СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2016. – № 4 (86).** – 37–48

УДК 681.513

ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ*

А.А. ВОЕВОДА[1], К.М. БОБОБЕКОВ[2]

[1] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: kurbon_111@ mail.ru*

Динамические свойства системы обычно исследуют при помощи подачи на вход системы ступенчатых сигналов. В некоторых случаях требуется анализировать поведение системы при нулевом входном воздействии и ненулевых начальных условиях интеграторов (дифференциальных уравнений), входящих в описание системы. Здесь показано, как при помощи дельта-функции (функции Дирака) и ее производных устанавливать требуемые начальные значения на интеграторах. Их заменяют на короткие с большой амплитудой импульсы различных полярностей. Под дельта-импульсом и его производными понимают некоторое физически реализуемое приближение. Реализация такого типа сигналов показана на примерах первого и второго порядка. Приведены графики переходных процессов. Даже при хорошем приближении к требуемым сигналам получаем отличие переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями, «выставляемых» непосредственно на интеграторе, и воздействием дельта-импульсами и ее производными. Необходимо обеспечивать не только начальные условия на выходном интеграторе, но и значения на предшествующих интеграторах на малом интервале времени. Решается и обратная задача, а именно, для получения весовой функции и ее производных дана процедура задания начальных условий на интеграторах.

Ключевые слова: линейные динамические системы, начальные значения, дельта-функции, динамические свойства, импульсная переходная функции, переходная функции

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-37-48

---

* Статья получена 10 октября 2016 г.

ВВЕДЕНИЕ

Динамические свойства системы обычно исследуют при подаче на вход системы ступенчатых сигналов. В некоторых случаях требуется анализировать поведение системы при нулевом входном воздействии и ненулевых начальных условиях интеграторов (дифференциальных уравнений), входящих в описание системы. Здесь показано, как при помощи дельта-функции (функции Дирака) и ее производных, которые заменяются на короткие с большой амплитудой импульсы различных полярностей, устанавливать ненулевые начальные условия.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем исходить из инженерного представления дельта-функции $\delta(t)$. Ее можно представить как, например, разность ступенчатых сигналов (рис. 1, *б*) либо в виде треугольного сигнала (рис. 1, *в*), либо в виде сигнала, представленного на рис. 1, *а*.

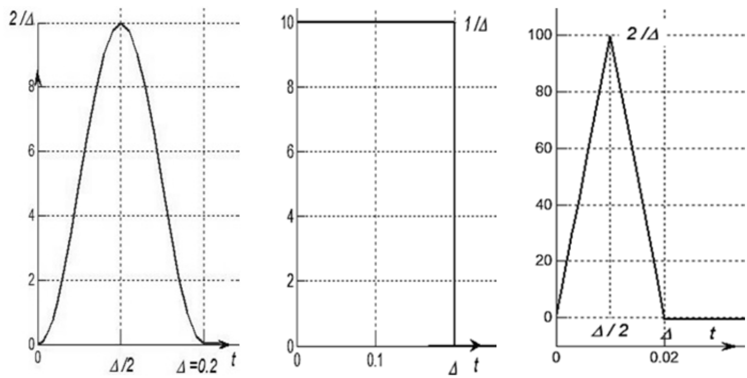


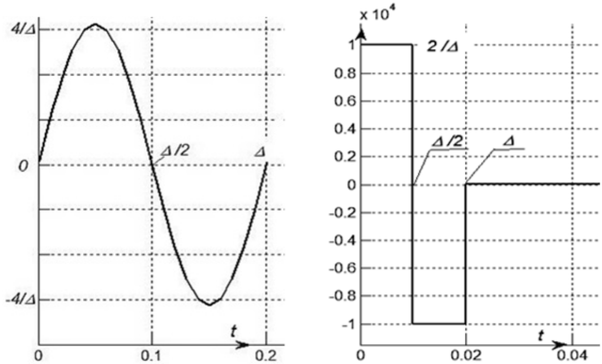
Рис. 1. Приближения дельта-функции $\delta(t)$

