БЕЗОПАСНОСТЬ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ. – 2022. – № 3 (106). – 26–48

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

УДК 621.382.232 DOI: 10.17212/2782-2230-2022-3-26-48

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ МНОГОКАНАЛЬНЫХ САУ ПРИ СИНТЕЗЕ МОДАЛЬНЫМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА И РЕГУЛЯТОРА*

А.А. ВОЕВОДА[1], В.И. ШИПАГИН[2]

[1] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru*

[2] *630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: shipagin@mail.ru*

При рассмотрении вопроса синтеза системы автоматического управления модальным методом, использующим полиномиальное разложение передаточных функций объекта и регулятора, предложены алгоритмы синтеза для полностью управляемых систем. Однако возникает вопрос о возможностях к применению данного алгоритма при невыполнении этого условия. Особенно актуальным рассмотрение этого вопроса оказалось для многоканальных моделей объектов с неквадратной передаточной функцией (имеющих неравное количество входных и выходных каналов). Показано, что для таких фундаментальных терминов теории автоматического управления, как управляемость, достижимость, наблюдаемость, стабилизируемость, и некоторых других существуют особенности их определения в случае рассмотрения такого типа объектов. Предлагается к употреблению термин «неквадратный объект», использующийся в основном в зарубежной литературе. Рассматриваются некоторые ограничения на модальный синтез регуляторов методом, использующим полиномиальное матричное разложение объекта и регулятора. Приводятся примеры внутренне и асимптотически неустойчивой систем. Выдвигается гипотеза о стабилизируемости управляемой системы. Рассматривается пример многоканальной системы «перевернутый маятник на тележке», являющейся объектом с неквадратной матричной передаточной функцией (в данном примере число входных воздействий меньше числа выходных параметров). С помощью статической характеристики этого объекта демонстрируется, что не всегда управляемые системы можно стабилизировать в заданном положении. Например, для случая задания желаемого угла перевернутого маятника, отличного от нуля, невозможно удерживать поло-

* Статья получена 09 июля 2022 г.

жение тележки в заданной координате. При этом если задать в качестве желаемого угла перевернутого маятника угол в точке равновесия, то стабилизация тележки в заданной координате становится возможной.

Ключевые слова: модальные методы синтеза, многоканальный объект, синтез многоканальных регуляторов, полиномиальный матричный метод, управляемость, наблюдаемость, устойчивость, достижимость, асимптотическая устойчивость, стабилизируемость, перевернутый маятник на тележке, пространство состояний

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество методов синтеза регуляторов, в том числе и модальные методы синтеза. Для синтеза регуляторов модальным методом не всегда требуется полная управляемость системы [1]. При этом в работах [2–5], использующих модальный метод синтеза с полиномиальным матричным разложением передаточной функции системы (*polynomial matrix fraction – PMF*), одним из необходимых требований к объекту управления является взаимная простота «числителя» и «знаменателя» передаточной функции (ПФ) объекта. При этом взаимная простота ПФ регулятора и управляемость, наблюдаемость уравнений пространства состояния содержат по сути одинаковую информацию[1] [2, p. 192]. Таким образом, при рассмотрении алгоритма модального синтеза с помощью полиномиального разложения системы возникает вопрос об условиях применимости указанного метода с точки зрения выполнения условий управляемости и наблюдаемости системы. Особенно остро этот вопрос стоит в случае рассмотрения многоканальной модели объекта с неквадратной матричной ПФ (МПФ).

Настоящая статья посвящена обзору некоторых определений соответствующей иностранной и отечественной литературы и влиянию управляемости и наблюдаемости на возможность стабилизации линейных стационарных многоканальных объектов (в том числе с неквадратной МПФ). Для этого рассматриваются такие базовые понятия ТАУ, как управляемость (*controllability*), достижимость (*reachability*), наблюдаемость (*observability*) и устойчивость (*stability*) систем управления, а также некоторые другие. Это необходимо еще и для того, чтобы показать неоднозначное толкование некоторых терминов, вызванное «деформацией» некоторых понятий ТАУ, произошедшее с годами. Также необходимо отметить, что для простоты рассматриваемые определения и примеры приведены для многоканальных линейных непрерывных стационарных систем, если не указано иное.

---

[1] "…controllable and observable state equations and coprime fractions contain essentially the same information and either description can be used to carry out analysis and design".

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе представлен обзор некоторых определений из различных источников литературы (отечественных и иностранных). Во втором разделе рассматриваются некоторые ограничения применимости метода PMF, а в третьем разделе на примере системы «перевернутый маятник на тележке» демонстрируется возможность стабилизации управляемой и наблюдаемой системы в заданном положении.

1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

При современном развитии технических систем и повышении требовательности к качеству систем автоматического управления (САУ) происходит интенсивное развитие научной дисциплины «Теория автоматического управления» (ТАУ). С одной стороны, это приводит к появлению новых направлений, алгоритмов и методик, а с другой стороны, заставляет в новых условиях пересматривать некоторые базовые понятия и определения с учетом новых задач. Из-за обилия источников информации (в том числе иностранных) одни и те же понятия определены различными терминами. И наоборот: в силу некоторых обстоятельств происходит «упрощение» некоторых понятий, при котором возможно появление проблем при трактовке и объяснении некоторых явлений.

