

## ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С ОДНОЙ ВХОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И НЕСКОЛЬКИМИ ВЫХОДНЫМИ\*

А.А. ВОЕВОДА<sup>1</sup>, В.Ю. ФИЛЮШОВ<sup>2</sup>, В.И. ШИПАГИН<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации. E-mail: usit@usit.ru

<sup>2</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматизации. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

<sup>3</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматизации. E-mail: shipagin@mail.ru

В настоящее время актуальной задачей в теории управления является синтез регуляторов для объектов с меньшим количеством входных величин по сравнению с выходными, такие объекты описываются матричными передаточными функциями неквадратной формы. Рассмотрен частный случай многоканального объекта с одной входной переменной и двумя/тремя выходными, матричная передаточная функция такого объекта имеет неквадратную форму, а именно один столбец и две/три/четыре строки. Для расчета регуляторов применена полиномиальная методика синтеза, которая заключается в использовании полиномиального матричного описания замкнутой системы управления. Особенностью такого подхода является возможность записи характеристической матрицы замкнутой многоканальной системы через полиномиальные матрицы объекта и регулятора в виде матричного диофантова уравнения. Решая это уравнение, можно задавать желаемые полюса матричного характеристического полинома замкнутой системы. Существует множество вариантов его решения. Один из них заключается в представлении полиномиального матричного уравнения в виде системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме, где матрицей системы является матрица Сильвестра. Выбор порядка полиномиального матричного регулятора и порядка характеристической матрицы осуществляется на основании теоремы, приведенной в работах Chi-TsongChen, которая всегда выполняется для управляемых объектов. Если минимальный порядок регулятора выбран в соответствии с этой теоремой и матрица Силь-

---

\* Статья получена 30 июня 2021 г.

вестра имеет неполный ранг, то это означает, что в системе линейных алгебраических уравнений неизвестных элементов больше, чем уравнений. В таком случае решение, соответствующее выбранному базисному минору, имеет свободные параметры, которыми являются параметры регуляторов. Свободные параметры регуляторов можно задавать произвольно, что использовано для задания или исключения некоторых нулей в замкнутой системе. Таким образом, на различных примерах объектов с неквадратной матричной передаточной функцией проиллюстрирована полиномиальная методика синтеза, позволяющая не только задавать полюса замкнутой системы, но и некоторые нули, что является существенным преимуществом, особенно при синтезе регуляторов для многоканальных объектов.

**Ключевые слова:** полиномиальное матричное разложение, полиномиальная методика синтеза, многоканальный объект, диофантово уравнение, матрица Сильвестра, неквадратная матричная передаточная функция, расчет регуляторов, теория управления

## ВВЕДЕНИЕ

В теории управления особое место занимает синтез регуляторов для линейных многоканальных объектов, которые в общем виде имеют несколько входных и выходных величин (*multiinput – multioutput (MIMO)*), причем их количество может быть не равно, что является особо интересным случаем, из-за малого количества работ, посвященных этой тематике. Частным случаем описания многоканального объекта является один вход и несколько выходов (*singleinput – multioutput (SIMO)*), а также несколько входов и один выход (*multiinput – singleoutput (MISO)*).

Существуют различные способы математического описания многоканальных объектов управления: в пространстве состояний, через матрицы ( $A, B, C, D$ ) [1]; в виде матричной передаточной функции (МПФ) [2], которая в случае неравного количества входных и выходных величин имеет неквадратную форму (*non-squareobject*); в виде полиномиального матричного разложения (ПМР) [3–5], которое позволяет записать многоканальный объект по аналогии с одноканальным, содержащим матричные числитель и знаменатель.

Некоторые термины в теории автоматического управления понимаются различными авторами по-разному, поэтому уточним следующие используемые термины в настоящей работе: управление, регулирование и выходные переменные. Д.П. Ким в работе [6] дает следующую трактовку терминов «управление», «заданный режим» и «выходная величина»: «...управлением называют целенаправленное воздействие на какое-либо устройство, объект», целью управления объектом является «...поддержание заданного режима», под заданным режимом понимается «...изменение какого-либо параметра, характеризующего состояние объекта, по определенному закону», этот пара-

метр называется *выходной величиной* и может быть векторным. В работе по системам подчиненного регулирования [7] Р.Т. Шрейнер понимает под выходными величинами сигналы, выходящие из звеньев объекта: «...выходными величинами звеньев  $x_1, \dots, x_n$ , оказались физические величины, представляющие интерес с точки зрения регулирования и контроля». Далее он пишет: «Для каждой из регулируемых величин  $x_1, \dots, x_n$  предусматривается замкнутая САР... Таким образом, количество регуляторов системы подчиненного регулирования равно количеству регулируемых величин объекта». На основании описанных трактовок сигналы, входящие в объект, называем входными величинами, или просто входами (*inputs*), а выходящие из объекта – выходными величинами, или просто выходами (*outputs*).

Рассмотрим описание терминов «система автоматического управления» (САУ) и «система автоматического регулирования» (САР) автором Д.П. Ким [6]: «В простейших случаях САУ называют САР...», но в то же время «так как нет критериев, по которым можно было бы судить, какие системы управления считать сложными, а какие простыми, мы не будем делать принципиальных отличий между терминами САУ и САР». В работе В.Н. Букова [8], в которой описывается синтез регуляторов для многоканальных объектов, в том числе с неравным количеством входных и выходных величин, также не отмечается различие между этими терминами. Поэтому в настоящей работе не будем делать различий между терминами САУ и САР.

