*ISSN 1814-1196*
*Научный вестник НГТУ*
*том 60, № 3, 2015, с. 166–177*

*http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Science Bulletin of the NSTU*
*Vol. 60, No. 3, 2015, pp. 166–177*

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 519.2

# Формализованная модель развития системы, опирающейся на принцип тяготения к заданным уровням*

**Г.А. ПОПОВ**

*414056, РФ, г. Астрахань, ул. Татищева, 16, Астраханский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: popov@astu.org*

Работа посвящена математической формализации процесса функционирования систем, опирающихся на принцип тяготения к заданным уровням по фиксированной совокупности показателей. Приведены некоторые примеры систем описанного типа, относящихся к сферам образования, спорта, экономики. В качестве базового примера подобной системы рассматривается система школьного образования, ориентированного на формирование у выпускников заданного набора способностей и качеств. Сформулированы и формализованы основные предположения относительно механизма формирования заданного качества у субъекта и проведен первичный анализ сформулированных предположений по требованиям их корректности и полноты. На основе сделанных предположений выведена система дифференциальных уравнений, описывающая уровень развития заданного набора качеств у субъекта в произвольный момент времени. В качестве основной характеристики развития системы взята функция числа субъектов, достигших в заданный момент времени определенного уровня развития по всей совокупности показателей. Сформулированы начальные и граничные условия этой функции, а также условия тяготения субъекта в развитии каждого из заданных качеств по отношению к некоторому заданному его уровню. Совокупность уровней развития является управляемым параметром системы. При сделанных предположениях получено дифференциальное уравнение в частных производных для указанной выше функции. В качестве входных параметров систем рассматривается функция, описывающая распределение субъектов с различными уровнями заданных качеств, интенсивность обучения субъектов и средняя интенсивность восприятия обучающего воздействия субъектом. Решение полученных уравнений позволит решить задачу выбора набора оптимальных уровней развития, при которых суммарный уровень развития всех заданных качеств по всем субъектам будет максимальным.

**Ключевые слова:** принцип тяготения к заданному уровню, формализованная модель, дифференциальные уравнения для уровня развития систем, воздействие на субъекта, развиваемые качества и способности, управляемые уровни развития, характеристики коллективов субъектов

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-166-177

* *Статья получена 1 июня 2015 г.*

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема выбора принципа (назовем его принципом развития), определяющего направление и интенсивность развития конкретной системы («направление тяготения»), является одной из наиболее важных для любых систем. Это направление тяготения может быть обозначено в виде определенной цели или – более сложно – совокупности целей. Цели могут быть формализованы до уровня определенных целевых функций. В свою очередь, процесс достижения целевых значений этих функций часто сводят к процессу контроля некоторого набора (целевых) показателей, которые и определяют конкретное содержание действий всех субъектов, связанных с данной системой. Таким образом, содержание описанной пирамиды, всех происходящих в ней процессов, а также состояния, в какое придет система в результате своего развития, в существенной степени определяется выбранным принципом развития. Некоторые примеры принципов развития: тяготение к идеальному состоянию, к некоторому уровню (или уровням) развития, максимальное удаление от некоторых нежелательных состояний, обеспечение стабильности. Данная работа опирается на принцип тяготения к некоторому набору состояний. Этот принцип частично охватывает также принцип идеального состояния для случая, когда это идеальное состояние может быть описано некоторым набором уровней.

Приведем некоторые примеры подобных систем.

1. Система школьного обучения. Изначально ориентирована на выполнение требований государственного стандарта по среднему образованию, реально нацелена на достижения определенного (среднего) уровня подготовки выпускников, при котором обеспечивается сдача ЕГЭ всеми выпускниками. Таким образом, реально средняя школа функционирует по принципу тяготению к набору состояний, соответствующих сдаче ЕГЭ всеми выпускниками по заданному набору дисциплин. Отметим, что аналогично обстоит дело и в высшей школе.

2. Рыночная экономика функционирует на основе принципа идеального состояния, где под идеальным понимается состояние владения очень большой суммой денег (капиталом). Однако, государственный сектор экономики в значительной степени ориентирован на принцип тяготения к состоянию выполнения требований по заданному набору показателей.