Раздел состоит из трех подразделов. В первом подразделе рассмотрено одно из базовых понятий ТАУ – многоканальный объект (*multichannel object*). Из разных источников приведены различные термины, употребляющиеся наряду с этим понятием. Рассмотрен специфичный терминоид – специальная лексема, используемая для обозначения недостаточно устоявшихся и неоднозначно понимаемых понятий [6]: неквадратный объект (*non-square object*), который употребляется в основном в иностранной литературе. Приводится список публикаций, в которых он используется. Во втором подразделе приведены термины управляемости и наблюдаемости и разные взгляды к их определению. Для лучшего понимания приведенных утверждений также приведены определения уравнения состояния (*state equation*), стабилизируемости и асимптотической устойчивости (*asymptotic stability*). Третий подраздел посвящен определению управляемости и наблюдаемости на основе информации о ПФ объекта.

1.1. О МНОГОКАНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТАХ УПРАВЛЕНИЯ

В этом подразделе речь пойдет о дубликатах для терминологического определения понятия «многоканальный объект». Кроме этого, вниманию читателя предлагается термин «неквадратный объект», распространенный в зарубежных работах по синтезу САУ. Авторы данной статьи считают необходимым его рассмотрение в связи с потребностью выделения особого класса многоканальных объектов, имеющих неравное количество входных и выходных каналов.

Многоканальный объект. В некоторых случаях иностранная и отечественная литература использует разные названия для одних и тех же определений. К примеру, рассмотрим объект, содержащий больше одного входного или выходного канала. Так в отечественной литературе [7–9] принято было использовать следующее.

Определение 1 [7, с. 12]. ***Многомерный объект управления*** (*multidimensional controlled object*) – объект управления, математическая модель функционирования которого содержит несколько управляющих и (или) управляемых координат.

В иностранной литературе такие объекты принято называть ***MIMO*** (*multi-input, multi-output object*) [3, 10, 11]. При этом также используется термин ***multivariable object*** [3, 10–12]. Некоторые авторы применяют термин ***многоканальный объект*** [4, 5, 13], термин ***многосвязный объект управления*** (*multi-loop controlled object*) [14–17]. При этом важно отметить, что некоторые авторы [7, 18] не отождествляют понятия многомерности и многосвязности объектов управления. Авторы настоящей статьи в своих работах используют термин «многоканальный объект».

Неквадратный объект. Рассмотрим еще один термин, употребляющийся в основном в иностранной литературе [2, 10, 19]. Если матричная передаточная функция (МПФ) многоканального объекта неквадратная (т. е. количество входных и выходных каналов не совпадает), то такой объект для краткости называют неквадратным.

Определение 2. ***Неквадратный объект*** – многоканальная модель объекта, имеющая неравное количество входных и выходных каналов. Причем рассматриваются как объекты, имеющие количество выходов большее, чем количество входов [5, с. 96; 19, р. 422], так и объекты с числом входных воздействий большим, чем число выходных воздействий [19, р. 425; 20, р. 96].

В этом подразделе был продемонстрирован лексический дуализм на примере определения многоканального объекта. Приведен термин «неквадратный объект», который в настоящее время широко не распространен в отечественной литературе. Его введение подчеркивало бы особый класс многоканальных объектов, содержащих неравное количество входных и выходных каналов.

1.2. ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

В этом подразделе приведены различные взгляды к определению управляемости и наблюдаемости объекта. Кроме этого, приводятся понятия, которые играют вспомогательную роль. Они необходимы для введения определений управляемости и наблюдаемости. На основании изложенных определений приводится предположение о возможности удержании системы в заданном режиме.

Уравнение состояния. Большинство авторов [2, 3, 9, 10] представляют понятия управляемости и наблюдаемости системы автоматического управления с помощью уравнения состояния. Приведем описания системы через уравнения состояния.

Определение 3 [2, p. 153]. Рассмотрим n-мерное ***уравнение состояния*** с p-входами и q-выходами:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u\,, \qquad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u\,, \tag{1}$$

где **A**, **B**, **C** и **D** – числовые матрицы размерами $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ и $q \times p$ [2].

Наблюдаемость. Рассмотрим определение наблюдаемости для линейных стационарных систем.

Определение 4 [2, p.153]. Уравнение состояния (1) называется ***наблюдаемым***, если для любого неизвестного начального состояния $x(0)$ существует конечное $t_1 > 0$ такое, что знание вектора входа u и вектора выхода y на $[0, t_1]$ позволяет определить единственное начальное значение $x(0)$. Иначе уравнение называется ненаблюдаемым.

Способ вычисления [2, p. 156]. Следующие утверждения эквивалентны:

1) пара матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ наблюдаемая;

2) матрица наблюдаемости размерности $nq \times n$

$$\mathbf{O} = (\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \ldots \quad \mathbf{CA}^{n-1})^T \tag{2}$$

имеет ранг n (полный столбцовый ранг).