В работе [9] на иллюстративном примере показан способ расчета регуляторов для объекта с одним входом и двумя выходами. В работе [10] показан вывод четырех вариантов записи замкнутой системы в полиномиальном матричном разложении, показана эквивалентность характеристических матриц и на иллюстративном примере объекта с тремя входами и двумя выходами, рассчитаны регуляторы для задания полюсов и некоторых нулей замкнутой системы. В работах [11, 12] показан способ представления системы, построенной по принципу подчиненного регулирования, к многоканальному виду объекта с одной входной и тремя выходными величинами (ток якоря, скорость и положение ротора), что позволяет применить полиномиальный метод синтеза для частного случая многоканального объекта. Линейная модель бокового движения высокоманевренного летательного аппарата на больших углах атаки [13] является неквадратным объектом, где угол скольжения, угловая скорость крена, угловая скорость рыскания и угол крена являются выходными величинами, а угол отклонения элеронов и угол отклонения руля направления – входными. Разработку алгоритмов синтеза для такого рода объектов можно найти в работах [14, 15]. В работах [16, 17] показан синтез

регуляторов для объектов размерностью  $3 \times 2$  и  $1 \times 2$ . В работах [18–20] рассматриваются нелинейные модели различных летательных аппаратов и робототехнических комплексов.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предлагается способ расчета регуляторов, задающих желаемые полюса характеристической матрицы, а также некоторые нули замкнутой системы, для частного случая многоканальных объектов с одним входом и несколькими выходами (SIMO).

Система управления состоит из объекта управления с  $m$  входами и  $p$  выходами, замкнута единичной обратной связью с регулятором, имеющим  $p$  входов и  $m$  выходов, стоящим между сигналом ошибки  $v-y$  и входом объекта управления. Объект управления может быть описан в виде левого и правого ПМР  $W_o(s) = \tilde{D}(s)^{-1} \tilde{N}(s) = N(s)D(s)^{-1}$ , где  $\tilde{D}(s) \in R[s]^{p \times p}$ ,  $D(s) \in R[s]^{m \times m}$ ,  $\tilde{N}(s), N(s) \in R[s]^{p \times m}$ , тильда " $\sim$ " говорит о том, что выбрано левое ПМР,  $R[s]^{m \times p}$  – множество матриц размером  $m \times p$ , элементы которых – полиномы от  $s$  с вещественными коэффициентами. По аналогии введем описание регулятора  $W_r(s) = \tilde{Y}(s)^{-1} \tilde{X}(s) = X(s)Y(s)^{-1}$ , где  $\tilde{Y}(s) \in R[s]^{m \times m}$ ,  $Y(s) \in R[s]^{p \times p}$ ,  $\tilde{X}(s), X(s) \in R[s]^{m \times p}$ .

Выбор порядка регуляторов и порядка характеристической матрицы выполняется в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема.** Рассмотрим систему с единичной обратной связью, показанную на рис. 1.

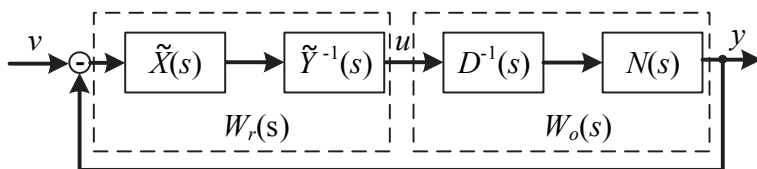


Рис. 1. Многоканальная система в полиномиальном матричном описании

Fig. 1. Multivariable system in polynomial matrix description

Объект описывается строго правильной передаточной матрицей  $W(s)$   $p \times m$ . Пусть  $W(s)$  разложена на  $W(s) = N(s)D(s)^{-1}$ , где  $N(s)$  и  $D(s)$  взаимно простые справа,  $D(s)$  – столбцово приведенная матрица со степенями столбцов  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Пусть  $v$  – строчный индекс  $W(s)$  и пусть  $m_i \geq v - 1$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ , где  $m_i$  – степени строк  $\tilde{Y}(s)$ . Тогда для любой полиномиальной матрицы  $C(s)$ , такой что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_r^{-1}(s)C(s)H_c^{-1} = C_h,$$

где  $H_r(s) = \text{diag}(s^{-m_1}, s^{-m_2}, \dots, s^{-m_m})$  и  $H_c(s) = \text{diag}(s^{-\mu_1}, s^{-\mu_2}, \dots, s^{-\mu_m})$ ,  $C_h$  является не особой постоянной матрицей, существует  $m \times p$  правильный регулятор  $\tilde{Y}^{-1}(s)\tilde{X}(s)$ , где  $\tilde{Y}(s)$  – строчно приведенная со степенями строк  $m_i$ , такая что передаточная матрица вход–выход описывается следующим уравнением:

$$W_{cl}(s) = N(s)C(s)^{-1}\tilde{X}(s), \quad (1)$$

где характеристическая матрица

$$C(s) = \tilde{Y}(s)D(s) + \tilde{X}(s)N(s) \quad (2)$$

имеет размерность  $C(s) \in R[s]^{m \times m}$  [21].

Уравнение является диофантовым для случая одного входа  $m = 1$ . Матрица Сильвестра имеет вид [22]

$$\aleph = \Re \Im.$$

Решением этой системы уравнений при *полном ранге* матрицы Сильвестра является  $\Im$ :

$$\Re = \aleph \Im^{-1}. \quad (3)$$

Если ранг матрицы Сильвестра  $\Im$  *неполный* и порядок регулятора выбран в соответствии с теоремой, то неизвестный параметр регулятора больше, чем количество уравнений. В этом случае решение содержит свободные парамет-

ры регулятора и записывается в следующем виде:  $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{N}_1$ , где  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} - \mathfrak{R} \tilde{\mathfrak{Z}}$ . Общее решение системы линейных уравнений примет вид

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{Z}_1^{-1}. \quad (4)$$

По данной теореме замкнутая система управления состоит из правого ПМР объекта и левого ПМР регулятора, степени строк регулятора зависят от строчного индекса  $\nu$  объекта управления, который находится из левого взаимно простого ПМР объекта со строчно приведенной матрицей «знаменателя»  $\tilde{D}(s)$ . Иными словами, для полиномиального синтеза регулятора необходимы правое и левое ПМР объекта.

