СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2016. – № 2(84).** – 38–48

УДК 681.513

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ТРОЙНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА*

А.А. ВОЕВОДА[1], А.В. ЧЕХОНАДСКИХ[2]

[1] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики. E-mail: alcheh@ngs.ru*

Проводится численное моделирование построенного авторами ранее двухканального управления для трехмассовой конструкции с упругими связями, т. е. тройного математического маятника – объекта 6-го порядка. Поиск стабилизирующих настроек регулятора осуществлялся с помощью техники полиномиальных матриц и задания устойчивых полюсов замкнутой системы с последующим решением Диофантова уравнения; при этом авторы добивались разделения движений на группы «быстрых» и «медленных», астатизма и квазиавтономизации каналов. Моделирование переходных процессов не осуществлялось, и указанные свойства системы констатировались на основании характеристик расположения полюсов. Параметры объекта были выбраны такими, чтобы нули и полюса объекта совпадали на мнимой оси; за счет этого передаточные матрицы объекта не обладали взаимной простотой, и стандартный процесс решения полиномиального Диофантова уравнения приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях оказывается невозможным из-за вырожденности гауссовой системы. Последнее может привести в вычислительной и технической практике к самовозбуждению неустойчивых мод.

В настоящей работе проводится моделирование синтезированной системы в пространстве состояний. В проведенных численных экспериментах на вход системы, находящейся в состоянии равновесия, подавалось ступенчатое задание раздельно по каналам. В результате подтвердились экспоненциальная устойчивость и астатизм замкнутой системы, а также наличие «быстрых» и «медленных» переходных процессов; при этом самовозбуждающихся неустойчивых мод не обнаружено. Одновременно со стабилизацией координат происходит стабилизация управляющих воздействий, подчиняющаяся более сложному закону, выяснение которого требует дополнительных исследований. Переходные процессы для системы с регулятором пониженного порядка не рассматривались.

---

* Статья получена 26 января 2016 г.

Ключевые слова: тройной математический маятник, двухканальное автоматическое регулирование, полиномиальный синтез, взаимная непростота передаточных матриц, разделение движений, астатизм, неустойчивые моды, самовозбуждение

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-2-38-48

ВВЕДЕНИЕ

Синтез стабилизирующего управления для линейных объектов порядка выше четырех остается нетривиальной задачей теории регулирования. Даже тщательно разработанные методы синтеза многоканального управления для таких объектов [1] содержат значительное количество требований к описывающим объект уравнениям или его матричной передаточной функции. Изучение различных аспектов применения ПИД-регуляторов представляет собой актуальную тему научных исследований и инженерных разработок даже в одноканальном случае [2]. При этом задачи построения многопараметрического управления пониженного порядка рассматриваются достаточно редко.

Авторы использовали различные подходы к управлению для возмущений в известной модели малых колебаний двойного [3] и тройного маятников, уравнения которых идентичны уравнениям двух- и трехмассовых конструкций с упругими связями [4–7]. В частности, в работе [6] строится двухканальное управление для трехмассовой конструкции, числовые параметры которой приводят к совпадению нулей и полюсов объекта на мнимой оси. Решение задачи полиномиального синтеза для такой системы управления стандартными способами [1] оказывается невозможным из-за вырожденности возникающих числовых систем уравнений. Приемы, позволяющие обойти эти трудности, представлены в работах [6, 7].

Однако, как хорошо известно, теоретически удовлетворительное расположение полюсов замкнутой системы в подобных вырожденных случаях приводит к возникновению нарастающих возмущений как при численном моделировании (за счет ошибок округлений, с какого-то момента продуцирующих неустойчивые моды), так и при создании реальных конструкций, где шумы или случайные возмущения могут вызывать колебания на некоторых частотах, существенно выходящие за рамки приемлемых значений (рис. 1).

Цель настоящей работы – иллюстрация результатов работ [6, 7] с помощью численного моделирования переходных процессов в вычислительном комплексе Matlab, проверка устойчивости как контролируемых величин, так и управляющих воздействий (и астатизма первых), а также выявление возможности эффектов, подобных самовозбуждению колебаний на неустойчивых модах.