3. Сфера спортивной подготовки ориентирована на достижение спортсменом определенного уровня по ряду спортивных качеств (физическая подготовка, волевая подготовка, быстрота реакции, уровень спортивного мышления, физические параметры спортсмена) и спортивных достижений, специфичных для каждого вида спорта. Таким образом, в сфере спортивной подготовки базовым является принцип тяготению к некоторому уровню по заданному набору показателей.

Ниже в качестве базового экземпляра, функционирующего по принципу тяготения к заданному набору состояний, рассматривается система школьного обучения. Тогда основным объектом, которого касается выбранный принцип тяготения, является ученик, более обще – субъект.

Основной целью работы является построение математической модели развития системы, функционирующей на основе принципа тяготения к заданному набору состояний.

Работ по построению формализованных моделей функционирования систем на основе определенных принципов или целевых функций крайне мало (см. [1]). Наиболее близкой является работа автора [2]. Данная работа посвящена обобщению результатов на случай наличия нескольких показателей и соответствующих им уровней тяготения. Также представляют интерес по теме исследования работы [3–5].

## 1. БАЗОВЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОЦЕНКА ТЕКУЩЕГО УРОВНЯ РАЗВИТИЯ СУБЪЕКТА

Приведем формализованное описание рассматриваемой в работе модели.

Имеется некоторый субъект, который характеризуется определенным набором свойств и качеств $Q_1$, $Q_2$,…,$Q_K$, где количество контролируемых качеств фиксировано. Например, в задаче обучения в средней школе таковыми качествами должны быть те качества и способности, которые школа должна вырабатывать и развивать у школьника в процессе его пребывания в стенах школы. Таковыми качествами могут быть ($K = 5$): 1) способность к саморазвитию ($Q_1$); 2) объем требуемых знаний ($Q_2$); 3) творческая активность и способность к творческой деятельности ($Q_3$); 4) целеустремленность ($Q_4$); 5) социальная креативность ($Q_5$). Здесь под социальной креативностью понимается способность выпускника достаточно быстро адаптироваться к новой социальной среде по месту работы, проживания, временного пребывания. Под целеустремленностью понимается не только способность упорно и последовательно добиваться поставленных целей, но и способность, правильно оценив текущую ситуацию, ставить адекватные ситуации цели или их корректировать.

Существующая среда деятельности субъекта нацелена на развитие каждого из качеств $Q_i$. Здесь под развитием может пониматься увеличение, усиление, улучшение каждого из качеств $Q_i$. Например, в задаче обучения – увеличение объема знаний у субъекта, усиление способности к саморазвитию, развитие творческих качеств и т. д. Для того чтобы обеспечить движение (изменение) субъекта в соответствии с выбранным принципом тяготения, необходимо наличие определенных воздействий на него. Все множество возможных воздействий разделим на две группы, из которых складывается результирующее воздействие на субъекта: внешние воздействия (со стороны других субъектов, обстоятельств и внешних структур) и внутренние воздействия, порождаемые непосредственно субъектом. Внешние воздействия делятся на три подгруппы: а) понуждение – создание дискомфортных, неприемлемых, нежелательных условий для субъекта или близких для него людей (проблемность продвижения по службе, невозможность или проблемность обеспечения требуемых условий для развития близких и др.); б) принуждение – создание условий, крайне неуютных и даже неприемлемых для субъекта (в частности, физическое и моральное давление на субъекта под страхом наказания); в) стимулирование – формирование набора стимулов, привлекательных для субъекта (экономических, моральных, разрешительных и др.). Внутренние механизмы воздействия можно разделить на следующие подгруппы: а) волевые качества субъекта, то есть выполнение определенных действий независимо от наличия/отсутствия внутренних стимулов; б) наличие внутренних стимулов и желаний; в) наличие понимания, порождающего необходимость движения в требуемом направлении.

Предполагается, что уровень развития каждого из качеств $Q_i$ у субъекта может быть измерен. Субъект имеет некоторый максимальный уровень развития $\theta_i$ качества $Q_i$, характеризующий полный объем его потенциальных возможностей по качеству $Q_i$.

Пусть в момент $t > 0$ субъект имеет уровень развития $v_i(t)$ по качеству $Q_i$; очевидно, $\theta_i > v_i(t)$ для любого $t > 0$. Составим соотношения, описывающие изменение уровня развития за малый промежуток времени $\Delta t$ при условии, что величина суммарного воздействия на субъект в момент $t$ равна $z_i(t)$.