Сигнал на рис. 1, *б* легко описывается через функцию Хэвисайда $1(t)$, которую нужно сдвинуть на время $\Delta(t)$, а разность умножить на коэффициент α:

$$\delta(t) \approx \alpha(1(t) - 1(t + \Delta t)),$$

где $\alpha, \Delta t > 0$ и $\alpha \cdot \Delta t = 1$ при $\Delta t \to +0$. При этом чем меньше $\Delta(t)$, тем лучше приближение к дельта-функции. На рис. 1 в явном виде выписаны значения амплитуд α. В частности, указаны масштабы и приведены значения $\Delta(t) = 0,2$, $\Delta(t) = 0,2$, $\Delta(t) = 0,02$. Соответствующие производные можно увидеть на рис. 2, где указано примерное значение амплитуды $\approx 4/\Delta$, т. е. площадь импульса примерно равна

$$\frac{4}{\Delta}\frac{\Delta}{2}\frac{1}{2} = 1 .$$



а *б*

Рис. 2. Приближения $d\delta(t)/dt$ функции

Безусловно, понятие дельта-функции и ее производных, а также их приближенное представление с целью использования в расчетах и моделировании – довольно сложное и здесь рассматривается на инженерном уровне.

2. ОБЪЕКТ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример 1. Пусть на устройстве первого порядка, описываемом апериодическим звеном $0,5/(0,5s+1)$, требуется установить единичное начальное условие (рис. 3).

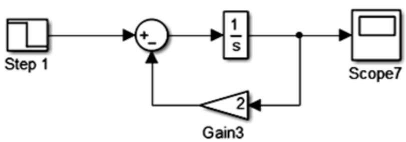


Рис. 3. Задание ненулевого начального условия на интеграторе при помощи входного сигнала $\delta(t)$

Зная, что для этого устройства время переходного процесса $t_{\text{пп}} \approx 3 \cdot 0,5 = 1,5$ с, сдвиг по времени должен быть существенно меньше $t_{\text{пп}}$, то есть $\Delta(t) << 1,5$ с. Выберем, например, $\Delta(t) = 0,1$ с и $\alpha = 10$. Переходный процесс приведен на рис. 4, откуда видно, что погрешность задания начального значения на интеграторе составляет примерно 10 %. На этом же рисунке приведен второй вариант выбора сдвига и коэффициента усиления $\Delta(t) = 0,01$ с и $\alpha = 100$, для которого погрешность задания начального условия трудно заметить по переходному процессу.

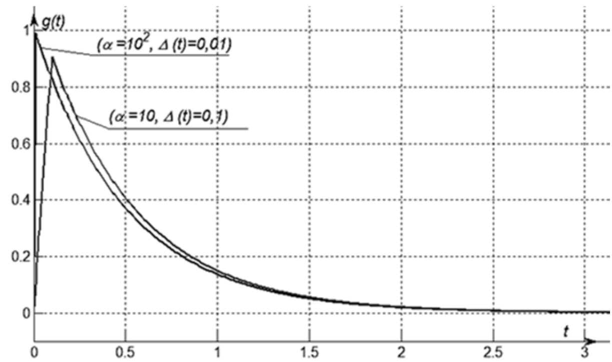


Рис. 4. Переходный процесс (весовая функция) в системе, представленной на рис. 3

Это можно объяснить тем, что обратная связь «не успевает исказить» устанавливаемое начальное условие.

3. ОБЪЕКТ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Будем рассматривать объект второго порядка, представляющий собой последовательно соединенные два интегратора, охваченные отрицательными обратными связями (рис. 5).