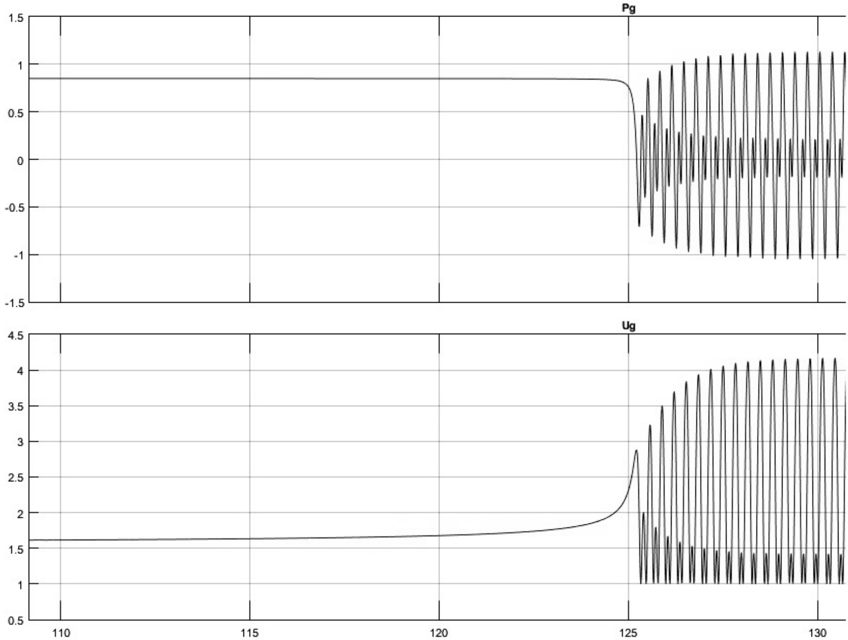

Рис. 1. Самовозбуждение колебаний синхронного генератора на кратных частотах в режиме, близком к предельному по напряжению

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ТРЕХМАССОВОЙ КОНСТРУКЦИИ С ДВУХКАНАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Трехмассовая конструкция (рис. 2) описывается уравнениями, совпадающими с уравнениями колебаний тройного математического маятника:

$$m_1 s^2 y_1 + d_1 s y_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = u_1 ;$$

$$-k_2 y_1 + m_2 s^2 y_2 + d_2 s y_2 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 = u_2 ;$$

$$-k_3 y_2 + m_3 s^2 y_3 + d_3 s y_3 + k_3 y_3 = u_3 \equiv 0 .$$

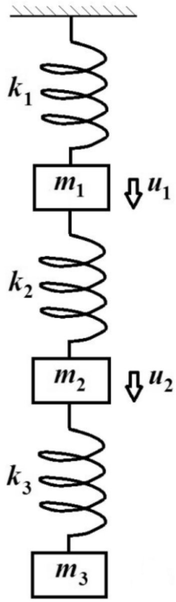

Рис. 2. Трехмассовая конструкция с двухканальным управлением

При построении двухканального управления переменную y_3 можно исключить; параметры объекта в [5] полагались следующими: $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$, потери (демпфирование) считались пренебрежимо малыми: $d_{1,2,3} \cong 0$. Матричное уравнение САУ получалось следующим:

$$\begin{pmatrix} s^2+4 & -2 \\ -2(s^2+4) & (s^2+4)(s^2+6)-16 \end{pmatrix} y(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2+4) \end{pmatrix} u(s).$$

Очевидно, что матричные «числитель» и «знаменатель» имеют совпадающие корни $z = \pm 2i$.

Решалась задачи синтеза управления с двумя группами полюсов $z_k = -1$; $z_l = -5$ и дополнительными условиями астатизма замкнутой системы и квазиавтономизации каналов (т. е. диагональности матрицы «знаменателя» системы):

$$C_{sys}(s) = \begin{pmatrix} (s+5)^2(s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+5)^4(s+1)^4 \end{pmatrix}.$$

В итоге были получены следующие матрицы числителя и знаменателя регулятора соответственно:

$$X(s) = \begin{pmatrix} 2.625s^2 + 0.75s + 1.562 & 0.125s^2 + 1.5s \\ 621.0s^2 + 429s & -88.5s^4 + 673.5s^3 + 810.9s^2 + 156.3 \end{pmatrix},$$

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 0.0625s^2 + 0.75s & 0 \\ 2s^2 + 48s & s^4 + 24s^3 + 314.5s^2 + 310.5s \end{pmatrix}.$$

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ

Для моделирования переходных процессов в комплексе Matlab (Simulink) была сформирована схема замещения (рис. 3).