## 2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассчитаем регуляторы для объектов с меньшим количеством входных величин по сравнению с выходными, задающих желаемые полюса в характеристической матрице замкнутой системы, с использованием полиномиальной методики синтеза. Опишем алгоритм расчета:

- найти правое взаимно простое ПМР объекта со столбцово приведенной матрицей «знаменателя»  $D(s)$  и столбцовые степени  $\mu_i$ , где  $i = 1, \dots, m$ ;
- найти левое взаимно простое ПМР объекта со строчно приведенной матрицей «знаменателя»  $\tilde{D}(s)$  и строчный индекс  $\nu$ ;
- по строчному индексу объекта  $\nu$  найти минимальные степени строк регулятора, выбрать их;
- определить степень и структуру характеристической полиномиальной матрицы замкнутой системы (ХМЗС)  $C(s) = C_0 + C_1 s + \dots + C_f s^f$ , где  $f \triangleq \max(f_i)$ ,  $f_i = m_i + \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Матрица желаемых коэффициентов ХМЗС  $\mathfrak{N} = (C_f, C_f, \dots, C_1, C_0)$ ;
- выписать матричные коэффициенты  $D_i, N_i$ , где  $i = 0, \dots, \mu$ , правого

ПМР объекта  $D(s) = \sum_{i=0}^{\mu} D_i s^i$ ,  $N(s) = \sum_{i=0}^{\mu} N_i s^i$  и составить матрицу Сильвестра

$$\mathfrak{Z} = \text{diag}(G, \dots, G),$$

где  $\text{diag}(G, \dots, G)$  – блочная диагональная матрица с элементами главной диагонали  $G$  и количеством блочных строк, равных порядку регулятора

$n = \max(m_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad G = (D^T, N^T)^T, \quad D = (D_i, D_{i-1}, \dots, D_0),$   
 $N = (N_i, N_{i-1}, \dots, N_0), \quad i = 0, \dots, \mu;$

– найти регулятор в зависимости от ранга матрицы Сильвестра по формулам (3) или (4). **Конец алгоритма.**

Замкнутая система автоматического регулирования имеет размерность  $p \times p$ , т. е.  $p$  заданий на выходные величины и  $p$  выходных величин. Далее рассмотрены частные случаи многоканальных объектов с одним входным воздействием и несколькими выходными величинами (*SIMO*). Имея одно входное воздействие, только одна выходная величина может отработать ступенчатый сигнал задания. Эту величину для удобства назовем *внешней выходной величиной*, другие величины назовем *внутренними выходными величинами*. Система автоматического управления строится таким образом, чтобы задания на внутренние выходные величины всегда равнялись нулю, а задание на внешнюю выходную величину выбиралось произвольно.

**Пример 1. Объект с одним входом и двумя выходами.** Рассчитываемый регулятор матричный, с двумя входами и одним выходом. Замкнутая система управления имеет два задания и два выхода. Первый выход  $y_1(s)$  примем внутренней выходной величиной с заданием  $v_1(s) = 0$ , а второй выход  $y_2(s)$  – внешним с произвольным заданием  $v_2(s)$ , что показано на рис. 2.

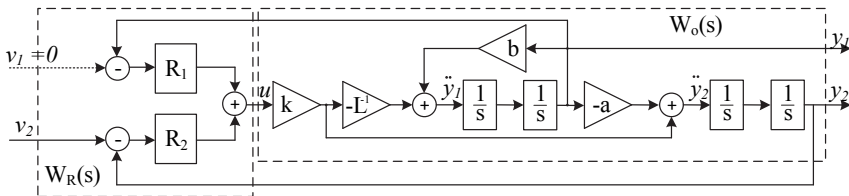


Рис. 2. Система управления с заданием на первый выход  $v_1 = 0$   
и произвольным заданием на второй выход  $v_2$

Fig. 2. Automatic control system with first reference  $v_1 = 0$   
and arbitrary reference of  $v_2$

Регулятор рассчитаем по предложенной методике для объекта с неквадратной МПФ при  $p = 2$  и  $m = 1$ , тогда получим регулятор вида  $W_R(s) = (R_1(s) R_2(s))$ , как показано на рис. 2, задающий желаемое расположение полюсов в замкнутой системе.

Матричная передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{b-s^2} \\ \frac{k_2(Ls^2+a-Lb)}{Ls^2(b-s^2)} \end{pmatrix}.$$

Вынесем общий знаменатель элементов МПФ объекта, который является «знаменателем» правого ПМР объекта. Таким образом, получим

$$D(s) = s^2b - s^4, \quad N(s) = \begin{pmatrix} -k_1s^2 \\ k_2s^2 + k_2(aL^{-1} - b) \end{pmatrix},$$

столбцовая степень равна столбцовому индексу, т. е.  $\mu_1 = \mu = 4$ .

Выпишем левое ПМР объекта

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} (s^2 - b)k_1^{-1} & 0 \\ a(a - Lb)^{-1} & s^2Lk_1(k_2(a - Lb))^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ k_1L(a - Lb)^{-1} \end{pmatrix},$$

строчные степени равны строчному индексу, т. е.  $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 2$ .

Строчные степени регулятора выберем минимальными  $m_i = \nu - 1$ . В данном случае «знаменатель» регулятора скалярный, поэтому выбирается степень регулятора  $m_i = \nu - 1$ , где  $i = 1, \dots, m$ ,  $m_1 = 1$ , тогда матричные коэффициенты регулятора первого порядка:

$\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{1,1} & \tilde{x}_1^{1,2} \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0^{1,1} & \tilde{x}_0^{1,2} \end{pmatrix}$  и  $\tilde{Y}_1 = \tilde{y}_1^{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_0 = \tilde{y}_0^{1,1}$ , матрица коэффициентов регулятора  $\mathfrak{R} = (\tilde{Y}_1 \ \tilde{X}_1 \ \tilde{Y}_0 \ \tilde{X}_0)$ .