В [9, с. 316], в отличие от [2, p. 153], вводится также понятие ***вполне наблюдаемый объект***, что по сути означает просто наблюдаемую систему.

---

[2] Здесь и далее некоторые определения из иностранных источников приведены в транскрипции автора.

Управляемость объекта. Встречается несколько определений, касающихся управляемости объекта. Сначала рассмотрим подробно один из них, а затем перейдем ко второму.

Определение 5. Дадим два эквивалентных определения для случая линейных стационарных систем в соответствии с [9, с. 20].

а) Линейный объект (1) вполне управляем, если, каково бы ни было начальное состояние, существует допустимое управление, определенное на конечном интервале и переводящее объект (3) в конечное состояние, т. е. в начало координат.

б) Линейный объект (1) вполне управляем, если, каково бы ни было конечное состояние $x(t_f) = x^f$, существует допустимое управление, определенное на конечном интервале $[t_0,\ t_f]$ и переводящее объект (3) из начального состояния $x(t_0) = 0$, т. е. из начала координат, в конечное состояние $x(t_f) = x^f$.

Достижимость и управляемость. Приведем второй вариант определения понятия управляемости. В работах [1, 3] разделяют определения, касающиеся управляемости (пункты (а) и (б) из определения 5), рассматривая следующие понятия: достижимость состояния или «управляемость из начала координат» (*controllability-from-the-origin*) и управляемость или «управляемость к началу координат» (*controllability-to-the-origin*).

Определение 6 [3, p. 215]. В случае стационарной системы состояние x_1 называют ***достижимым***, если существует такое входное воздействие, которое переводит состояние системы $x(t)$ из нулевого состояния к x_1 за некоторое конечное время *T*.

Определение 7 [3, p. 216]. Состояние x_0 называют ***управляемым***, если существует такое входное воздействие, которое переводит состояние из x_0 к нулевому состоянию за некоторое конечное время *T*.

Способ вычисления [3, p. 218]. Если ранг матрицы $rank(\mathbf{A}) = n$, то система будет управляемая в том случае, если $rank(\Re) = n$, т. е. когда условие достижимости удовлетворено и $\Re$ – блочная матрица управляемости, равная

$$\Re = (\mathbf{B} \quad \mathbf{BA} \quad \ldots \quad \mathbf{BA}^{n-1})\,. \tag{3}$$

В этом случае матрица размером $n \times mn$

$$\mathbf{A}^{-n}\Re = (\mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}, \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

представляет интерес, и система управляемая тогда и только тогда, когда $rank(\mathbf{A}^{-n}\Re) = rank(\Re) = n.$

При этом важно отметить, что для стационарных непрерывных линейных систем понятия достижимости и управляемости идентичны [1, с. 227].

Стабилизируемость. Приведем утверждения, касающиеся стабилизируемости и ее взаимосвязи с управляемостью объекта.

Утверждение 2 [9, с. 34]. Если объект управляемый, то он стабилизируемый. Рассмотрим понятие стабилизируемости.

Определение 8 [9, с. 34]. Линейный стационарный объект $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$, где $x \in R^n$, $u \in R^r$, называется ***стабилизируемым***, если существует закон управления $u = \mathbf{K}x$, при котором замкнутая система $\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x$ асимптотически устойчива.

Определение 9 [21, с. 89]. Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима, называемого ***невозмущенным движением***. Если на систему действует возмущение, то фактически движение, которое называется возмущенным движением, будет отличаться от невозмущенного движения. Невозмущенное движение называется ***асимптотически устойчивым***, если после окончания действия возмущения возмущенное движение $y(t)$ с течением времени стремится к невозмущенному движению $y_{\text{н}}(t)$: $y(t) \to y_{\text{н}}(t)$ при $t \to \infty.$

Способ вычисления [2, p. 130]. Уравнение $\dot{x} = \mathbf{A}x$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения $\mathbf{A}$ имеют отрицательные реальные части.

Обратим внимание, что определение 8 приведено для доступного вектора состояния. При этом стабилизация происходит в случае, когда $x(t) \to 0$ при $t \to \infty.$ Тогда возникает вопрос о возможности стабилизации системы при произвольном начальном состоянии системы $x(0) \neq 0$ по вектору выхода y и об асимптотической устойчивости (определение 9) данного объекта по вектору выхода y.

В случае рассмотрения системы с не полностью известным вектором состояния $x(t)$, т. е. $y(t) = Cx(t)$, для определения асимптотической устойчивости необходимо исходить из собственных значений матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{BKC}$ (где $\mathbf{K}$ – матрица числовых коэффициентов, определенная из закона управления $u=\mathbf{K}y$), которые должны иметь отрицательные реальные части.

Согласно [21, с. 9] целью управления управляемым объектом является поддержание заданного режима. Под заданным режимом понимается изменение какого-либо параметра, характеризующего состояние объекта управления, по определенному закону.

