СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2016. – № 2(84).** – 68–76

УДК: 681.511.26

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ*

А.А. ВОЕВОДА[1], В.Ю. ФИЛЮШОВ[2]

[1] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com*

Применение линейных законов управления к нелинейным системам значительно упрощает задачу синтеза. Линеаризуя исходную нелинейную модель объекта в окрестности какой-то точки, возможно рассчитать регулятор, применяя линейные методы синтеза для достижения необходимого качества переходных процессов. Но зачастую окрестность этой точки линеаризации мала и не охватывает всю рабочую область объекта, что ограничивает возможности управления. Отсюда возникает вопрос, возможно ли сделать поведение исходной модели эквивалентным ее линеаризованной модели? Ответ на данный вопрос дает линеаризация обратной связью. Суть ее заключается в нахождении такого нелинейного управления, что замкнутая система будет вести себя по линейным законам. Тогда, применяя методы синтеза для линейных систем, удастся добиться необходимого качества переходных процессов в большей области, нежели чем при обычной линеаризации. Но поиск такого управления, приводящего нелинейную модель объекта к эквивалентной линейной модели, зачастую трудная задача. В поиске такого управления помогают некоторые методы дифференциальной геометрии, такие как: производная Ли и скобки Ли, которые до некоторой степени формализуют алгоритм поиска.

Ключевые слова: преобразование координат, производные Ли, скобки Ли, нелинейное управление, линеаризация обратной связью, регулятор, синтез

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-2-68-76

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее часто применяется линеаризация, полученная путем разложения в ряд Тэйлора в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим и отбрасывание нелинейных членов [1].

В отличие от линеаризации разложением в ряд Тэйлора, линеаризация обратной связью [2] позволяет найти такое управление по обратной связи, что исходная нелинейная модель будет вести себя аналогично линеаризованной.

---

* Статья получена 19 февраля 2016 г.

Поиск управления, линеаризующего нелинейную систему, возможен с применением структурных методов преобразования моделей аналогично линейным, но с некоторыми особенностями. Такой структурный метод будем называть эвристическим. Данный способ был рассмотрен в работе [3]. В исследовании [4] приводится синтез регулятора эвристически для отработки возмущения и входных воздействий. В работе [5] приводится синтез регулятора эвристически с использованием модального метода синтеза. В работе [6] произведен анализ влияния дифференцирующего фильтра на эвристически рассчитанный регулятор. В работе [7] произведен синтез регулятора для отклонения угла объекта «перевернутый маятник на тележке».

В данной работе рассмотрим способ нахождения такого управления, которое позволяет линеаризовать исходную нелинейную модель, применяя дифференциально-геометрический подход. Данный подход заключается в использовании производных Ли (скобки Ли, алгебра Ли, группы Ли) [8]. Он применяется для нелинейных объектов, линейных по управлению (*аффинных*) вида

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u \ ,$$

где u – гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия $f(0,0) = 0$. Здесь x – вектор состояния, u – управление.

Использование этого инструмента позволяет проводить анализ и синтез нелинейных систем. В частности, матрицы наблюдаемости и управляемости похожи на те, что получены от линеаризованного объекта. Так же используется понятие о каноническом виде, который в общем аналогичен каноническому виду в линейных системах. Производные Ли особенно удобно использовать для непрерывных дифференцируемых функций, что соответствует нашему классу объектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для рассмотрения линеаризации обратной связью нам понадобятся некоторые сведения из дифференциальной геометрии, такие как производная Ли, скобки Ли, матрица управляемости, полученная для нелинейной системы.

Производная по направлению векторного поля [9] является обобщенным понятием производной по направлению. Такая производная от скалярной функции задается формулой

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} \, .$$

Такую производную функции по векторному полю называют ***производной Ли*** $L_A f(x)$ – «производная функции $f(x)$ по направлению векторного поля **A**».

Если брать производную не от какой-то скалярной функции, а от другого векторного поля, то уравнение производной запишется в виде

$$[A,B] = \frac{\partial B(x)}{\partial x} A(x) - \frac{\partial A(x)}{\partial x} B(x). \quad (1)$$

Такую производную векторного поля по векторному полю называют ***скобкой Ли*** (***коммутатором***) $[A,B] \equiv ad_A B$ – «производная векторного поля **B** по направлению векторного поля **A**». Описание свойств этих производных осуществляется при помощи *алгебры Ли*. Для работы с такими производными существует свой математический аппарат.