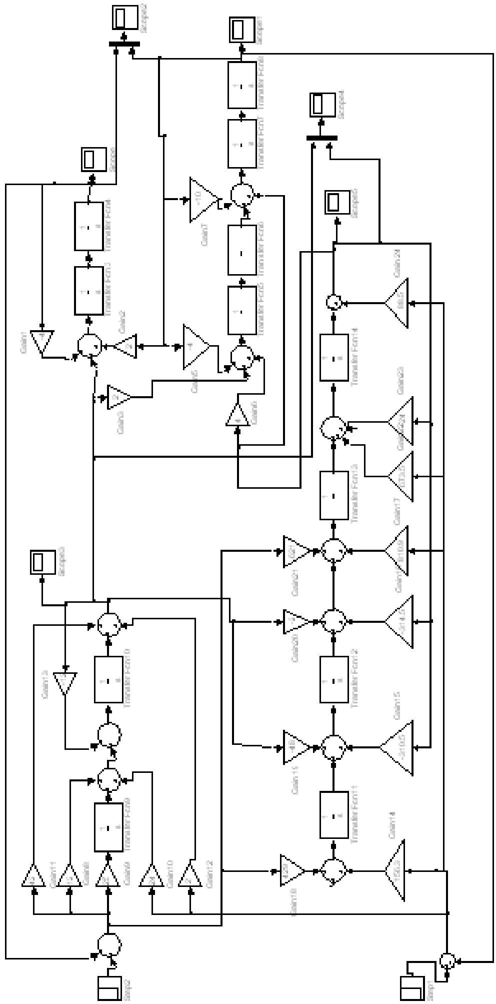

Рис. 3. Схема замещения замкнутой системы

В качестве возмущения для системы, находящейся в состоянии равновесия, предлагалось два задания: $v_1 = 1,\ \ v_2 = 0$ и $v_1 = 0,\ \ v_2 = 1$.

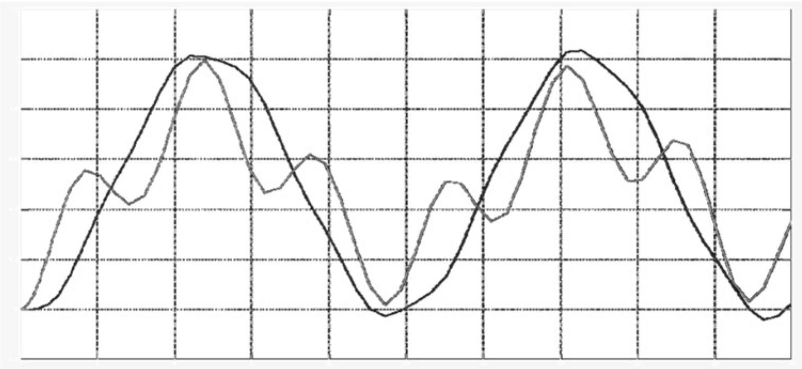

Рис. 4. Свободные колебания верхнего (светлый график) и центрального (темный график) тел при задании $v_1 = 1,\ \ v_2 = 0$

Возникающие в разомкнутой системе незатухающие колебания суммируют свободные гармоники тройного маятника (рис. 4 и 5).

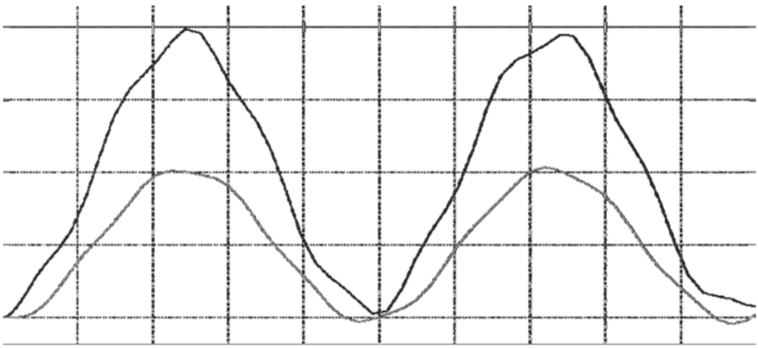

Рис. 5. Свободные колебания верхнего (светлый график) и центрального (темный график) тел при задании $v_1 = 0,\ \ v_2 = 1$

При замыкании системы регулятором, передаточные матрицы которого приведены в конце п. 1, переходные процессы в системе становятся асимптотически устойчивыми (рис. 6 и 7).