Но данное понятие управляемости дано в широком смысле. Если говорить применительно к модальному управлению, рассмотренному в настоящей статье, то [1, с. 299] его определяет как управление, которое изменяет моды с целью достижения целей управления, т. е. выполнение условия заданного размещения собственных чисел замкнутой системы на комплексной плоскости. Предполагается, что конструктору известно, какой набор собственных чисел желателен. При этом обязательным требованием будет условие устойчивости замкнутой системы. Методы расчета модальных регуляторов не исчерпывают всей задачи инженерного конструирования. Они лишь формализуют процедуру синтеза регулятора по заданным желаемым собственным числам замкнутой системы. На основе всей вышеприведенной информации выдвинем предположение.

Предположение. Из управляемости и наблюдаемости (согласно определениям, приведенным в этом разделе) не следует удержание объекта управления в заданном режиме. Управляемость есть не что иное, как возможность перевести объект управления из любого заданного режима в любой требуемый режим за некоторое ограниченное время, но не удержать его в этом положении.

Таким образом, в этом подразделе представлены два варианта определения управляемости систем. Один из них «упрощен» с учетом того, что рассматриваются только линейные стационарные системы. Второй вариант приведен в более широком смысле. Он может быть распространен и на нестационарные системы. Для этого было введено дополнительно понятие достижимости состояния системы. На основании вышеуказанных определений выдвинуты гипотезы об асимптотической устойчивости систем с не полностью известным вектором состояния и об удержании системы в заданном режиме. Из управляемости и наблюдаемости системы следует лишь то, что система может достичь заданного режима, но не обязана удерживаться в нем. Для проверки возможной стабилизируемости системы в заданном положении необходимо проводить проверку статики объекта. Продемонстрируем эту гипотезу на примере системы «перевернутый маятник на тележке» в третьем разделе настоящей статьи.

1.3. О ВЗАИМНОЙ ПРОСТОТЕ ПФ ОБЪЕКТА

В первых двух подразделах терминология опиралась на аппарат описания системы через пространство состояний. Однако в свете использования авторами настоящей работы аппарата модального синтеза регуляторов с использованием полиномиального матричного разложения системы, основанного на анализе МПФ системы, считаем необходимым проанализировать указанные выше понятия в свете использования ПФ объекта. Приведем понятие ПФ.

Определение 11 [2, p. 13]. ***Передаточная функция системы (звена) в изображениях Лапласа*** представляет собой преобразование Лапласа для импульсной характеристики, и наоборот: импульсная характеристика представляет собой обратное преобразование Лапласа.

Согласно [21, с. 33] ПФ определена на нулевых начальных условиях. Покажем, что взаимная простота «числителя» и «знаменателя» ПФ объекта по сути означает управляемость и наблюдаемость объекта управления. Для этого приводятся такие понятия, как BIBO-устойчивость (*bounded-input bounded-output stable*), взаимная простота двух полиномов.

BIBO-устойчивость. Как видно из определения 9, способ проверки асимптотической устойчивости определен через пространство состояний при отсутствии воздействия на систему. При использовании аппарата ПФ объекта и системы используется понятие BIBO-устойчивости. Оно определено для нулевого начального вектора состояния. При этом проверка BIBO-устойчивости осуществляется с использованием информации о ПФ объекта.

Определение 12 [2, p. 122]. Вход $u(t)$ называется ***ограниченным*** (*bounded*), если $u(t)$ не растет в направлении положительной или отрицательной бесконечности или, что эквивалентно, существует постоянная u_m такая, что $|u(t)| < u_m < \infty$ для всех $t \geq 0$. Система называется ***BIBO-устойчивой***, если каждый ограниченный вход вызывает ограниченный выход. Эта устойчивость определяется для отклика в нулевом состоянии (*zero-state response*) и применима только в том случае, если система изначально в нулевом состоянии (*в оригинале – relaxed*).

Способ проверки [2, p. 124]. Для одноканального случая. Некоторая одноканальная (SISO – *Single-Input Single-Output*) система с правильной рациональной ПФ $g(s)$ является BIBO-стабилизируемой тогда и только тогда, когда все полюса $g(s)$ имеют отрицательную действительную часть или, что эквивалентно, лежат внутри открытой левой полуплоскости s-плоскости.

Для многоканального случая [2, p. 125]. Некоторая многоканальная система с правильной рациональной ПФ $G(s) = [g_{ij}(s)]$ является BIBO-стабилизируемой тогда и только тогда, когда все полюса каждого $g_{ij}(s)$ имеют отрицательную действительную часть или, что эквивалентно, лежат внутри открытой левой полуплоскости *s*-плоскости.

Асимптотическая устойчивость определена для состояния нулевого входного отклика системы (*zero-input response*), в то время как BIBO-устойчивость определена для отклика системы с нулевым вектором состояния (*zero-state response*) [2, p. 131]. Кроме этого, способ расчета асимптотической устойчивости определен для уравнения состояния объекта, а BIBO-устойчивости – для ПФ системы.