Сделаем ряд предположений, лежащих в основе модели. Предположим, что для всех $i$ изменение уровня развития $i$-го качества $Q_i$ за промежуток $\Delta t$ прямо пропорционально следующим величинам.

1. Достигнутый уровень $v_i(t)$ развития $i$-го качества. Данное предположение, по-видимому, достаточно правдоподобно, когда $v(t)$ существенно меньше $\theta_i$.

$$\Delta v_i(t) \approx \sum_{j=1}^{K} r_{ij} v_j(t), \tag{1}$$

или в векторной форме $\Delta v(t) \approx R \cdot v(t)$, где знак «$\approx$» указывает на пропорциональную (линейную) зависимость левой части от правой части, а $r_{ij}$ – константы, не зависящие от уровня $t$ – они определяются внутренними зависимостями качеств $\{Q_i\}$ у субъекта, $R = [r_{ij}; i, j = \overline{1; K}]$. В случае одного качества данное условие означает, что величина $\frac{\Delta v(t)}{v(t)} 100\ \%$, описывающая процент увеличения рассматриваемых способностей за малый промежуток времени $\Delta t$, постоянна и не зависит от уже достигнутого уровня. Применительно к системе школьного обучения, в частности, чем больше ученик знает (качество $Q_1$), тем легче ему даются новые знания, и дополнительно предполагается, что понятие «легче» описывается линейной зависимостью. Коэффициент $r_{ij}$ в выражении (1) показывает степень зависимости качества $Q_i$ от качества $Q_j$.

2. Оставшиеся потенциальные возможности субъекта $\theta_i - v_i(t)$ по каждому из качеств $Q_i$. По мере приближения уровня развития к максимальному дальнейшее развитие становится все более затруднительным и проблематичным ввиду ограниченности оставшихся ресурсов, что и отражено в данном предположении:

а) в величине суммарного воздействия $z_i(t)$;

б) в длительности воздействия $\Delta t$.

Некоторые замечания по приведенным предположениям.

Предположение 1) наименее убедительно, и поэтому, так же как и остальные предположения, требует проверки и уточнения, например, на основе проведения психологических экспериментов в форме тестирования с последующим анализом полученных результатов.

Предположение 2а) в общем случае требует уточнения, так как при уровне воздействия $z_i(t)$, большем некоторого критического значения, субъект, по-видимому, может подвергнуться определенному «разрушению», т. е. его уровень развития даже опустится ниже прежнего. Однако, в работе рассматривается случай, когда уровень воздействия на субъекта ниже критического, и поэтому предположение 2а) приемлемо.

Встает вопрос, в каких единицах и как измерять воздействие. Воздействие должно измеряться результатом его реализации. Например, для качества $Q_2$ (объем требуемых знаний) величина воздействия может измеряться количеством бит информации, страниц, слов и т. п., которые добавились у субъекта после реализации воздействия. Аналогично по остальным качествам в системе школьного образования. Отметим также, что целесообразно разработать процедуру оценки воздействия исходя из приведенного выше анализа структуры воздействия.

При сделанных предположениях можно записать следующее соотношение ($i=\overline{1;\ K}$):

$$v_i(t+\Delta t)-v_i(t)=\overline{a}_i\sum_{j=1}^{K}r_{ij}v_j(t)(\theta_i-v_i(t))z_i(t)\Delta t+o(\Delta t)\,, \qquad (2)$$

где $\overline{a}_i$ – коэффициент пропорциональности и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$. Коэффициент пропорциональности $\overline{a}_i$, описывающий интенсивность развития качества $Q_i$ у субъекта, не зависит от $t$, но может зависеть от индивидуальных особенностей субъекта, в частности от $\theta_i$.

Разделив обе части выражения (1) на $\Delta t$ и устремив $\Delta t$ к нулю, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$v_i'(t)=\overline{a}_i\sum_{j=1}^{K}r_{ij}v_j(t)(\theta_i-v_i(t))z_i(t)\,, \qquad i=\overline{1;\ K}\,. \qquad (3)$$

Полученная система не относится к классическим типам систем дифференциальных уравнений, и поэтому вопрос ее решения является отдельной задачей.