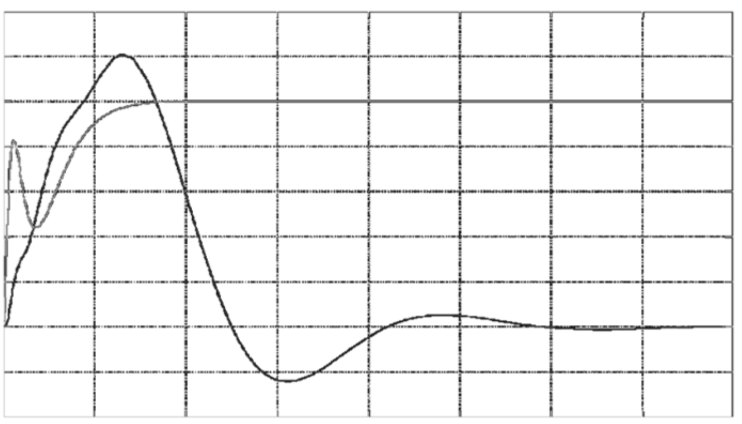

Рис. 6. Стабилизация колебаний верхнего (светлый график) и центрального (темный график) тел при задании $v_1 = 1,\ \ v_2 = 0$

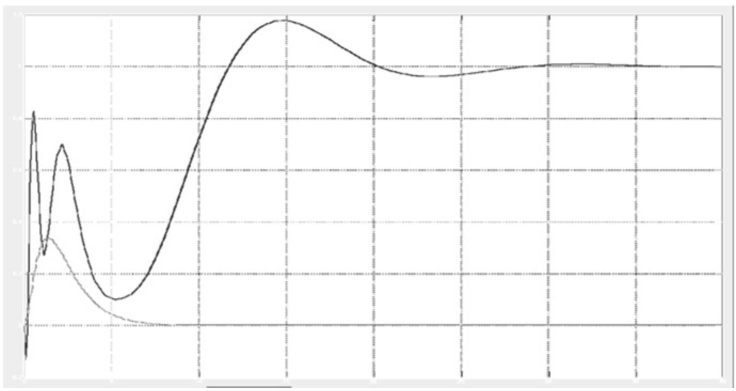

Рис. 7. Стабилизация колебаний верхнего (светлый график) и центрального (темный график) тел при задании $v_1 = 0,\ \ v_2 = 1$

Так же стабилизируются и управляющие воздействия на тех значениях, которые обеспечивают «смещённое» состояние равновесия системы (рис. 8). Однако, как видно из графика, в поведении второго канала возникают «всплески», по-видимому, вызванные влиянием колебаний нижнего тела.

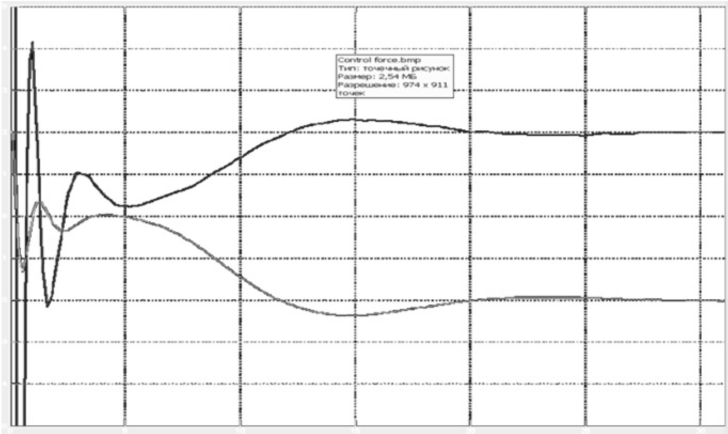

Рис. 8. Стабилизация управляющих воздействий $u_{1,2}$ при задании $v_1 = 0$, $v_2 = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подавление возмущений в замкнутой системе, вызванное «ступенчатыми» заданиями на одном из каналов (т. е. отклонениями одной из контролируемых координат от равновесного положения) не приводило в дальнейшем к ее раскачке (см. рис. 1). Приведенные на рис. 6 и 7 начальные этапы процесса впоследствии вели к астатической стабилизации обеих координат на заданных значениях; равно как и управляющих воздействий на тех значениях, которые обеспечивают «смещенное» состояние равновесия системы. Совпадение нулей и полюсов на границе устойчивости, отмеченное в п. 1, на процессе численного расчета не сказалось.

Следует отметить, что найденные в работах [6, 7] двухканальные регуляторы пониженного порядка свободны от этой проблемы: при оптимизации степени устойчивости (точнее, гурвицевой градуировки полюсов системы, [8]) достигаются устойчивые значения всех мод системы. Этот подход оправдал себя для заведомо неустойчивого объекта [9].