Утверждение 3 [2, p. 192]. BIBO-устойчивость не подразумевает под собой асимптотическую устойчивость. Эти два определения идентичны только для управляемой и наблюдаемой системы (1).

Покажем, что не все BIBO-устойчивые системы являются асимптотически устойчивыми. Для этого рассмотрим систему [2, p. 126]

$$\dot{x}(t) = x(t)\,,\ y(t) = 0.5x(t) + 0.5u(t)\,.$$

Если описать эту систему в пространстве состояний, тогда $A = 1$, $B = 0$, $C = 0.5$, $D = 0.5$. Собственное число A равно единице. Так как у него положительная реальная часть, то согласно определению 9 система не является асимптотически устойчивой. Для определения BIBO-устойчивости необходимо вычислить ПФ системы:

$$G(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D = 0.5(s-1)^{-1} \cdot 0 + 0.5 = 0.5\,.$$

При этом согласно определению 11 имеем в виду рассмотрение только нулевых начальных условий, $G(s)$ не содержит полюсов. Соответственно нет условий для выполнения определения 12. Таким образом, делается заключение, что данная система является BIBO-устойчивой, несмотря на то что собственное число матрицы A положительное. То есть в случае ненулевых начальных условий система будет асимптотически неустойчивой.

Условия существования решения задачи синтеза САУ. Приведем условия существования решения синтеза САУ.

Утверждение 4 [2, p. 272; 4, с. 18]. Для существования решения синтеза САУ модальным методом PMF необходимо и достаточно, чтобы полиномы (полиномиальные матрицы для многоканального случая) ПФ объекта были взаимно простыми[3].

[3] Утверждение 4 не принимает во внимание условие правильности объекта управления. Возможен случай, когда полученный решением системы уравнений регулятор будет неправильным.

Для лучшего понимания утверждения 4 необходимо привести понятие взаимно простых полиномов и полиномиальных матриц.

Определение 13 [2, p. 187, 210; 4, с. 22]. Два полинома называются ***взаимно простыми*** (*coprime polynomials*), если их наибольший общий делитель является ненулевым числом. Для многоканального случая полиномиальные матрицы «числителя» (*numerator matrix*) и «знаменателя» (*denominator matrix*) ПФ объекта будут являться взаимно простыми, если их наибольший общий делитель – унимодулярная матрица (*unimodular matrix*), т. е. такая полиномиальная матрица, у которой определитель – число, отличное от нуля.

Утверждение 5 [2, p. 192]. Взаимная простота ПФ объекта и управляемость, наблюдаемость уравнений пространства состояния содержат по сути одинаковую информацию.

Также о влиянии вырожденности ПФ объекта на управляемость и наблюдаемость объекта указано в [14, с. 230; 22, p. 77; 23, глава 4, с. 30]. Из всего вышесказанного можно привести следующее утверждение.

Утверждение 6 [4, с. 24]. Если полиномиальное разложение МПФ объекта является взаимно простым, то такой объект является управляемым и наблюдаемым.

При этом согласно работам [2–5] для синтеза регулятора модальным методом PMF одним из необходимых требований к объекту управления является взаимная простота «числителя» и «знаменателя» ПФ объекта. То есть для применения метода PMF необходимо, чтобы объект был как управляемым, так и наблюдаемым. Для пояснения этого вывода необходимо рассмотреть задачу синтеза.

На основе задачи синтеза, приведенной в [21, с. 146], покажем задачу синтеза, которую решаем методом PMF. В настоящей работе исследуется вопрос по модальному методу решения задачи синтеза, который формируется следующим образом: задана структура системы управления (в нашем случае регулятор в прямой связи с объектом), и по заданным нулям и полюсам системы требуется определить параметры регулятора.

Кроме того, необходимо учитывать ограничение, накладываемое на выбор порядка регулятора, что равносильно ограничению на степень желаемой характеристической матрицы замкнутой системы.

Это означает невозможность его физической реализации. Кроме этого, не приводятся требования о минимальном порядке характеристического полинома (матрицы) замкнутой системы. В случае, если его порядок будет, например, ниже порядка объекта управления, решение для синтеза регулятора будет невозможно.

Для одноканального случая степень характеристического полинома замкнутой системы равна сумме порядков объекта и регулятора, если не было сокращений корней объекта и регулятора.

Для многоканального случая степень характеристической матрицы замкнутой системы определяется в зависимости от вида разложения ПФ объекта и регулятора. Приведем пример правого полиномиального разложения объекта и левого полиномиального разложения регулятора. В этом случае степень характеристической матрицы будет складываться из сумм максимальной столбцовой степени матрицы «знаменателя» объекта и строки степени матрицы «знаменателя» регулятора [4, с. 92].