## 2. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЛЕКТИВОВ СУБЪЕКТОВ

На основе соотношений, характеризующих уровень развития отдельных субъектов, выведем соотношения, описывающие уровень развития множеств однотипных субъектов – коллективов субъектов. Ниже рассматривается один из наиболее важных коллективов субъектов – субъекты, однотипные по своим качествам.

Пусть $X(y,t,\theta)$ ($y=(y_1,y_2,...,y_K)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_K)$) есть число субъектов, достигших в момент $t$ некоторого уровня развития $z=(z_1,z_2,...,z_K)$ такого, что $z_i\le y_i$ для всех $i$ и имеющих потенциальные возможности $\theta$

($\theta_i > y_i$ для всех $i$). Сделаем предположение относительно граничного значения функции $X(y,t,\theta)$, а именно $X(0,t,\theta)=0$ для любого $t > 0$. Данное условие означает, что нет субъектов с абсолютно нулевым уровнем развития, т. е. всякий субъект имеет некоторый положительный уровень развития.

Ниже предполагаются выполненными следующие условия:

а) в начальный момент $t = 0$ все субъекты имеют уровни развития по каждому признаку $Q_i$, пропорциональные их полным возможностям $\theta_i$, с некоторым универсальным коэффициентом пропорциональности $\alpha_i$; тогда из определения функции $X(y,t,\theta)$ выводим, что число субъектов с уровнем развития $u=(u_1,u_2,...,u_K)$, $u_i \ge \alpha_i\,\theta_i$ для всех $i$, зависит только от $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_K)$:

$$X(u,0,\theta)=\begin{cases} x(\theta), & \text{если } u_i \ge \alpha_i\theta_i \text{ для всех } i, \\ 0, & \text{если } u_i < \alpha_i\theta_i \text{ хотя бы для одного } i, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_i$ ($0<\alpha_i<1$; $i=\overline{1;\,K}$) – константы, $x(\theta)$ – заданная функция, описывающая распределение (количество) новорожденных детей по потенциальным возможностям по качествам $Q_i$;

б) необходимо также учесть, что каждый субъект в индивидуальной форме сопротивляется целенаправленному воздействию на него, и потому необходимо учесть данное явление в модели. С этой целью введем следующую характеристику: доля субъектов, воздействие на которые имеет «эффект воздействия (КПД)», лежащий в промежутке $[\tau_i,\tau_i+d\tau)$ по качеству $Q_i$ ($0\le\tau_i\le 1$; $i=\overline{1;\,K}$), равна $dF(\tau)$, где $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_K)$ и $F(\tau)$ – заданная функция, описывающая распределение всех субъектов по степени воспринимаемого воздействия по качествам $Q_i$ ($i=\overline{1;\,K}$). В этом случае для группы субъектов со степенью восприятия воздействия $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_K)$ в соотношении (3) необходимо положить, что $\bar{a}_i=a_{1,i}\tau$, где $a_{1,i}$ – константа (не зависит от $\tau$);

в) для каждого качества $Q_i$ задан некоторый уровень $b_i$, на который ориентируются все субъекты; это выражается в том, что величина воздействия $z_i(t)$ в момент $t$ на субъект с уровнем развития $v_i(t)$ равна $z_i(t)=a_{2,i}(b_i-v_i(t))$, где $a_{2,i}$ – некоторая абсолютная константа, различающаяся в случаях $b_i > v_i(t)$ и $b_i \le v_i(t)$.

Отметим, что уровень $b_i$ может находиться внутри области возможных значений качества $Q_i$. В этом случае у субъектов с уровнем качества $Q_i$ большем, чем $b_i$, при функционировании на основе принципа тяготения к уровню $b_i$ фактически происходит деградация качества $Q_i$. В частности, ориентация школьного образования на некоторый средний уровень, который легко доступен сильным ученикам, приводит к деградации многих из них, поскольку они теряют способности саморазвиваться и совершенствоваться. Отметим, что уровни $\{b_i\}$ являются управляющими параметрами модели, с помощью которых можно контролировать процесс развития качеств $Q_i$ в рассматриваемом коллективе субъектов.