Наконец, наряду с астатизмом на рис. 6 и 7 прослеживается и двухтемповость системы: сравнительно быстрое угасание мод, соответствующих полюсам $z_l = -5$ при сохранении мод «медленных» полюсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.-T.* Linear system theory and design. – New York: Holt, Reinhart and Winston, 1984. – 635 p.

2. *Åström K.J., Hägglund T.* PID-controllers: theory, design and tuning. – Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America, 1995. – 343 p.

3. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 106–124.

4. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.

5. *Воевода А.А*. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный Вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.

6. *Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений при стабилизации трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 2 (43). – С. 39–46.

7. *Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A.* Algebraic design of LTI control systems using spaced pole localization // 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST 2016). – Novosibirsk, Russia, 2016. – Vol. 1. – P. 526–530.

8. *Чехонадских А.В.* О ступенчато-дифференциальной оптимизации корней характеристического многочлена САУ // Научный вестник НГТУ. – 2008. – № 4. – С. 205–208.

9. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: управление многоканальными объектами, идентификация технических систем, сети Петри. Имеет более 200 публикаций. E-mail: voevoda@ucit.ru

Чехонадских Александр Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: управление пониженного порядка, прикладная теория графов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: alcheh@ngs.ru

Simulation of stabilizing control on the example of triple mathematical pendulum*

A.A. Voevoda[1], A.V. Chekhonadskikh[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Technical Sciences, professor. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Technical Sciences, professor. E-mail: alcheh@ngs.ru*

We carry numerical simulation of DIDO control for the three-mass construction with elastic connections (triple mathematical pendulum, the object of the 6th order), which was designed earlier by the same authors. Stabilizing controller settings search was carried out by the technique of polynomial matrices and by stable setting of the closed-loop system poles with the subsequent solvation of the matrix Diophantine equation. The authors sought time scaled transients, separated on the "fast" and "slow" modes, system astatism and channel quasi autonomization. Simulation of transients previously was not performed and the system properties were stated on the basis of the specified pole position
Plant parameters were chosen such that the plant zeros and poles coincide on the imaginary axis; so plant transfer matrices did not have a mutual simplicity and standard procedure of polynomial Diophantine equation solving by the coefficients at the same degrees equating is impossible because of the degeneracy of the Gaussian system. The latter may result practice to unstable modes self-excitation in computational and engineering practice.
In the paper, we carry out system simulation in the state space. The numerical probes were performed applying stepwise assignment separately for the channels on the input of a system in equilibrium state. It result in exponential stability and confirmed astatism of closed loop system, "fast" and "slow" transient may be seen too, while self-excited unstable modes were not found. Simultaneously with stabilization of controlled coordinates there was obtained control action stabilization, providing more complex law (finding the latter requires further investigation). Transients for a system with low order regulator were not considered.

Keywords: triple mathematical pendulum, polynomial design, DIDO control, mutual nonsimplicity of transfer matrices, time-scaled transients, astatism, nonstable modes, self-excitation

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-2-38-48

REFERENCE

1. Chen C.-T. *Linear system theory and design*. New York, Holt, Reinhart and Winston, 1984. 635 p.
2. Åström K.J., Hägglund T. *PID-controllers: theory, design and tuning*. Research Triangle Park, NC, Instrument Society of America, 1995. 343 p.
3. Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids. *Automation and Remote Control*,

* *Received 26 January 2016.*

2007, vol. 68, no. 3, pp. 467–486. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 2007, no. 3, pp. 106–124.

4. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Two-mass system stabilization: polynomial method of two-channel system synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.

5. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.

6. Voevoda A.A. Chekhonadskikh A.V., Shoba E.V. Modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya: razdelenie dvizhenii pri stabilizatsii trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis method using a polynomial decomposition: the separation of motions in the stabilization of the three-mass plant]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2 (43), pp. 39–46.

7. Chekhonadskikh A.V., Voevoda A.A. Algebraic design of LTI control systems using spaced pole localization. *11th International Forum on Strategic Technology (IFOST–2016)*, Novosibirsk, Russia, 2016, vol. 1, pp. 526–530.

8. Chekhonadskikh A.V. O stupenchato-differentsial'noi optimizatsii kornei kharakteristicheskogo mnogochlena SAU [On gradual-differential characteristic root optimization of automatic control system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 4 (33), pp. 205–208.

9. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 593–604. Translated from *Avtometriya*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83.