gradienta v sistemakh ekstremal'nogo regulirovaniya [Recursive algorithm for gradient estimating in the systems extreme control]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University*, 2012, no. 1 (46), pp. 3–9.
8. Karelin A.E. *Sintez, issledovanie i primeneniye rekurrentnykh algoritmov otsenivaniya parametrov matematicheskikh modelei ob'ektov v avtomatizirovannykh sistemakh upravleniya*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Synthesis, study and application of recursive algorithms for estimating the parameters of mathematical models of objects in automated control systems. Author's abstract of PhD eng. sci. diss.]. Tomsk, 2007. 18 p.
9. Ljung L. *System identification – theory for the user*. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1988. 446 p. (Russ. ed.: L'yung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1991. 432 p.).

10. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*. New York, Mc. Graw Hill, 1969. 425 p. (Russ. ed.: Medich Dzh. *Statisticheskie optimal'nye lineinye otsenki i upravlenie*. Moscow, Energiya Publ., 1973. 340 p.).
11. Fomin V.N. *Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaya fil'tratsiya* [Recurrent estimation and adaptive filtration]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 288 p.
12. Doblinger G. An adaptive Kalman filter for the enhancement of noisy AR signals. *Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'98*, Monterey, California, 31 May – 3 June 1998, vol. 5, pp. 305–308. doi: 10.1109/ISCAS.1998.694474
13. Naykin S. *Adaptive filter theory*. Chap. 9. New York, Prentice-Hall, 1987. 323 p.
14. Xiong S., Zhou Z., Zhong L., Xu C., Zhang W. Adaptive filtering of color noise using the Kalman filter algorithm. *Proceedings of the 17th Instrumentation and Measurement Technology Conference, IMTC 2000*, Baltimore, Maryland, USA, 1–4 May, 2000, vol. 2, pp. 1009–1012. doi: 10.1109/IMTC.2000.848893
15. Spall J.C. *Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation, and control*. Hoboken, New Jersey, Wiley, 2003. 618 p.