Ставится задача нахождения функции $X(u,t,\theta)$ при условии, что известны $x(\theta)$, $\alpha_i$, $F(\tau)$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ и $b_i$ ($i=\overline{1;K}$). Предполагается, что $F(1, 1,..., 1)=1$. Ниже предполагается, что $F(0)\geq 0$, т. е. на часть субъектов воздействие в течение короткого интервала времени может не оказывать никакого влияния.

Выведем уравнения для функции $X(y,t,\theta)$.

Положим $a_i \overset{def}{=} a_{1,i}\,a_{2,i}$. При $b_i > v_i(t)$ константа $a_i$ описывает скорость возрастания возможностей субъекта по качеству $Q_i$, а при $b_i < v_i(t)$, что влечет $a<0$, – скорость его деградации по качеству $Q_i$.

В момент $t+\Delta t$ субъекты с полными возможностями $\theta$ имеют уровень развития $y<b$, т. е. $y_i<b_i$ для всех $i$ (число таких субъектов равно $d_yX(y,t+\Delta t,\theta))$ в следующих случаях:

1) либо в момент $t$ эти субъекты имеют уровень развития $y$ и за время $\Delta t$ приложенное воздействие не оказало на них никакого влияния (доля таких субъектов равна $F$(0)). Число таких субъектов $F(0)d_yX(y,t,\theta)$;

2) либо в момент времени $t$ эти субъекты были среди тех, воздействие на которых имеют КПД $\tau_i>0$ по качеству $Q_i$ (доля таких субъектов равна $d(F(\tau))$, эти субъекты имели уровень развития $v_i$ по качеству $Q_i$ и за время $\Delta t$ достигли уровня развития $y_i$. Ясно, что $v_i$ зависит от $y_i,\tau_i,\Delta t$, т. е. $v_i=v_i(y_i,\tau_i,\Delta t)=v_i(y_i,\tau_i,\Delta t,t)=v_i(t)$. Число таких субъектов равно $d_yX(v(y,\tau,\Delta t),t,\theta)\,dF(\tau)$, где

$$v(y,\tau,\Delta t)=(v_1(y_1,\tau_1,\Delta t),\ v_2(y_2,\tau_2,\Delta t),...,\ v_K(y_K,\tau_K,\Delta t)).$$

Из вышесказанного, суммируя по возможным значениям $\tau_i>0$ ($i=\overline{1;K}$), получаем соотношение

$$d_yX(y,t+\Delta t,\theta)=F(0)d_yX(y,t,\theta)+$$

$$+\int\limits_{\tau_1=0+}^{1}\ \int\limits_{\tau_2=0+}^{1}\dots\int\limits_{\tau_K=0+}^{1} d_yX(v(y,\tau,\Delta t),t,\theta)dF(\tau), \qquad (5)$$

причем в силу выражения (2) и условия (в) имеет место равенство

$$y_i-v_i(y_i,\tau_i,\Delta t)=a_i\tau_i\sum_{j=1}^{K}r_{ij}v_j(t)(\theta_i-v_i(y,\tau,\Delta t))(b-v(y,\tau,\Delta t))\Delta t+o(\Delta t). \qquad (6)$$

Из выражения (5), интегрируя по $y_i$ от 0 до $z_i(<b_i)$ ($i=\overline{1;K}$), получаем

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{X(z,t+\Delta t,\theta)-X(z,t,\theta)}{\Delta t}=$$

$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int\limits_{\tau_1=0+}^{1} \int\limits_{\tau_2=0+}^{1} \ldots \int\limits_{\tau_K=0+}^{1} X(v(y,\tau,\Delta t),t,\theta) dF(\tau) - (1-F(0)X(z,t,\theta) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int\limits_{\tau_1=0+}^{1} \int\limits_{\tau_2=0+}^{1} \ldots \int\limits_{\tau_K=0+}^{1} \frac{X(v(z,\tau,\Delta t),t,\theta) - X(z,t,\theta)}{\Delta t} dF(\tau) . \qquad (7)$$

Из равенства (6) имеем $\lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} v(z_i, \tau_i, \Delta t) = z_i$ и

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{z_i - v_i(z_i, \tau_i, \Delta t)}{\Delta t} = a_i \tau_i \sum_{j=1}^{K} r_{ij} v_j(t)(\theta_i - v_i(y,\tau,\Delta t))(b - v(y,\tau,\Delta t)) .$$