Степень характеристической матрицы  $f \triangleq \max(f_i)$ ,  $f_i = m_i + \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ( $f_5 = 5$ ), тогда матрицу желаемых коэффициентов характеристической матрицы выберем в соответствии с  $C(s) = (s + q)^5$ :

$$\aleph = (1, 5q, 10q^2, 10q^3, 5q^4, q^5).$$



Матрицы коэффициентов правого ПМР объекта:

$$D_4 = -1, \quad D_3 = 0, \quad D_2 = b, \quad D_1 = 0, \quad D_0 = 0,$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2(aL^{-1} - b)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Сформируем матрицу Сильвестра

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & k_2(aL^{-1} - b) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & k_2(aL^{-1} - b) \end{pmatrix},$$

она имеет полный ранг  $\text{rank}(\mathfrak{S}) = 6$ .

Решаем уравнение  $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \mathfrak{N}$ :  $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}^{-1}$ . Выпишем полученную матричную передаточную функцию регулятора, а также МПФ замкнутой системы при  $q = 1$  со следующими параметрами объекта:

$$L = 4, \quad b = 5, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 1, \quad a = 10, \quad q = 1,$$

$$X(s) = (-17s - 35.4 \quad -0.5(s + 0.2)), \quad Y(s) = s + 5,$$

$$W_R(s) = \left( -\frac{17s + 35.4}{s + 5} \quad -\frac{0.5s + 0.1}{(s + 5)} \right), \quad (5)$$

$$W_{cl}(s) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{s^2(170s + 354)}{(s + 1)^5} & \frac{s^2(5s + 1)}{(s + 1)^5} \\ \frac{(10 - 4s^2)(170s + 354)}{(s + 1)^5} & \frac{(10 - 4s^2)(5s + 1)}{(s + 1)^5} \end{pmatrix}.$$

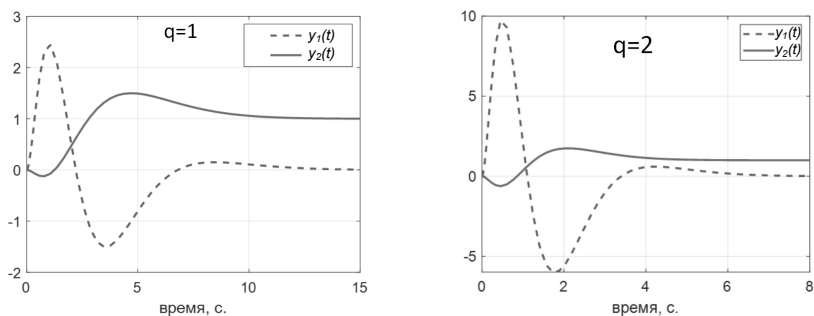


Рис. 3. Графики переходных процессов при  $v_2 = 1$  и с корнями характеристического полинома, равными  $q = 1$  и  $q = 2$

Fig. 3. Graphs of the transient processes with  $v_2 = 1$  and the roots of characteristic polynomial  $q = 1$  and  $q = 2$

Рассчитанный регулятор приводит полюса замкнутой системы к заданным значениям  $C(s) = (s + q)^5$ . Второй выход отрабатывает задание без ошибки (рис. 3), при этом увеличение быстродействия за счет смещения полюсов левее в комплексной полуплоскости увеличивает перерегулирование и отклонение  $y_1 = 0$  от нулевого положения. Показана возможность применения методики для расчета объектов с одним входом и двумя выходами.

**Пример 1а. Объект с одним входом и тремя выходами.** Преобразуем САУ на рис. 2, добавив еще одну выходную величину, являющуюся производной первого выхода  $y_2 = \dot{y}_1$ , тогда внешняя выходная величина из примера 1 равняется  $y_3$ . В таком случае матричная передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \\ W_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{b-s^2} & \frac{k_1 s}{b-s^2} & \frac{k_2(Ls^2 + a - Lb)}{Ls^2(b-s^2)} \end{pmatrix}^T.$$

Внесем общий знаменатель элементов МПФ объекта, который является «знаменателем» правого ПМР объекта. Таким образом, получим

$$D(s) = s^2 b - s^4, \quad N(s) = \begin{pmatrix} -k_1 s^2 & -k_1 s^3 & k_2 s^2 + k_2(aL^{-1} - b) \end{pmatrix}^T,$$

столбцовая степень равна столбцовому индексу  $\mu_1 = \mu = 4$ .

Выпишем левое ПМР объекта:

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} a & 0 & s^2 \\ -s & 1 & 0 \\ -b & s & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \begin{pmatrix} k_2 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix},$$

строчные степени равны строчному индексу, т. е.  $v = v_1 = v_2 = 2$ .

Строчные степени регулятора выберем минимальными, в данном случае «знаменатель» регулятора скалярный, поэтому выбирается степень регулятора  $m_i = v - 1$ , где  $i = 1, \dots, m$ ,  $m_1 = 1$ . Тогда матричные коэффициенты регулятора первого порядка  $\tilde{X}_1 = (\tilde{x}_1^{1,1} \quad \tilde{x}_1^{1,2} \quad \tilde{x}_1^{1,3})$ ,  $\tilde{X}_0 = (\tilde{x}_0^{1,1} \quad \tilde{x}_0^{1,2} \quad \tilde{x}_0^{1,3})$  и  $\tilde{Y}_1 = \tilde{y}_1^{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_0 = \tilde{y}_0^{1,1}$ , матрица коэффициентов регулятора  $\mathfrak{R} = (\tilde{Y}_1 \quad \tilde{X}_1 \quad \tilde{Y}_0 \quad \tilde{X}_0)$ .

