

УДК: 681.511.26

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВЫХОДОМ ПРИ ПОМОЩИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ\*

А.А. ВОЕВОДА<sup>1</sup>, В.Ю. ФИЛЮШОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: usit@usit.ru

<sup>2</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Рассмотрен нелинейный двухканальный объект, который состоит из линейной динамической части и нелинейного выхода. Выходной вектор представляет собой гладкие дифференцируемые функции от вектора состояния. Основной задачей данной работы является нахождение такого управления, чтобы синтезированная система была эквивалентна системе «два параллельных интегратора». Для решения поставленной задачи применена *линеаризация обратной связи по выходу*, суть которой заключается в нахождении прямой зависимости нелинейной части и управляющего воздействия, так как в таком случае удается компенсировать нелинейность, что приводит полученную систему к линейному виду. Ключевым моментом в применении этого метода является доступность полного вектора состояния, что может быть достигнуто наблюдателем состояния или иными способами. В некоторых случаях полученная эквивалентная модель позволяет изменять выходные переменные только в некоторой области, это связано с нелинейностью самого управляющего сигнала, который может иметь разрывы.

**Ключевые слова:** нелинейное управление, двухканальный объект, линеаризация обратной связи, нелинейный выход, синтез

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-49-61

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует множество методов синтеза регуляторов для различных классов нелинейных моделей объектов. Одним из таких классов является нелинейный объект, в котором нелинейная часть выражена глад-

---

\* Статья получена 08 июня 2016 г.

кими функциями. Для синтеза регуляторов таких объектов возможно применить *линеаризацию обратной связью* (*Linearization by output injection*) [1, 2]. Также для объектов, в которых выходная переменная имеет нелинейную зависимость от переменных состояния, применима линеаризация обратной связью по выходу [3], в которой для компенсации нелинейности необходимо найти зависимость выходной величины от управления. К полученной линеаризованной системе применимы линейные законы управления [4, 5]. В работах [6, 7] рассмотрена линеаризация по обратной связи эвристическим путем, которая заключается в нахождении эквивалентной модели объекта, имеющей прямую зависимость входных воздействий и нелинейности. Для синтеза нелинейных систем возможны задание желаемого уравнения и компенсация нелинейностей путем приравнивания коэффициентов. Такой подход рассмотрен в работах [8–12]. В [13, 14] произведен анализ влияния дифференцирующего фильтра на эвристически рассчитанный регулятор. В [15] рассмотрен синтез регулятора с использованием алгебры Ли. В [16] рассмотрена стабилизация перевернутого маятника на тележке по углу и положению с применением ЛОС на основе алгебры Ли.

В данной работе мы рассматриваем многоканальный объект, в котором инерционная часть выражена системой линейных дифференциальных уравнений, а выходы объекта – нелинейными гладкими функциями от вектора состояния. Целью работы является «перенос» нелинейной части через интегратор и получение линейной зависимости задания от выхода объекта путем структурной компенсации нелинейности управлением.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линеаризация обратной связью подразумевает нахождение такого управления, при котором полученная система будет эквивалентна некоторой линейной модели. Для нахождения такого управления по обратной связи необходимо использовать вектор состояния, который вычисляется наблюдателем состояния [17] или измеряется датчиками. В данной статье рассмотрим такую линеаризацию при полностью известном векторе состояния *двухканального* объекта, выход которого нелинейно связан с переменными состояния.

Рассмотрим систему, исследуемую в работе [18]. Она описывает большой класс многоканальных объектов, в том числе и электрическую машину переменного тока; имеет вид трехканального объекта, в котором выходные величины нелинейно зависимы от переменных состояния, модель такого объекта представлена на рис. 1.

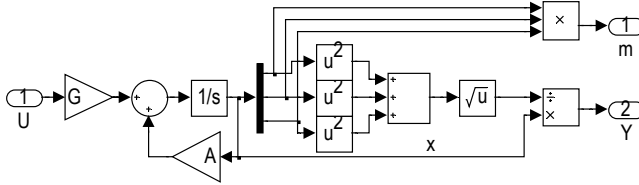


Рис. 1. Структурная схема трехканального объекта

Ниже представлено описание объекта моделирования в переменных состояния

$$\dot{x} = Ax + GU,$$

$$m = x_1 x_2 x_3,$$

$$Y = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right)^T,$$

где

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, U = (u_1, u_2, u_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выходами объекта являются вектор  $Y$  и скаляр  $m$ . Задав желаемые  $y_1$  и  $y_2$ , будем иметь желаемый  $y_3$  исходя из уравнения (1), и данный объект можно представить как трехканальный с выходом

$$\bar{Y} = (y_1, y_2, m)^T. \tag{2}$$

Объект, представленный на рис. 1, является довольно сложным и в то же время интересным. В нашей работе мы будем использовать упрощенную модель, в которой линейная часть описывается двумя параллельными интеграторами, а на выходе имеем только две величины. Выходные переменные имеют аналогичную нелинейную зависимость. Такой объект представлен на рис. 2.