Отсюда выводим

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{X(v_1, v_2, ..., v_i, z_{i+1}, z_{i+2}, ..., z_K, t, \theta) - X(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, z_i, z_{i+1}, ..., z_K, t, \theta)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{X(v_1, v_2, ..., v_i, z_{i+1}, z_{i+2}, ..., z_K, t, \theta) - X(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, z_i, z_{i+1}, ..., z_K, t, \theta)}{v_i(z_i, \tau_i, \Delta t) - z_i} \times$$

$$\times \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{v(x_i, \tau_i, \Delta t), t, \theta) - z_i}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial z_i} \left( -a_i \tau_i \sum_{j=1}^{K} r_{ij} v_j(t)(\theta_i - v_i(y,\tau,\Delta t))(b - v(y,\tau,\Delta t)) \right). \qquad (8)$$

На основе представления

$$X(v(z,\tau,\Delta t),t,\theta) - X(z,t,\theta) =$$

$$= \sum_{i=2}^{K} X(v_1, v_2, ..., v_i, z_{i+1}, z_{i+2}, ..., z_K, t, \theta) - X(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, z_i, z_{i+1}, ..., z_K, t, \theta)$$

и соотношения (8) получаем

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{X(v(x,\tau,\Delta t),t,\theta) - X(z,t,\theta)}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{i=2}^{K} \frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial z_i} \left( -a_i \tau_i \sum_{j=1}^{K} r_{ij} v_j(t)(\theta_i - v_i(y,\tau,\Delta t))(b_i - v_i(y,\tau,\Delta t)) \right)$$

Подставив последнее соотношение в (7), окончательно получаем

$$\frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial t} =$$

$$= \int\limits_{\tau_1=0+}^{1} \int\limits_{\tau_2=0+}^{1} \ldots \int\limits_{\tau_K=0+}^{1} \sum_{i=2}^{K} \frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial z_i} \left( -a_i \tau_i \sum_{j=1}^{K} r_{ij} z_j (\theta_i - z_i)(b_i - z_i) \right) dF(\tau)$$

или

$$\frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial t}+\sum_{i=2}^{K}\frac{\partial X(z,t,\theta)}{\partial z_i}\left(a_i\gamma_i\sum_{j=1}^{K}r_{ij}z_j(\theta_i-z_i)(b_i-z_i)\right)=0, \qquad (9)$$

где $\gamma_i=\int_0^1\tau_i dF(\tau)$ – средняя величина воздействия по качеству $Q_i$.

Просмотрев вывод (9), нетрудно убедиться в его справедливости и в случае, когда для некоторых $i$ выполнено условие $b_i \le y_i < \theta_i$.

Таким образом, решение уравнения в частных производных (9) при начальном условии (4) и граничном условии $X(0,t,\theta)=0$ для любого $t > 0$ позволяет найти функцию $X(z,t,\theta)$, где функции $\{v_j(t)\}$ находятся как решения системы (3). Уравнение (9) относится к классу линейных дифференциальных уравнений с частными производными и может быть исследовано на основе разработанных в этом направлении методов [12, 16].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены базовые соотношения для распределения субъектов по уровню развития их различных способностей. Решение полученных соотношений и анализ свойств полученных решений требует проведения дальнейших исследований. Также требуют анализа исходные предположения, функции и параметры $x(\theta)$, $\alpha_i$, $\gamma_i$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, на основе которых получены результирующие уравнения (3) и (9). Таким образом, для завершения поставленной в работе задачи необходимо проведение дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

Решение поставленной в работе задачи открывает возможности для постановки оптимизационных задач, связанных с выбором оптимальных управлений, обеспечивающих наибольший суммарный объем требуемых качеств в любом из возможных аспектов, в частности, на определенный момент времени, по всей или определенной части совокупности субъектов, по суммарным характеристикам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воителева Т.М.* Личностно ориентированное обучение как способ развития творческих способностей учащихся средней школы // Вестник МГГУ им. М.А. Шолохова. Филологические науки. – 2012. – № 1. – С. 83–86.

2. *Попов Г.А.* Модель оценки уровня развития самообучающейся системы // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2008. – № 2 (43). – С. 251–257.