Степень характеристической матрицы  $f \triangleq \max(f_i)$ ,  $f_i = m_i + \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ( $f_5 = 5$ ). Тогда матрицу желаемых коэффициентов характеристической матрицы выберем в соответствии с  $C(s) = (s + q)^5$ :

$$\mathfrak{S} = (1, 5q, 10q^2, 10q^3, 5q^4, q^5).$$

Матрицы коэффициентов правого ПМР объекта:

$$D_4 = -1, \quad D_3 = 0, \quad D_2 = b, \quad D_1 = 0, \quad D_0 = 0,$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -k_1 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_2(aL^{-1} - b)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Сформируем матрицу Сильвестра, которая имеет размерность  $8 \times 6$  и ранг  $\text{rank}(\mathfrak{S}) = 6$ , т. е. содержит 2 свободных параметра регулятора. Выберем в качестве свободных параметров, например,  $\tilde{y}_0^{1,1}$  и  $\tilde{x}_1^{1,1}$ . Тогда  $\bar{\mathfrak{R}} = (\tilde{y}_1^{1,1} \quad \tilde{x}_1^{1,1})$ ,

$$\bar{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем уравнение  $\Re_1 = \aleph_1 \Im_1^{-1}$ . Выпишем полученную матричную передаточную функцию регулятора, а также МПФ замкнутой системы при  $q = 1$  со следующими параметрами объекта:

$$W_R(s) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_1^{1,1}s - 5\tilde{y}_0^{1,1} - 10.4}{s + \tilde{y}_0^{1,1}} & \frac{s(\tilde{y}_0^{1,1} - 5) - \tilde{x}_1^{1,1} - 17}{s + \tilde{y}_0^{1,1}} & \frac{-(0.5s + 0.1)}{s + \tilde{y}_0^{1,1}} \end{pmatrix},$$

выпишем элемент МПФ замкнутой системы, отвечающий за реакцию выхода  $y_3$  на задание  $v_3$ :

$$W_{cl}^{v_3, y_3}(s) = \frac{(10 - 4s^2)(5s + 1)}{(s + 1)^5}.$$

Как видим, он аналогичен элементу МПФ замкнутой системы, отвечающему за реакцию выхода  $y_2$  на задание  $v_2$  из примера 1, поэтому используем свободные параметры для более простого вида регуляторов. Зададим  $\tilde{y}_0^{1,1} = 0$  и  $\tilde{x}_1^{1,1} = 0$ , тогда

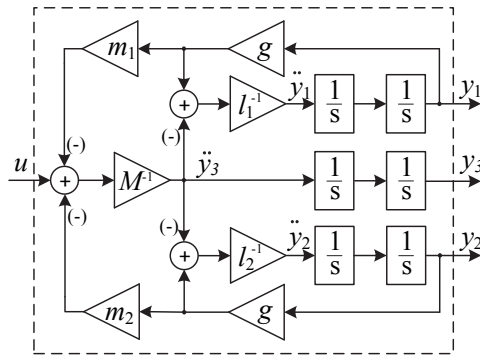
$$W_R(s) = \begin{pmatrix} \frac{-10.4}{s} & \frac{-5s - 17}{s} & \frac{-(0.5s + 0.1)}{s} \end{pmatrix},$$

Таким образом, вместо двух регуляторов первого порядка (5) получены П- и ПИ-регуляторы по внутренним выходным величинам и ПИ-регулятор по внешнему выходу. Графики переходного процесса не отличаются от графиков примера 1.

**Пример 2. Объект с одним входом и тремя выходами.** Произведем расчет регулятора для системы управления с заданиями на первые два выхода, равными нулю:  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$ , и с произвольным заданием на третий выход  $v_3$ . Таким образом, замкнутая система управления – 3 задания 3 выходных переменных имеет всегда два нулевых задания [23]:

$$M\ddot{y}_3 = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + u, \quad l_1 \ddot{y}_1 = g y_1 - \ddot{y}_3, \quad l_2 \ddot{y}_2 = g y_2 - \ddot{y}_3,$$

Структурная схема объекта  $1 \times 3$  представлена на рис. 4. Отметим, что при равных коэффициентах  $m_1 = m_2$  и  $l_1 = l_2$  объект неуправляем, поэтому примем следующие ограничения на коэффициенты объекта:  $m_1 = m_2 = m_c$ ,  $l_1 \neq l_2$ .

Рис. 4. Структурная схема объекта  $1 \times 3$ Fig. 4. Structural scheme of the  $1 \times 3$  object

Регулятор рассчитаем по предложенной методике для объекта с неквадратной МПФ при  $p=3$  и  $m=1$ , тогда получим регулятор вида  $W_R(s) = (R_1(s) \ R_2(s) \ R_3(s))$ .