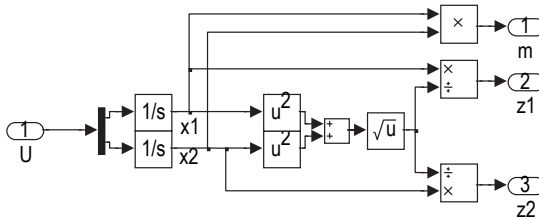


Рис. 2. Структурная схема двухканального объекта

В переменных состояниях модель из рис. 2 представлена ниже:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= U, \\ m &= x_1 x_2, \\ Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= 1, \\ U &= (u_1 \quad u_2)^T. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В качестве выходных переменных аналогично (2) и в соответствии с (3) возьмем

$$Y = \begin{pmatrix} m \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

## 2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Основной целью работы является нахождение прямой зависимости выходных величин от входных. Для нахождения такой зависимости возьмем производную выхода  $Y$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \dot{x}_1 + x_1 \dot{x}_2 \\ \frac{x_2^2 \dot{x}_1 - x_1 x_2 \dot{x}_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Так как линейная часть описывается параллельными интеграторами, то исходя из (2) уравнение (4) запишем в виде

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 u_1 + x_1 u_2 \\ \frac{x_2^2 u_1 - x_1 x_2 u_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Ниже представлена модель объекта из рис. 3, полученная из (5), в которой выходы  $Y$  эквивалентны выходам модели (2).

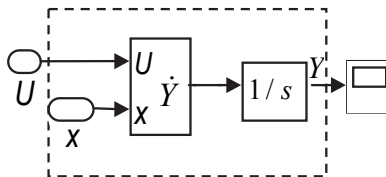


Рис. 3. Структурная схема эквивалентного объекта (5)

Уравнение (5) запишем в матричном виде, тогда

$$\dot{Y} = F(x_1, x_2)U = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & \frac{x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для определения такого управления, при котором линеаризованное уравнение системы примет вид  $\dot{Y} = V = (v_1, v_2)^T$ , запишем (6) следующим образом:

$$V = F(x_1, x_2)U .$$

Тогда искомое управление равно

$$U = F(x_1, x_2)^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}}{2x_2^2} & \frac{1}{2x_2} \\ \frac{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}}{2x_1x_2} & \frac{1}{2x_1} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_3(x) & F_4(x) \end{pmatrix} V . \quad (7)$$

На рис. 4 представлена структурная схема преобразованной системы, состоящая из модели объекта (2), замкнутого управлением (7).

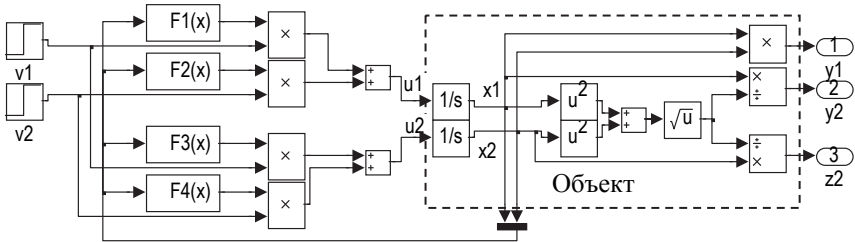


Рис. 4. Структурная схема объекта (2), замкнутого компенсирующим управлением (7)

Найденное управление (7) компенсирует нелинейную зависимость выходных величин и переменных состояния таким образом, что замкнутая система представляет собой два независимых друг от друга интегратора:

$$V \frac{1}{p} = Y, \quad (8)$$

тогда решением уравнения (8) будет

$$Y = Vt + C. \quad (9)$$

Из уравнения (9) необходимо найти постоянный вектор  $C = (c_1, c_2)^T$ , который определяет начальные условия выходных величин. Выходами объекта являются  $z_1$  и  $m$ , а начальные условия, задаваемые на интеграторах, определяют начальное положение вектора  $x$ . Для нахождения такого  $x(0)$ , при котором получим необходимые начальные условия  $Y(0)$ , следует выразить вектор переменных состояния  $x$  через вектор выхода  $Y$ :

$$Y = \begin{pmatrix} m \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix},$$

отсюда находим, что

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m(0)}{\sqrt{\frac{m^2(0)}{z_1^2(0)}(1-z_1^2(0))}} \\ \sqrt{\frac{m^2(0)}{z_1^2(0)}(1-z_1^2(0))} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Используя уравнение (10), зададим необходимые начальные условия для  $m$  и  $z_1$ , вычислим начальные условия для  $x$ . Как видно из (10),  $z_1^2(0) < 1$ , что соответствует условию (3).