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрены некоторые базовые понятия и определения ТАУ, связанные с модальным синтезом. Показаны случаи использования терминологических дубликатов, когда разные термины могут означать по сути одно и тоже. Приведен термин «неквадратный объект», который, по мнению авторов настоящей статьи, выделяет особый класс многоканальных объектов управления. Приведены несколько точек зрения к определению управляемости объекта управления. Выдвинуто предположение о стабилизируемости САУ по заданном вектору выхода y. Продемонстрирован подход, позволяющий определять управляемость и наблюдаемость системы на основе информации о ПФ объекта. Выделены необходимые и достаточные условия существования решения задачи синтеза регулятора модальным методом. В следующем разделе речь пойдет о некоторых ограничениях, накладываемых на модальный метод, использующий полиномиальное (полиномиальное матричное в многоканальном случае) разложение системы.

2. НЕКОТОРЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Говоря о применении модальных методов синтеза регуляторов, важно отметить некоторые ограничения на их применение. Одно из ограничений на применение данного метода было обозначено в первом разделе данной статьи (утверждение 4). Однако в нем говорилось об ограничениях, связанных вообще с существованием решения как такового. Существуют еще некоторые ограничения, касающиеся выбора «нулей» ПФ регулятора.

Замкнутая система должна быть BIBO-устойчивой. Приведем утверждение, касающееся BIBO-устойчивости системы.

Утверждение 6 [2, p. 284]. Требования к BIBO-устойчивости необходимо выполнять для всех возможных ПФ замкнутой системы.

То есть, другими словами, необходимо выбирать ПФ регулятора таким образом, чтобы не происходило взаимного сокращения неминимально фазовых нулей и полюсов системы (т. е. лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости). В случае если все возможные замкнутые ПФ системы BIBO-устойчивые и не происходит взаимного сокращения правых нулей с полюсами, то такая система будет называться абсолютно устойчивой (*totally stable*) [2, p. 284]. Таким образом, возможно наложение некоторых ограничений на выбор ПФ регулятора.

Особенно это актуально, когда система имеет несколько входных и (или) выходных воздействий. Далее будет продемонстрирован пример, содержащий кроме задания также и шумовую помеху. Покажем, что, несмотря на то, что ПФ замкнутой системы между выходом y и заданием r является BIBO-устойчивой, это не гарантирует, что вся система будет являться таковой. Кроме этого, продемонстрируем, что у системы, в которой происходит сокращение в ПФ неминимально фазовых нулей и полюсов, возможно появление внутренней неустойчивости (*internally unstable*)[4]. Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.

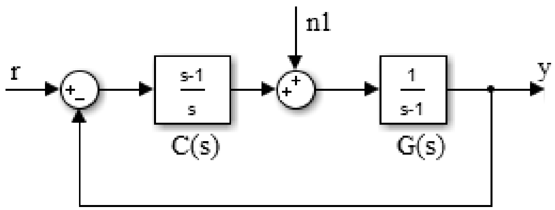

Рис. 1. Система с сокращаемыми нулями и полюсами

Fig. 1. A system with abbreviated zeros and poles

Как видно, ПФ замкнутой системы между выходом y и входом r будет равна $G_{yr}(s)=1/(s+1)$. Так как полюс $G_{yr}(s)$ имеет отрицательную действительную часть, из определения 10 видно, что данная ПФ является BIBO-устойчивой. Однако вся система не будет являться таковой, поскольку в ней присутствует сокращение неминимально фазовых нулей – полюсов системы. Так, ПФ системы между выходом y и входным воздействием $n1$ будет равна $G_{yn1}(s)=s/(s+1)(s-1)$. Данная ПФ имеет неустойчивый полюс +1, а значит,

[4] Внутренняя устойчивость (internally stable) – система внутренне устойчива, если не происходит сокращения нулей и полюсов объекта и регулятора, расположенных в правой замкнутой полуплоскости [5, с. 177].

не является BIBO-устойчивой. Это значит, что при наличии даже малого шума $n1$ выход системы y будет неустойчивым.

Примечание. Необходимо проектировать САУ таким образом, чтобы она была устойчива к некоторой вариации ее внутренних параметров, т. е. обеспечить робастность системы. Это значит, что, например, в реальности может не происходить сокращений нулей / полюсов из-за некоторой вариации параметров (рис. 1). Пусть звено из рис. 1 $C(s) = (s - 1.01)/s$, тогда $G_{yr}(s) = s(s-1)/(s^2 - 1.01)$. То есть ПФ замкнутой системы $G_{yr}(s)$, содержит полюса из правой полуплоскости комплексной плоскости, а значит, система не будет являться BIBO-устойчивой даже в случае отсутствия шумовой помехи $n1$.

В этом разделе продемонстрировано ограничение на выбор характеристической матрицы замкнутой системы, связанное с сокращением неминимально фазовых нулей / полюсов замкнутой системы. Другими словами, синтез регулятора не должен приводить к взаимному сокращению неминимально фазовых нулей / полюсов системы.

3. ПРИМЕР ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

В первом разделе настоящей статьи было выдвинуто предположение, в котором говорилось о том, что из управляемости и наблюдаемости объекта управления не следовала возможность удержания его в заданном режиме. Покажем это на примере системы «перевернутый маятник на тележке», приведенной, например, в статье [24] (рис. 2).