3. *Попов Г.А., Попова Е.А.* Классификация функций и задач вуза на основе метода Сагатовского // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 1. – С. 7–17.

4. *Лаптев В.В.* Метод оценивания умений и навыков при обучении программированию // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 1. – С. 194–201.

5. *Яковлев П.В., Яковлева М.Ю.* Моделирование циклических процессов в образовательных системах // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 2. – С. 197–202.

6. *Лаптев А.А.* Математическое моделирование этносоциальных процессов / Омский государственный университет. – Омск, 1997. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 24.09.97, № 2904-В1997.

7. *Гуц А.К.* Глобальная этносоциология: учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГУ, 1997. – 212 с.

8. *Парсонс Т.* Понятие общества: компоненты и их взаимоотношения // Толкотт Парсонс (1902–1973): сборник статей. – М.: ИНИОН, 1994. – С. 104–153. – (Современная западная теоретическая социология / ИНИОН РАН; вып. 2).

9. *Парсонс Т.* Функциональная теория изменения // Американская социологическая мысль: хрестоматия / Р. Мертон, Дж. Мид, Т. Парсонс, А. Шюц; под ред. В.А. Добренькова; сост. Е.И. Кравченко. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – С. 464–480.

10. *Гуц А.К., Лаптев А.А.* Рождение циклов в развитии политической и экономической систем вследствие ослабления режимов власти // Циклы природы и общества: материалы IV международной научно-практической конференции «Циклы природы и общества», 13–20 октября 1996 г. – Ставрополь: Изд-во Ставроп. ун-та, 1996. – Ч. 1. – С. 198–199.

11. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / пер. с англ. Л.М. Лермана. – М.: Мир, 1980. – 368 с.

12. *Терехин М.Т.* Бифуркация систем дифференциальных уравнений: учебное пособие к спецкурсу. – М.: Прометей, 1989. – 88 с.

13. *Хэссард Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

14. *Кудинов Ю.И., Дорохов И.Н., Пащенко Ф.Ф.* Нечеткие регуляторы и системы управления // Проблемы управления. – 2004. – № 3. – С. 2–14.

15. *Вешнева И.В.* Математические модели в системе управления качеством высшего образования с использованием методов нечеткой логики: монография. – Саратов: Саратовский источник, 2010. – 187 с.

16. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит, 1973. – 207 с.

*Попов Георгий Александрович,* доктор технических наук, профессор Астраханского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: математическое моделирование систем, информационная безопасность, системный анализ. Имеет более 150 публикаций. E-mail: popov@astu.org

## A formalized model of system development, based on the principle of gravitation to specific levels*

*G.A. POPOV*

*Astrakhan State Technical University, 16 Tatischev Str., Astrakhan, 414056, Russian Federation, D.Sc. (Eng.) professor. E-mail: popov@astu.org*

The work is devoted to the mathematical formalization of the process of system functioning based on the principle of gravitation to specified levels with a fixed set of indicators. The system of school education focused on developing a given set of abilities and qualities is given as a basic example of such a system. Basic assumptions concerning the mechanism of formation of a given quality in a subject are formulated and formalized Based on these assumptions a system of differential equations describing the level of development of a given set of qualities at an arbitrary time is derived. The number of subjects who attained a certain level of

* *Received 1 June 2015.*

development of a whole set of indicators is taken as he main characteristic of system development. Initial and boundary conditions of this function and the conditions of gravitation of the subject in the development of each of the specified qualities with respect to some specified level are formulated. All required development levels are controlled system parameters. When all the assumptions are made, a partial differential equation is derived for the above function. The function describing the distribution of subjects with different levels of desired characteristics, the intensity of training subjects and an average intensity of perception of the educational influence of the subject are input system parameters. The solution of the resulting equations will solve the problem of choosing an optimal set of development levels on which the total level of development of all specified qualities in all subjects will be maximized.

**Keywords:** principle of gravitation to the desired level, formal model, differential equation for the of system development level, impact on the subject, developed qualities and abilities, controlled levels of development, characteristics of subject groups

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-166-177

## REFERENCES

1. Voiteleva T.M. Lichnostno orientirovannoe obuchenie kak sposob razvitiya tvorcheskikh sposobnostei uchashchikhsya srednei shkoly [Personally oriented training as a way of development of creative abilities of high school students]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta im. M.A. Sholokhova. Filologicheskie nauki – Vestnik of Sholokhov Moscow State University for the Humanities: "Philology" Series*, 2012, no. 1, pp. 83–86.