Использование производных Ли позволяет приводить аналогии в описании линейных и нелинейных систем. Так, используя производную Ли, удается проверить наблюдаемость и управляемость системы. Наблюдаемость и управляемость проверяется аналогично с линейными системами по матрице наблюдаемости и управляемости, у которых также проверяется ранг.

Управляемость нелинейного объекта, как и для линейного объекта, определяется при помощи матрицы управляемости, которая в нелинейном случае состоит из коммутаторов векторных полей **A** и **B**

$$U = \left(B(x), [A,B], \ldots, \left[A, ad_A^{k-1} B \right] \right). \quad (2)$$

Канонические формы в нелинейных системах, как и в линейных, широко используются для анализа и синтеза систем управления. Для нелинейных систем линейных по управлению (аффинных), представленных в канонической форме, разработаны методы решения задачи стабилизации. Системы, не представленные в канонической форме, возможно преобразовать в каноническую форму. Для этого с использованием алгебры Ли существует достаточно формализованный подход нахождения преобразования координат.

Система, записанная в виде

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(x) + b(x)u, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{3}$$

называется системой в *канонической форме.*

Синтез алгоритма управления состоит из пяти этапов.

1) Необходимо найти матрицу управляемости (2).

2) Необходимо найти определитель матрицы управляемости и проверить инвалютивность столбцов матрицы управляемости (всех, кроме последнего).

3) Если определитель матрицы управляемости не равен нулю и проверка на инвалютивность прошла успешно, то определить функцию T_1 из преобразования $z = T(x)$ из условий

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} ad_A^i B = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} ad_A^{n-1} B \neq 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-2$$

4) Необходимо найти преобразование $z = T(x) = [T_1(x),\ldots,T_n(x)]^{\mathrm{T}}$, где $T_n(x) = L_A^{n-1} T_1$.

5) Управление выберем в виде

$$u = \frac{\left(-L_A^n T_1(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k L_A^k T_1(x)\right)}{L_B L_A^{n-1} T_1(x)}.$$

В переменных z оно запишется в виде

$$u = \frac{\left(-f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k z_{k+1}\right)}{g(x)}.$$

Пример нахождения стабилизирующего управления для аффинной управляемой динамической системы при условии доступности всего вектора состояния будет рассмотрен ниже. Пусть АУДС задано уравнением:

$$\dot{x}_1 = x_2 + c x_1^3, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{4}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 + c x_1^3 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Найдем матрицу управляемости (2), для этого найдем ее компоненты (1). Вектор $B(x)$ постоянный, и его производная равна нулю:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а производная

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 3cx_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные значения в (2), получим

$$[A, B] = ad_A B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 + cx_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3cx_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$U = \begin{bmatrix} B & ad_A B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Определитель матрицы (5) отличен от нуля, и ее столбцы образуют инвалютивное множество.

Найдем преобразование $z = T(x)$:

$$\frac{dT_1}{dx} B = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{dT_1}{dx} ad_A B = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Соответственно, T_1 зависит только от x_1. Пусть $T_1 = x_1 = z_1$.

Найдем T_2:

$$T_2 = L_A T_1 = z_2 = x_2 + cx_1^3.$$

Найдем $L_A T_2$:

$$L_A T_2 = \dot{z}_2 = \begin{pmatrix} 3cx_1^2, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 + cx_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3cx_1^2\left(x_2 + cx_1^3\right).$$

Управление $u = -3cx_1^2\left(x_2 + cx_1^3\right) + v$ приводит систему (4) к виду $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = v$.