Матричная передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} \frac{n_2^1 s^2 + n_0^1}{s^4 + d_2 s^2 + d_0} & \frac{n_2^2 s^2 + n_0^2}{s^4 + d_2 s^2 + d_0} & \frac{1}{s^2} \frac{n_4^3 s^4 + n_2^3 s^2 + n_0^3}{s^4 + d_2 s^2 + d_0} \end{pmatrix}^T,$$

$$h_0 = (b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + b_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})),$$

$$d_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad h_1 = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 - b_3(a_{11} + a_{22}), \quad d_2 = -(a_{11} + a_{22}),$$

$$n_2^1 = b_1, \quad n_0^1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1, \quad n_2^2 = b_2, \quad n_0^2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2, \quad n_4^3 = b_3,$$

$$n_2^3 = h_1, \quad n_0^3 = h_0, \quad b_1 = -(Ml_1)^{-1}, \quad b_2 = -(Ml_2)^{-1}, \quad b_3 = M^{-1},$$

$$a_{11} = -(Mg + m_c g)b_1, \quad a_{31} = a_{32} = -m_c g b_3, \quad a_{12} = -m_c g b_2,$$

$$a_{21} = -m_c g b_1, \quad a_{22} = -(Mg + m_c g)b_2.$$

Вынесем общий знаменатель элементов МПФ объекта, который является «знаменателем» правого ПМР объекта. Таким образом, получим

$$D(s) = s^6 + d_2 s^4 + d_0 s^2, \quad N(s) = \begin{pmatrix} n_2^1 s^4 + n_0^1 s^2 \\ n_2^2 s^4 + n_0^2 s^2 \\ n_4^3 s^4 + n_2^3 s^2 + n_0^3 \end{pmatrix},$$

столбцовая степень равна столбцовому индексу  $\mu_1 = \mu = 6$ .

Выпишем левое ПМР объекта

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} Ml_1 s^2 - m_c - Mg & -m_c & 0 \\ -m_c & Ml_2 s^2 - m_c - Mg & 0 \\ gm_c & gm_c & Ms^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

строчные степени равны строчному индексу, т. е.  $\nu = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 2$ .

Строчные степени регулятора выберем минимальными:  $m_i = \nu - 1$ ,  $m_1 = 1$ . Тогда матричные коэффициенты регулятора первого порядка  $\tilde{X}_1 = (\tilde{x}_1^{1,1} \quad \tilde{x}_1^{1,2} \quad \tilde{x}_1^{1,3})$ ,  $\tilde{X}_0 = (\tilde{x}_0^{1,1} \quad \tilde{x}_0^{1,2} \quad \tilde{x}_0^{1,3})$  и  $\tilde{Y}_1 = \tilde{y}_1^{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_0 = \tilde{y}_0^{1,1}$ , матрица коэффициентов регулятора  $\mathfrak{R} = (\tilde{Y}_1 \quad \tilde{X}_1 \quad \tilde{Y}_0 \quad \tilde{X}_0)$ .

Степень характеристической матрицы  $f \triangleq \max(f_i)$ ,  $f_i = m_i + \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ( $f_7 = 7$ ), тогда матрицу желаемых коэффициентов характеристической матрицы выберем в соответствии с  $C(s) = (s + q)^7$ :

$$\aleph = (1, 7q, 21q^2, 35q^3, 35q^4, 21q^5, 7q^6, q^7).$$

Матрицы коэффициентов правого ПМР объекта:

$$D_6 = 1, \quad D_5 = 0, \quad D_4 = d_2, \quad D_3 = 0, \quad D_2 = d_0, \quad D_1 = 0, \quad D_0 = 0,$$

$$N_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_4^3 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} n_0^1 \\ n_0^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix},$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_0^3 \end{pmatrix}.$$

Сформируем матрицу Сильвестра, она имеет полный ранг  $\text{rank}(\mathfrak{Z}) = 8$ .

Решаем уравнение  $\mathfrak{R}\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ :  $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}\mathfrak{Z}^{-1}$ . Выпишем полученную матричную передаточную функцию регулятора, а также МПФ замкнутой системы при  $q = 1$  со следующими параметрами объекта:

$$M = 10, \quad m_c = 1, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = 2, \quad g = 10,$$

$$\tilde{X}(s) = 410^{-1}(-(283 \ 821s + 881 \ 163), 272 \ 612s + 60 \ 5916, 700s + 100),$$

$$\tilde{Y}(s) = s + 7.$$

Задания на первую и вторую выходные величины равны нулю, поэтому для описания поведения синтезированной системы достаточно использовать только третий столбец МПФ замкнутой системы  $W_{cl}(s) = \{W_{i,j}(s)\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , элементы которой приведены ниже:

$$W_{1,3} = \frac{(5-s^2)s^2 A(s)}{10(s+1)^7}, \quad W_{2,3} = \frac{(10-s^2)s^2 A(s)}{20(s+1)^7},$$

$$W_{3,3} = \frac{(7s+10)(20s^4 - 273s^2 + 820)}{82 \ 000(s+1)^7},$$

где  $A(s) = (70s^2 + 10)41^{-1}$ .

На рис. 5 показаны графики переходных процессов для двух вариантов задания кратных корней характеристической матрицы при  $q = 1$  и  $q = 2$ .

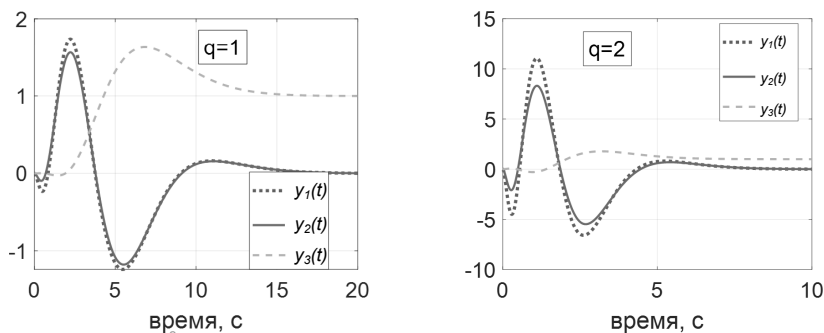


Рис. 5. Графики переходных процессов при  $v_3 = 1$  и с корнями характеристического полинома, равными  $q = 1$  и  $q = 2$

Fig. 5. Graphs of the transient processes with  $v_3 = 1$  and the roots of characteristic polynomial  $q = 1$  and  $q = 2$