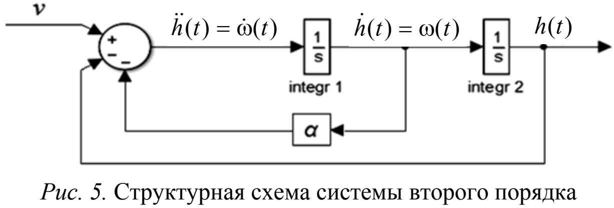


Рис. 5. Структурная схема системы второго порядка

Если на вход подаем сигнал, описываемый функцией Хэвисайда $1(t)$, то на выходе системы (на выходе второго интегратора, если считать слева направо) получим переходную функцию $h(t)$; на выходе первого интегратора $dh/dt = \omega(t)$ и, следовательно, на входе первого интегратора

$$d^2h/dt^2 = d\omega/dt\,.$$

Кратко это можно записать в следующем виде:

$$1(t) \to d\omega/dt \to \omega(t) \to h(t)\,.$$

Если на вход подаем функцию Дирака $\delta(t)$, то она преобразуется цепочкой интеграторов в последовательность

$$\delta(t) \to d^2\omega/dt^2 \to d\omega/dt \to \omega(t)\,.$$

Наконец, при подаче на вход производной функции Дирака $d\delta/dt$, приближения которой приведены на рис. 1, получим последовательность

$$\dot{\delta} \to \dddot{\omega} \to \ddot{\omega} \to \dot{\omega}\,,$$

где точки обозначают производные. Знание вышеприведенных преобразований можно использовать для формирования требуемых начальных условий на интеграторах при помощи воздействия на систему сигналами вида

$$1(t),\ \ \delta(t),\ \ d\delta/dt, \dots\ .$$

Пример 2. Возьмем систему (рис. 5) с передаточной функцией

$$W_{\text{зам}} = 1/s^2 + 0.7s + 1\,.$$

Поставим задачу сформировать входной воздействие такое, чтобы за очень малое время на выходном интеграторе установилось значение $y(t) \approx 1$. Для вышеуказанной системы второго порядка вид упоминаемых процессов показан на рис. 6.

С учетом того, что эта система представляет собой последовательно соединенные два интегратора, охваченные пропорциональными обратными отрицательными связями, на входе второго интегратора должен сформироваться, например, сигнал вида рис. 1, *в* с шириной $0{,}02$ с и высотой 100, т. е. площадью единица. Этот сигнал является выходным сигналом первого интегратора. В соответствии с рис. 2, *б* на вход системы следует подать два прямоугольных импульса противоположной полярности амплитудой 10^4 и длительностью каждого импульса $0{,}01$ с (кратко можно записать $[10^4,\ 0.01]$). Входной сигнал на втором интеграторе приведен на рис. 7 для нескольких вариантов задания приближения дельта-импульса – приведены процессы для $[25,\ 0.2]$, $[4,\ 0.5]$ и график, соответствующий непосредственному заданию начального условия, равного единице, на выходном интеграторе (НУ).

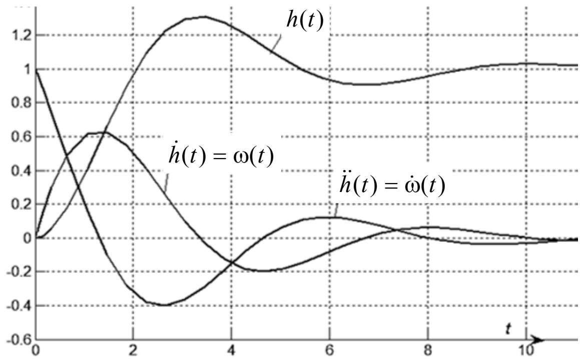
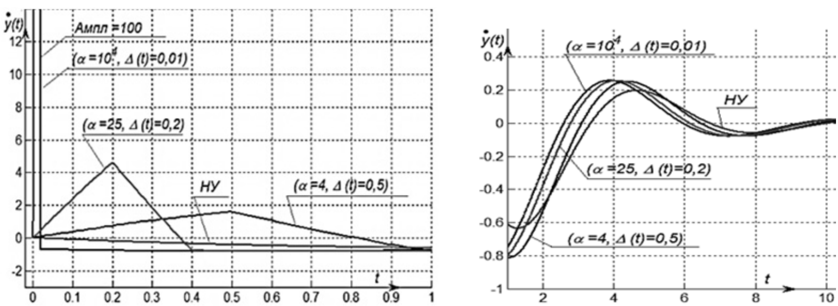