Тогда управление, стабилизирующее систему (4), имеет вид

$$u = -3cx_1^2\left(x_2 + cx_1^3\right) - c_2\left(x_2 + cx_1^3\right) - c_1x_1 . \quad (6)$$

В переменных z система уравнений (4) с управлением (6) примет вид

$$\dot{z}_1 = z_2 , \quad \dot{z}_2 = -c_1z_1 - c_2z_2 . \quad (7)$$

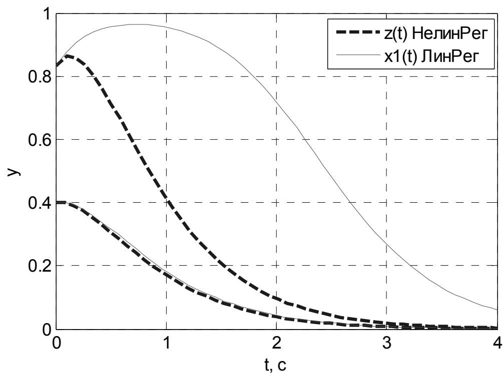
Для сравнения запишем уравнение (4), линеаризованное в окрестности $x_1 = 0$:

$$\dot{x}_1 = x_2 , \quad \dot{x}_2 = u . \quad (8)$$

Выберем управление в виде $u = -c_1x_1 - c_2x_2$, тогда система уравнений (8) с выбранным управлением запишется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2 , \quad \dot{x}_2 = -c_1x_1 - c_2x_2 . \quad (9)$$

Система уравнений (7) и система уравнений (9) имеют одинаковый вид, но система (7) записана в переменных z, которые получаются путем нелинейного преобразования $z = T(x)$ переменных x. На рисунке представлены графики переходных процессов систем (7) и (9) при различных начальных условиях $x_1(0) = 0{,}4$ и $x_1(0) = 0{,}83$.



Графики переходных процессов систем (7) и (9)

Моделирование проводилось при $y(0) = 0{,}4$ и $y(0) = 0{,}83$; $c_1 = c_2 = 1$.

Как видно из рисунка, при возрастании начальных условий (отдаление от малой окрестности точки линеаризации) качество переходного процесса системы (9) ухудшается, а у системы (7) остается прежним.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ и синтез нелинейных аффинных систем управления – довольно сложная задача. Использование понятий дифференциальной геометрии (в частности, производных Ли и скобок Ли) позволяет до некоторой степени формализовать этот процесс. Так, матрица управляемости, полученная с использованием производных Ли и нелинейной системы, схожа по формату с этой матрицей в линейных системах. Как и в линейных системах, в нелинейных тоже существуют канонические формы. Для нелинейных систем это упрощает задачу стабилизации, так как для канонических видов решение задачи стабилизации больше развито.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.

2. *Krener A.J., Isidori A.* Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems & Control Letters. – 1983. – Vol. 3. – P. 47–52.

3. *Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.

4. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.

5. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9.

6. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Использование дифференцирующего фильтра при синтезе нелинейного регулятора // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 13–21.

7. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

9. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Филюшов Владислав Юрьевич, магистрант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: построение наблюдателей, исследование перевернутого маятника. Имеет 2 публикации. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Feedback linearization*

A.A. Voevoda[1], V.Yu. Filiushov[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk,630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.),professor. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com*

The use of linear control laws for nonlinear systems greatly simplifies the task of synthesis. Linearizing the original non-linear model of the object, in a neighborhood of the linearization point, perhaps using linear synthesis methods to calculate the regulator to achieve the desired quality of transients. But often, the neighborhood of this point linearization is small and does not cover the whole working area of the object, which limits control. This raises the question whether it is possible to make the behavior of the original model equivalent to its linearized model? The answer to this question gives feedback linearization. Its essence is to find such a non-linear control, closed-loop system that will behave linearly. Then applying, be able to achieve the required quality of transients synthesis methods for linear systems in a larger area, rather than at the usual linearization. But the search for such management, resulting in a non-linear model of the object to an equivalent linear model is often a difficult task. In the middle of this control helps some of the methods of differential geometry, such as the Lie derivative and Lie bracket, which formalize, to some extent, the search algorithm.

Keywords: nonlinear control, feedback linearization, , synthesis, regulator

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-2-68-76

REFERENCES

1. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control systems theory]. 4th ed. St. Petersburg, Professiya Publ., 2004. 752 p.

* *Received 19 February 2016.*

2. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, vol. 3, pp. 47–52.

3. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.

4. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Sintez nelineinogo regulyatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.

5. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob"ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.

6. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Ispol'zovanie differentsiruyushchego fil'tra pri sinteze nelineinogo regulyatora [Using differential filter for nonlinear control system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 13–21.

7. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [Design of multi channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

8. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya: metody i prilozheniya*. T. 1 [Modern geometry: metods and applications. Vol. 1]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1986. 760 p.

9. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2 [Automatic control theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.