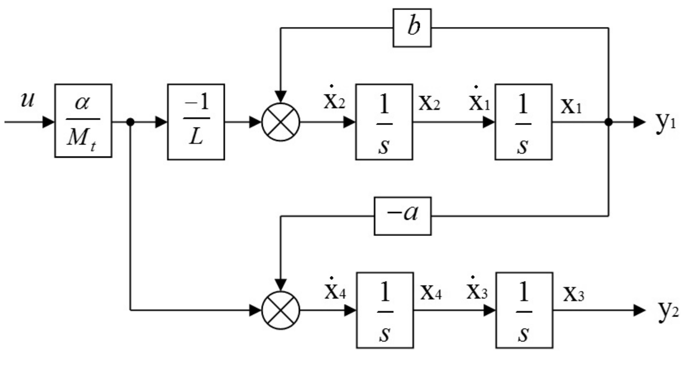

Рис. 2. Линеаризованная модель перевернутого маятника

Fig. 2. Linearized model of an inverted pendulum

Далее опишем модель объекта в пространстве состояний. Введем некоторые обозначения: y_1, y_2 – выходы модели объекта, соответствующие углу перевернутого маятника и положению тележки соответственно; x_i, $i = \overline{1,4}$ – угол и угловая скорость перевернутого маятника, а также положение и скорость тележки соответственно. Составим систему дифференциальных уравнений, описывающих данную модель:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & y_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_1 - \dfrac{\alpha}{M_t L} u, & y_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4, & \\ \dot{x}_4 = -ax_1 + \dfrac{\alpha}{M_t} u. & \end{cases}$$

Тогда описание объекта в пространстве состояний

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-\alpha}{LM_t} \\ 0 \\ \dfrac{\alpha}{M_t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем данную систему согласно терминологии, указанной в [9]. Для определения наблюдаемости и управляемости системы построим соответствующие блочные матрицы по формулам (2), (3) и рассчитаем ранг этих матриц. Получим

$$rank(\mathbf{O}) = rank\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CA}^3 \end{pmatrix}^T = 4,$$

$$rank(\Re) = rank\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{BA} & \mathbf{BA}^2 & \mathbf{BA}^3 \end{pmatrix} = 4.$$

Согласно критериям наблюдаемости и управляемости, изложенным в подразделе 1.2, система является наблюдаемой и управляемой.

Покажем управляемость и наблюдаемость объекта также с использованием знаний о МПФ объекта управления (утверждение 6). Приведем описание объекта через МПФ:

$$W_{ob}=\left[-\frac{\alpha}{M_t L(s^2-b)}\quad \frac{\alpha(Ls^2-Lb+a)}{M_t(Ls^2(s^2-b))}\right]^T .$$

Вид МПФ показывает, что объект является неквадратным, т. е. число входных каналов не равно числу выходных каналов. Разложим МПФ W_{ob} в правое матричное полиномиальное разложение:

$$W_{ob}=N_r(s)D_r^{-1}(s) ,$$

где $N_r(s)=\left(-k_1 s^2 \quad k_2(s^2+aL^{-1}-b)\right)^T$, $D_r(s)=s^2(b-s^2)$ – матрицы «числителя» и «знаменателя» МПФ объекта (в случае «знаменателя» матрица первого порядка – полином); $k_1=\alpha/M+m$, $k_2=-k_1/L$. Рассмотрим объект со следующими параметрами:

$$L=4,\quad b=5,\quad k_1=4,\quad k_2=-1,\quad a=10. \tag{4}$$

В этом случае «числитель» и «знаменатель» МПФ объекта управления будут взаимно простыми, т. е. не содержащими сокращаемых нулей/полюсов. Согласно утверждению 6 это значит, что данная система будет управляемая и наблюдаемая. Значит согласно [9, с. 19] «если объект вполне управляем, то он может быть переведен допустимым управлением из произвольного начального состояние в любое другое за конечное время». Однако из управляемости и наблюдаемости согласно выдвинутому предположению не следует удержание системы в требуемом режиме. Чтобы показать это, изучим статическую ошибку данной системы. Для этого приведем ПФ замкнутой системы из [8]:

$$W_{cl}(s)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}\dfrac{s^2(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{s^2(5s+1)}{(s+1)^5}\\[2ex] \dfrac{(10-4s^2)(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{(10-4s^2)(5s+1)}{(s+1)^5}\end{bmatrix}.$$

Она получена при условии использования параметров объекта (4) и следующей желаемой характеристической матрицы замкнутой системы

$$C_d(s) = (s+1)^5$$

и ПФ регулятора

$$W_R(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{17s+35.4}{s+5} & -\dfrac{0.5s+0.1}{s+5} \end{bmatrix}.$$

Проверим статистическую ошибку системы с учетом введенных в [8] ограничений:

$$v(t) = \begin{bmatrix} \theta_d \\ s_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1(t) \end{bmatrix},$$