По предложенной методике расчета регуляторов для объектов с неквадратной МПФ получены регуляторы, задающие желаемые полюса ХМЗС  $C(s) = (s + q)^7$ . Внешняя выходная величина обрабатывается без ошибки, при этом увеличение быстродействия, за счет смещения полюсов левее, увеличивает перерегулирование внутренних выходных величин.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены иллюстративные примеры объектов с меньшим количеством входов по сравнению с выходами, для которых полиномиальным методом синтеза рассчитаны регуляторы, задающие полюсам замкнутой системы желаемое расположение. На примерах 1 и 2, которые являются объектами с одним входом и двумя/тремя выходами соответственно, показана возможность применения полиномиальной методики для многоканальных объектов с меньшим количеством входов по сравнению с выходами. САУ с рассчитанными регуляторами позволяет обрабатывать произвольное задание на внешнюю выходную величину с астатизмом первого порядка при стабилизации в нулевом положении внутренних выходных величин. На **примере 1а** показана возможность увеличения числа выходных величин объекта из **примера 1** за счет принятия выходной величиной производной первого выхода  $y_2 = \dot{y}_1$ , которую можно интерпретировать как датчик измерения про-



изводной первой выходной величины объекта. Таким образом, модель объекта размерностью  $1 \times 2$  может быть представлена моделью объекта размерностью  $1 \times 3$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем: учебник. – М.: Машиностроение, 1986. – 271 с.
2. Бесекерский В.А. Попов Е.П. Теория систем автоматического управления: учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2003. – 752 с.
3. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 1. – Morgan and Claypool Publishers, 2011. – 184 p.
4. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 2. – Morgan and Claypool Publishers, 2011. – 227 p.
5. Antsaklis P.J., Anthony M.N. Linear systems. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 670 p.
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
7. Шрейнер Р.Т., Востриков А.С., Саранулов Ф.Н. Системы подчиненного регулирования электроприводов. Ч. 1: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1997. – 279 с.
8. Буков В.Н., Максименко И.М., Рябченко В.Н. Регулирование многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 6. – С. 97–110.
9. Воевода А.А., Бобобеков К.М., Филюшов В.Ю. Полиномиальный метод синтеза для объекта с двумя входами и одним выходом // Сборник научных трудов НГТУ. – 2019. – № 3–4 (96). – С. 17–32.
10. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Полиномиальное матричное разложение при синтезе неквадратных САУ // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 1 (81). – С. 21–38.
11. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Многоконтурная система подчиненного регулирования в многоканальном неквадратном представлении // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2021. – № 2 (76). – С. 90–101.
12. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Polynomial matrix synthesis method of a subordinate control system // Actual Issues of Architecture and Civil Engineering. – Novosibirsk: Sibstrin, 2021. – P. 525–528.
13. Буков В.Н., Рябченко В.Н. Вложение систем. Синтез регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 7. – С. 3–14.
14. Буков В.Н. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2006. – № 3. – С. 41–48.

15. Буков В.Н., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н. Вложение систем. Полиномиальные уравнения // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 7. – С. 12–23.
16. Voevoda A.A., Shipagin V.I., Filiushov V.Yu. Multichannel control synthesis for the plant with three input and two output channels using polynomial matrix decomposition // 2021 IEEE World AI IoT Congress (AIIoT). – USA, Seattle, 2021. – P. 446–451.
17. Воевода А.А., Шипагин В.И. Пример полиномиального синтеза регулятора для неквадратного объекта с одним входом и двумя выходами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2020. – № 4 (98). – С. 7–20.
18. Castillo P., Lozano R., Dzul A.E. Modelling and control of mini-flying machines. – Springer, 2005. – 251 p.
19. Jelali M., Kroll A. Hydraulic servo systems: modelling, identifications and control. – Springer, 2004. – 380 p.
20. Spong M.W., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot modelling and control. – John Wiley and Sons, 2005. – 496 p.
21. Chen C.T. Linear system theory and design. – 2-nd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
22. Бобобеков К.М. Полиномиальный метод синтеза многоканальных регуляторов с использованием матрицы Сильвестра: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – СПб., 2019. – 168 с.
23. Kailath T. Linear systems. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980. – 350 p.

**Воевода Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 300 публикаций. E-mail: [uscit@uscit.ru](mailto:uscit@uscit.ru)

**Филишов Владислав Юрьевич**, аспирант кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления. Имеет более 30 публикаций. E-mail: [filiushov.vladislav@gmail.com](mailto:filiushov.vladislav@gmail.com)

**Шипагин Виктор Игоревич**, аспирант кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. E-mail: [shipagin@mail.ru](mailto:shipagin@mail.ru)

DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42

**Polynomial method for the synthesis of regulators for the special case of multichannel objects with one input variable and several output values\*****A.A. Voevoda<sup>1</sup>, V.Yu. Filiushov<sup>2</sup>, V.I. Shipagin<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department "Automatics". E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

<sup>3</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department "Automatics". E-mail: shipagin@mail.ru

Currently, an urgent task in control theory is the synthesis of regulators for objects with a smaller number of input values compared to output ones, such objects are described by matrix transfer functions of a non-square shape. A particular case of a multichannel object with one input variable and two / three / four output variables is considered; the matrix transfer function of such an object has not a square shape, but one column and two / three / four rows. To calculate the controllers, a polynomial synthesis technique is used, which consists in using a polynomial matrix description of a closed-loop control system. A feature of this approach is the ability to write the characteristic matrix of a closed multichannel system through the polynomial matrices of the object and the controller in the form of a matrix Diophantine equation. By solving the Diophantine equation, the desired poles of the matrix characteristic polynomial of the closed system are set. There are many options for solving the Diophantine equation and one of them is to represent the polynomial matrix Diophantine equation as a system of linear algebraic equations in matrix form, where the matrix of the system is the Sylvester matrix. The choice of the order of the polynomial matrix controller and the order of the characteristic matrix is carried out on the basis of the theorem given in the works of Chi-Tsong Chen, which always holds for controlled objects. If the minimum order of the controller is chosen in accordance with this theorem, and the Sylvester matrix has not full rank, then this means that there are more unknown elements in the system of linear algebraic equations than there are equations. In this case, the solution corresponding to the selected basic minor has free parameters, which are the parameters of the regulators. Free parameters of regulators can be set arbitrarily, which is used to set or exclude some zeros in a closed system. Thus, using various examples of objects with a non-square matrix transfer function, a polynomial synthesis technique is illustrated, which allows not only specifying the poles of a closed system, but also some zeros, which is a significant advantage, especially when synthesizing controllers for multichannel objects.