Рис. 6. Переходные процессы на выходе системы $h(t)$, на выходе первого интегратора $\omega(t)$ (и, соответственно, на входе второго интегратора) и на входе первого интегратора $d\omega(t)/dt$ при входном сигнале $1(t)$ – функция Хэвисайда



а *б*

Рис. 7. Сигнал на входе второго интегратора:

а – для интервала времени [0, 1]; *б* – для интервала времени [1, 10]

Выходной сигнал системы для $[10^4, 0.01]$ и для непосредственного задания НУ приведен на рис. 8. Если брать «довольно хорошее приближение» к дельта-импульсу, то получаем совпадение графиков близко к моменту пуска, а при довольно грубом приближении к дельта-импульсу хорошее совпадение графиков получаем для t более секунды. Если предполагается обработка данных по переходным процессам, то лучше брать грубые приближения дельта-импульсов.

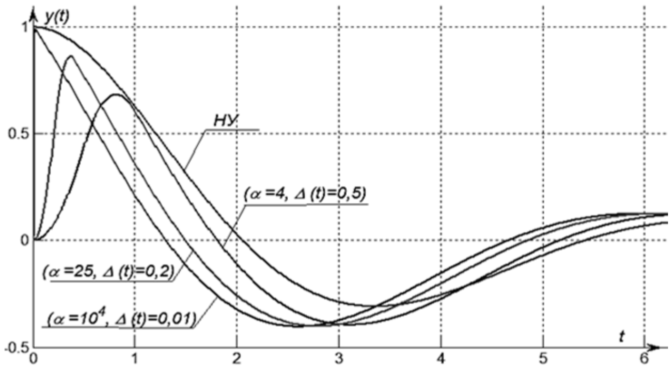


Рис. 8. Переходные процессы $y(t)$ системы рис. 5 при подаче на вход сигнала, «аппроксимирующего» $d\delta / dt$ (рис. 2, б), при разных значениях α и Δ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, каким образом можно задавать ненулевые начальные условия на объекте управления с целью, например, идентифицировать параметры объекта, входящего в систему управления. Для этого на вход системы следует подать дельта-импульс, продифференцированный столько раз, сколько интеграторов находится между входом и выходом системы. Например, для системы, состоящей из трех интеграторов, необходимо подать дважды продифференцированный дельта-импульс. Безусловно, под дельта-импульсом и его производными понимаем некоторое физически реализуемое приближение. Реализация такого типа сигналов показана на примерах первого и второго порядка. Как следует из графиков переходных процессов, даже при хорошем приближении к требуемым сигналам получаем отличие переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями, «выставляемыми» непосредственно на интеграторе, и воздействием дельта-импульсов и их производными. Очевидно, что нужно обеспечивать не только начальные условия на выходном интеграторе, но и значения на предшествующих интеграторах для малого интервала времени. Вышеприведенные результаты подсказывают, что, например, $\omega(t)$ можно получить не только воздействием на систему $\delta(t)$ – дельта-импульсом, но и задав начальные условия на интеграторах: на первом интеграторе – единицу, на втором интеграторе – ноль. Аналогично, установив начальные условия -0.75 и 1.0, получим производную $d\omega / dt$.

Несложно определить последовательность импульсов, которые необходимо подать на вход системы с целью получить заданные начальные условия. Например, если подать последовательно прямоугольные импульсы амплитудой 400, –400, –60 и длительностью 0.05 с на систему рис. 5, получим через 0,15 с на первом интеграторе примерно –3, на втором интеграторе 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* О «строгой правильности» передаточной функции разомкнутой системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 2 (60). – С. 175–180.

2. *Бобобеков К.М., Воевода А.А.* Полиномиальный метод синтеза ПИ(Д)-регулятора для неминимально фазового объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 7–20.

3. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.

4. *Бобобеков К.М.* Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.

5. *Бобобеков К.М.* Псевдогодограф Найквиста // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 49–57.

6. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.

7. *Бобобеков К.М., Воевода А.А.* Синтез двухканальной системы полиномиальным методом: обеспечение астатизма // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 7–19.