2. Popov G.A. Model' otsenki urovnya razvitiya samoobuchayushcheisya sistemy [The model of estimation of selfteaching system's development level]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Astrakhan State Technical University,* 2008, no. 2 (43), pp. 251–257.

3. Popov G.A., Popova E.A. Klassifikatsiya funktsii i zadach vuza na osnove metoda Sagatovskogo [Classification of functions and problems of a university based on Sagatovski's method]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics,* 2009, no. 1, pp. 7–17.

4. Laptev V.V. Metod otsenivaniya umenii i navykov pri obuchenii programmirovaniyu [Skills rating method for programming education]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics,* 2013, no. 1, pp. 194–201.

5. Yakovlev P.V., Yakovleva M.Yu. Modelirovanie tsiklicheskikh protsessov v obrazovatel'nykh sistemakh [Modelling of cyclic processes in educational systems]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics,* 2012, no. 2, pp. 197–202.

6. Laptev A.A. *Mathematical modeling of the ethno-social processes*. Omsk, 1997. 26 p. Available from VINITI RAS, no. 2904-B1997. (In Russian)

7. Guts A.K. *Global'naya etnosotsiologiya* [Global ethnic sociology]. Omsk, OmSU Publ., 1997. 212 p.

8. Parsons T. [Concept of society: the components and their interrelationships]. *Sovremennaya zapadnaya teoreticheskaya sotsiologiya. Tolkott Parsons (1902–1973).* Sbornik statei [Modern Western theoretical sociology. Collection of papers]. Moscow, INION Publ., 1994, iss. 2, pp. 104–153.

9. Parsons T. Funktsional'naya teoriya izmeneniya [Functional theory changes]. Merton R., Mid Dzh., Parsons T., Shyuts A. *Amerikanskaya sotsiologicheskaya mysl'*. Khrestomatiya [American sociological thought. Chrestomathy]. Translated from English. Ed. by V.A. Dobren'kov, comp. E.I. Kravchenko. Moscow, MSU Publ., 1994, pp. 464–480.

10. Guts A.K., Laptev A.A. [Birth cycles in the development of political and economic systems due to the weakening of the power modes]. *Materialy IV mezhdunarodnoi konferentsii «Tsikly prirody i obshchestva»*, 13–20 oktyabrya 1996 g. Ch. 1 [Proceedings of the IV International scientific-

practical Conference "The cycles of Nature and Society", 13–20 October 1996]. Stavropol', 1996, pt. 1, pp. 198–199.

11. Marsden J.E., McCracken M. *The hopf bifurcation and its applications*. New York, Springer-Verlag, 1976. xiii, 408 p. (Russ. ed.: Marsden Dzh., Mak-Kraken M. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*. Translated from English L.M. Lerman. Moscow, Mir Publ., 1980. 368 p.).

12. Terekhin M.T. *Bifurkatsiya sistem differentsial'nykh uravnenii* [Bifurcation of systems of differential equations]. Moscow, Prometei Publ., 1989. 88 p.

13. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.-H. *Theory and applications of hopf bifurcation*. New York, Cambridge University Press, 1981. 311 p. (Russ. ed.: Khessard B. *Teoriya i prilozheniya bifurkatsii rozhdeniya tsikla*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1985. 280 p.).

14. Kudinov Yu.I., Dorokhov I.N., Pashchenko F.F. Nechetkie regulyatory i sistemy upravleniya [Fuzzy controllers and control systems]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*, 2004, no. 3, pp. 2–14.

15. Veshneva I.V. *Matematicheskie modeli v sisteme upravleniya kachestvom vysshego obrazovaniya s ispol'zovaniem metodov nechetkoi logiki*. Monografiya [Mathematical models in the quality management system of higher education with the use of fuzzy logic methods. Monograph]. Saratov, Saratovskii istochnik Publ., 2010. 187 p.

16. Petrovskii I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 207 p.

*ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Science Bulletin of the NSTU*
*Vol. 60, No.3, 2015, pp. 166–177*