**Keywords:** polynomial matrix decomposition, polynomial synthesis technique, multichannel object, Diophantine equation, Silvery matrix, non-square matrix transfer function, calculation of regulators, control theory

---

\* Received 30 June 2021.

## REFERENCES

1. Aleksandrov A.G. *Sintez regulyatorov mnogomernykh sistem* [Regulator synthesis of multivariable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 271 p.
2. Besekerskii V.A. Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Control system theory]. 4th ed. St. Petersburg, Professiya Publ., 2003. 752 p.
3. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 1. Morgan and Claypool Publishers, 2011. 184 p.
4. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 2. Morgan and Claypool Publishers, 2011. 227 p.
5. Antsaklis P.J., Anthony M.N. *Linear systems*. New York, McGraw-Hill, 1997. 670 p.
6. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.
7. Shreiner R.T., Vostrikov A.S., Sarapulov F.N. *Sistemy podchinennogo regulirovaniya elektroprivodov*. Ch. 1 [Subordinate control systems. Pt. 1]. Ekaterinburg, UGTU-UPi Publ., 1997. 279 p.
8. Bukov V.N., Maksimenko I.N., Ryabchenko V.N. Regulation of multivariable systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1998, no. 6, pp. 97–110. (In Russian).
9. Voevoda A.A., Bobobekov K.M., Filiushov V.Yu. Polinomial'nyi metod sinteza dlya ob"ekta s dvumya vkhodami i odnim vykhodom [Polynomial synthesis method for objects with two inputs and one output]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2019, no. 3–4 (96), pp. 17–32.
10. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Polinomial'noe matrichnoe razlozhenie pri sinteze nekvadratnykh SAU [Polynomial matrix decomposition for the synthesis of non-square control systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and data processing systems*, 2021, no. 1 (81), pp. 21–38.
11. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Mnogokonturnaya sistema podchinennogo regulirovaniya v mnogokanal'nom nekvadratnom predstavlenii [Multiloop subordinate control system in the non-square multivariable representation]. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University*, 2021, no. 2 (76), pp. 90–101.
12. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Polynomial matrix synthesis method of a subordinate control system. *Actual Issues of Architecture and Civil Engineering*. Novosibirsk, Sibstrin Publ., 2021, pp. 525–528.

13. Bukov V.N., Ryabchenko V.N. Vlozhenie sistem. Sintez regulyatorov [Embedding of systems. Synthesis of controllers]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no. 7, pp. 3–14. (In Russian).
14. Bukov V.N. Analiticheskii podkhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem [Analytical approach for analysis and synthesis of matrix systems]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya Southem Federal University. Engineering sciences*, 2006, no. 3, pp. 41–48.
15. Bukov V.N., Kos'yanchuk V.V., Ryabchenko V.N. Vlozhenie sistem. Polinomial'nye uravneniya [System Embedding. Polynomial Equations]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2002, no. 7, pp. 12–23. (In Russian).
16. Voevoda A.A., Shipagin V.I., Filiushov V.Yu. Multichannel control synthesis for the plant with three input and two output channels using polynomial matrix decomposition. *2021 IEEE World AI IoT Congress (AIIoT)*, USA, Seattle, 2021, pp. 446–451.
17. Voevoda A.A., Shipagin V.I. Primer polinomial'nogo sinteza regulyatora dlya nekvadratnogo ob"ekta s odnim vkhodom i dvumya vykhodami [Example of polynomial controller synthesis for a non-square object with one input and two outputs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 4 (98), pp. 7–20.
18. Castillo P., Lozano R., Dzul A.E. *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer, 2005. 251 p.
19. Jelali M., Kroll A. *Hydraulic servo systems: modelling, identifications and control*. Springer, 2004. 380 p.
20. Spong M.W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot modelling and control*. John Willey and Sons, 2005. 496 p.
21. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 2nd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.
22. Bobobekov K.M. *Polinomial'nyy metod sinteza mnogokanal'nykh regulyatorov s ispol'zova-niem matritsy Sil'vestra*. Diss. kand. tekhn. nauk [Polynomial control method for multichannel dynamic system by Silvester matrix. PhD eng. sci. diss.]. St. Petersburg, 2019. 168 p.
23. Kailath T. *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980. 350 p.

Для цитирования:

Воевода А.А., Шипагин В.И., Филюшов В.Ю. Полиномиальный метод синтеза регуляторов для частного случая многоканальных объектов с одной входной переменной и несколькими выходными // Безопасность цифровых технологий. – 2021. – № 3 (102). С. 21–42. – DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42.

For citation:

Voevoda A.A., Shipagin V.I., Filiushov V.Yu. Polinomial'nyi metod sinteza regul'yatorov dlya chastnogo sluchaya mnogokanal'-nykh ob"ektov s odnoi vkhodnoi peremennoi i neskol'kimi vykhodnymi [Polynomial method for the synthesis of regulators for the special case of multichannel objects with one input variable and several output values]. *Bezopasnost' tsifrovyykh tekhnologii = Digital Technology Security*, 2021, no. 3 (102), pp. 21–42. DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42.