8. *Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V.* The active identification of parameters for the unstable object // XI Международный форум по стратегическим технологиям, IFOST-2016, Новосибирск, 1–3 июня 2016 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – С. 594–596.

9. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Активная идентификация параметров модели перевернутого маятника по углу при подаче на вход синусоидальных сигналов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 21–37.

10. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3rd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.

11. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с. – ISBN 5-9221-0379-2.

12. *Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback control theory. – New York: Macmillan Publ., 1990. – 198 p.

13. *Mehra R.K.* Optimal input for linear system identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. 19, N 3. – P. 192–200.

14. *Трошина Г.В.* Активная идентификация линейных динамических дискретных стационарных объектов во временной области: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2007. – 171 с.

15. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.

16. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 – кафедра «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета, с 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет несколько публикаций. E-mail:kurbon_111@mail.ru

The task initial conditions in a linear dynamic system using delta function and its derivatives*

A.A. Voevoda[1], K.M. Bobobekov[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.),professor. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department "Automatics" E-mail: kurbon_111@mail.ru*

The dynamic properties of the system are usually examined by feeding the input of the step signal system. In some cases it is necessary to analyze the behavior of the system at zero input action and zero initial conditions integrators (differential equations), included in the description of the system. It shows how to use the delta function (Dirac function) and its derivatives, which are replaced by a short high amplitude pulses of different polarities. It shows how to use the delta function (Dirac function) and its derivatives, which are replaced by a short high amplitude pulses of different polarities. Under the impulse of the delta and its derivatives, understand some physically realizable approximation. The implementation of this type of signal is shown in the examples of the first and the second-row. Is shown graphs of transients, even with a good approximation to the desired signal obtain contrast transients caused by the initial conditions are not zero, "exhibited" directly to the integrator, and the impact of delta pulses and its derivatives. It is necessary provide to not only initial conditions on the integrator output, but also previous values of the integrators for a small time interval. is solved the inverse problem, namely, it is possible to obtain weight function and its derivatives, setting appropriately selected initial conditions on the integrators

Keywords: linear dynamical systems, the initial value, delta function, dynamic properties, impulse response function, the transition function

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-37-48

REFERENCES

1. Voevoda A.A., Shoba E.V. O "strogoi pravil'nosti" peredatochnoi funktsii razomknutoi sistemy [About "strictly proper" transfer function of system without feedback]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 2 (60), pp. 175–180.

2. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Polinomial'nyi metod sinteza PI(D)-regulyatora dlya neminimal'no fazovogo ob"ekta [Polynomial method synthesis of PI(D) regulator for non-minimum-phase object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 7–20.

* *Received 10 October 2016.*

3. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multichannel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.

4. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo regulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.

5. Bobobekov K.M. Psevdogodograf Naikvista [Pseudo-hodograph Nyquist]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 49–57.

6. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.

7. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Sintez dvukhkanal'noi sistemy polinomial'nym metodom: obespechenie astatizma [Synthesis of two-channel system polynomial method: ensuring astatic]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 7–19.

8. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V. [The active identification of parameters for the unstable object]. *XI Mezhdunarodnyi forum po strategicheskim tekhnologiyam, IFOST-2016* [The 11th International Forum on Strategic Technology IFOST-2016], Novosibirsk, 1–3 June 2016, pp. 594–596.

9. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Aktivnaya identifikatsiya parametrov modeli perevernutogo mayatnika po uglu pri podache na vkhod sinusoidal'nykh signalov [Active identification of the inverted pendulum model data on angle in applied to the input sinusoidal signal]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 21–37.

10. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3rd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

11. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p. ISBN 5-9221-0379-2.

12. Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback control theory*. New York, Macmillan Publ., 1990. 198 p.

13. Mehra R.K. Optimal input for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 3, pp. 192–200.

14. Troshina G.V. *Aktivnaya identifikatsiya lineinykh dinamicheskikh diskretnykh statsionarnykh ob"ektov vo vremennoi oblasti.* Diss. kand. tekhn. nauk [Active identification of linear dynamic discrete stationary objects in a time domain. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2007. 171 p.

15. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

16. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.