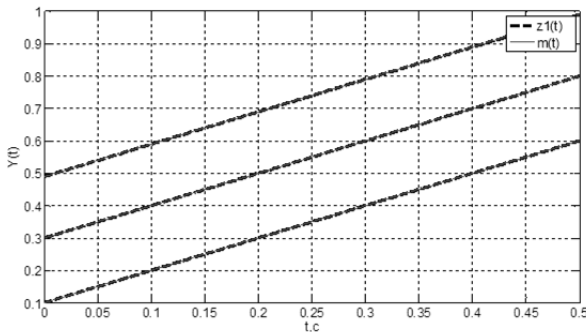


Рис. 5. Графики переходных процессов при  $Y(0) = 0.1, 0.3, 0.49$  и  $V = 1$

На рис. 5 показаны переходные процессы при совпадающих начальных условиях  $z_1(0) = m(0)$ , которые рассчитаны исходя из уравнения (6), и одинаковом задающем воздействии на оба канала  $v_1 = v_2 = 1$ . Переходные процессы по обоим каналам совпадают и имеют вид интегрирующего звена, на входе которого константа  $y_{1,2}(t) = t + 0.5$ .

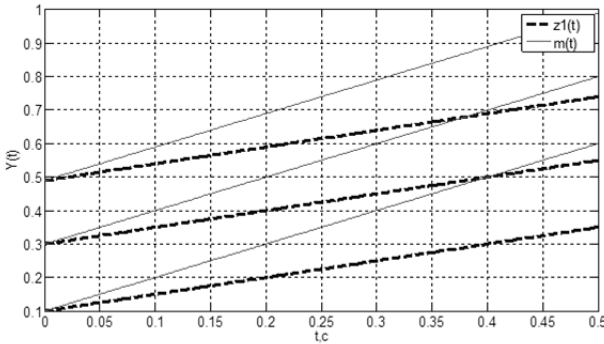


Рис. 6. Графики переходных процессов при  $Y(0) = 0.1, 0.3, 0.49$   
и  $V = (1 \ 0.5)^T$

На рис. 6 аналогично рис. 5 были выбраны одинаковые начальные условия для обеих выходных величин, но задающее воздействие на каждый канал различно. Поэтому на выходе получаем разные углы наклона прямых  $y_1(t) = t + y_1(0)$ ,  $y_2(t) = 0.5t + y_2(0)$ .

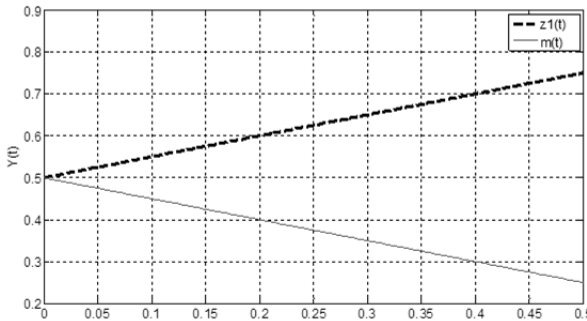


Рис. 7. Графики переходных процессов при  $Y(0) = 0.5$   
и  $V = (-0.5 \ 0.5)^T$



На рис. 7 представлены графики переходных процессов при одинаковых начальных условиях, но задающие сигналы с разными знаками. В таком случае их углы наклона тоже с разными знаками, что соответствует прямым  $y_{1,2}(t) = \mp 0.5t + 0.5$ .

Как видно из рисунков, графики переходных процессов выходных величин имеют вид прямой с некоторым углом наклона, определяемым заданием  $V$ . Такие переходные процессы соответствуют системе с одним двухканальным интегратором.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение линеаризации обратной связью для компенсации нелинейной зависимости выходных величин от переменных состояния возможно и на объектах типа «2 входа – 2 выхода». В итоге из модели объекта (2) с управлением по обратной связи (6) получаем систему, представленную на рис. 4. Полученная система аналогична двум независимым интеграторам. Из рис. 5, 6 и 7 видно, что при различных задающих воздействиях и начальных условиях обе выходные величины изменяются отдельно друг от друга в соответствии с уравнением (8). Так как управление (6) содержит деление на ноль, в рамках данной статьи не были рассмотрены случаи нулевых начальных условий и движения траекторий переходных процессов через ноль.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. *Slotine J.J.E., Li W.* Applied nonlinear control. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
3. *Marino R., Yomei P.* Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust. – London; New York: Prentice Hall, 1995. – 396 p.
4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
5. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.
6. *Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.
7. *Филюшов В.Ю.* Примеры использования нелинейных обратных связей для нелинейных объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 61–70.

8. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 22.10.2013. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

9. *Воевода А.А., Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: перевернутый маятник // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 49–60.

10. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.

11. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9.

12. *Вороной В.В.* Полиномиальная методика расчета нелинейных регуляторов для нелинейных систем // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3 (52). – С. 185–188.

13. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Использование дифференцирующего фильтра при синтезе нелинейного регулятора // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 13–21.

14. *Филюшов В.Ю.* Применение дифференцирующего звена для управления перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 69–78.

15. *Воевода А.А., Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 68–76.

16. *Филюшов В.Ю.* Стабилизация перевернутого маятника модальным методом: магист. дис.: защищена 22.06.2016. – Новосибирск, 2016.

17. *Krener A.J., Isidori A.* Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems & Control Letters. – 1983. – Vol. 3. – P. 47–52.

18. *Симаков Г.М., Филюшов Ю.П.* Синтез системы управления многоканальным объектом // Электричество. – 2015. – № 7. – С. 56–61.

**Воевода Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: теория автоматического управления, сети Петри. Имеет более 200 публикаций. E-mail: voevoda@ucit.ru

**Филюшов Владислав Юрьевич**, аспирант кафедры автоматизации НГТУ. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления. Имеет 6 публикаций. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

## Linearization of two channel system with nonlinear output variable by output injection\*

A.A. Voevoda, V.Yu. Filiushov

<sup>1</sup>Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospect, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Two channel nonlinear object is considered, that object consists of a dynamic linear part and a nonlinear output. The output vector is a smooth differentiable function of the state vector. The main objective of this work is to find such a control system that an equivalent system of “two parallel integrator”. To solve this problem applied linearization output feedback, the essence of which is to find a direct dependence of the nonlinear and manipulated, as in this case it is possible to compensate for non-linearity, which causes the resulting system to a linear form. The key point in the application of this method is the availability of a complete state vector that can be achieved by an observer or state otherwise. In some cases, an equivalent model allows you to change output variables only in a certain region, it is due to the nonlinearity of the control signal, which can have gaps.

**Keywords:** nonlinear control, dual-channel object, feedback linearization, nonlinear synthesis

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-49-61

## REFERENCES

1. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2 [Automatic control theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
2. Slotine J.J.E., Li W. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1991.
3. Marino R., Yomei P. *Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust*. London, New York, Prentice Hall, 1995. 396 p.
4. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [Automatic control theory. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2003. 288 p.
5. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control systems theory]. 4<sup>th</sup> ed. St. Petersburg, Professiya Publ., 2004. 752 p.
6. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.

---

\* Received 08 June 2016.

7. Filiushov V.Yu. Primery ispol'zovaniya nelineinykh obratnykh svyazei dlya nelineinykh ob"ektov [Examples of applying of nonlinear output injection for nonlinear objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 61–70.

8. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [Design of multi-channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

9. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: perevernutyi mayatnik [Feedback linearization: inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 49–60.

10. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Sintez nelineinogo regulyatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.

11. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob"ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.

12. Voronoi V.V. Polinomial'naya metodika rascheta nelineinykh regulyatorov dlya nelineinykh sistem [The polynomial calculation procedure of nonlinear regulators for nonlinear system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 3 (52), pp. 185–188.

13. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Ispol'zovanie differentsiruyushchego fil'tra pri sinteze nelineinogo regulyatora [Using differential filter for nonlinear control system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 13–21.

14. Filiushov V.Yu. Primenenie differentsiruyushchego zvena dlya upravleniya perevernutym mayatnikom [Applying of derivative element for control of inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 69–78.

15. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu [Feedback linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo*

*tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 68–76.

16. Filyushov V.Yu. *Stabilizatsiya perevernutogo mayatnika modal'nym metodom*. Magister. diss. [Stabilization of inverted pendulum by modal method. Master's diss.]. Novosibirsk, 2016.

17. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, vol. 3, pp. 47–52.

18. Simakov G.M., Filyushov Yu.P. Sintez sistemy upravleniya mnogokanal'nym ob'ektom [Control system synthesis of multichannel object]. *Elektrichestvo – Electrical Technology Russia*, 2015, no. 7, pp. 56–61.