где θ_d – желаемый угол перевернутого маятника; s_d – желаемое положение тележки. В представлении Лапласа

$$v(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix}.$$

Так как $y(s) = W_{cl}(s)v(s)$, то выход системы в статическом режиме можно представить следующим образом:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \lim_{s\to 0} s\,W_{cl}(s)\,v(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{10}\begin{bmatrix} \dfrac{s^2(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{s^2(5s+1)}{(s+1)^5} \\ \dfrac{(10-4s^2)(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{(10-4s^2)(5s+1)}{(s+1)^5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если отойдем от ограничений, описанных в [8], и зададим в качестве ограничений следующие:

$$v(t) = \begin{bmatrix} 1(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ тогда } v(s) = \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix},$$

то получим выход системы в статическом режиме в виде

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{10}\begin{bmatrix}\dfrac{s^2(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{s^2(5s+1)}{(s+1)^5}\\ \dfrac{(10-4s^2)(170s+354)}{(s+1)^5} & \dfrac{(10-4s^2)(5s+1)}{(s+1)^5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/s\\ 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\ 354\end{bmatrix}.$$

Как видим, выход системы не соответствует заданию. Система не отрабатывает по первому каналу. Чтобы стабилизировать угол перевернутого маятника в положении, отличном от нуля, нужно двигаться с ускорением.

Таким образом, линеаризованную систему «перевернутый маятник», представленную в данном примере, можно перевести к любому заданному режиму (положение тележки и угол перевернутого маятника), но из этого не следует возможность удерживать данную систему в нем, что и невозможно осуществить для угла перевернутого маятника, отличного от нуля. Назначение системы управления этой системой состоит в удержании объекта управления в заданном режиме с учетом ограничений, накладываемых на один из выходных параметров объекта (угол перевернутого маятника).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен синтез регуляторов для многоканальных объектов. Обозначены некоторые ограничения на применение модального метода синтеза, использующего полиномиальное матричное разложение объекта и регулятора. Показано, что в случае рассмотрения объектов, содержащих неравное количество входных и выходных каналов, появляются особенности при рассмотрении некоторых базовых понятий ТАУ. В качестве обозначения таких объектов предлагается использовать термин «неквадратный объект», употребляющийся в основном в иностранной литературе. Использование данного термина удобно для выделения особого класса многоканальных объектов, имеющих неравное количество входных и выходных каналов. Выдвинуто предположение о том, что из управляемости и наблюдаемости объекта не следует возможность его удержания в некотором заданном режиме. На примере системы «перевернутый маятник на тележке» продемонстрирована невозможность вывода системы в любой заданный режим работы (положение тележки и угол перевернутого маятника).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 2-nd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
3. *Antsaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 670 p.
4. *Бобобеков К.М., Воевода А.А., Шипагин В.И.* Полиномиальный метод синтеза систем автоматического управления для одноканальных и многоканальных объектов. – Душанбе: ТТУ им. М.С. Осими, 2021. – 192 с.
5. *Филюшов В.Ю.* Полиномиальный метод синтеза регуляторов для многоканальных объектов с неквадратной матричной передаточной функцией: дис. … канд. техн. наук. – СПб., 2022. – 177 с.
6. *Хакимова Г.Г.* Развитие терминологии как отдельной дисциплины и ее статус в современном языкознании // Вестник Башкирского университета. – 2012. – Т. 17, № 2. – С. 950–954.
7. Теория управления: терминология / Институт проблем управления; отв. ред. Б.Г. Волик. – М.: Наука, 1988. – 56 с.
8. *Воевода А.А., Шипагин В.И., Филюшов В.Ю.* Полиномиальный метод синтеза регуляторов для частного случая многоканальных объектов с одной входной переменной и несколькими выходными // Безопасность цифровых технологий. – 2021. – № 3 (102). С. 21–42. – DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42.
9. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
10. *Vidyasagar M.* Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 1. – Morgan and Claypool Publishers, 2011. – 184 p.
11. *Kailath T.* Linear systems. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980. – 350 p.
12. *Wolovich W.A.* Linear multivariable systems. – New York: Springer, 1974. – 358 p.
13. Multichannel systems of automatic control with adaptive polling channels / E.M. Antonyuk, I.E. Varshavsky, I.S. Kolpakova, P.E. Antonyuk // XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). – St. Petersburg, Russia, 2016. – P. 414–415. – DOI: 10.1109/SCM.2016.7519797.
14. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
15. *Дядик В.Ф., Байдали С.А., Криницын Н.С.* Теория автоматического управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 196 с.

16. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Ч. 3. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. – М.: Энергия, 1970. – 328 с.

17. *Мееров М.В., Литвак Б.Л.* Оптимизация систем многосвязного управления. – М.: Наука, 1972. – 344 с.

18. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 716 с.

19. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable feedback control: analysis and design. – 2nd ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2005. – 574 p.

20. *Sarma K.L.N., Chidambaram M.* Centralized PI/PID controllers for nonsquare systems with RHP zeros // Journal of the Indian Institute of Science. – 2005. – Vol. 85 (4). – P. 201–214.

21. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

22. *Albertos P., Sala A.* Multivariable control systems: an engineering approach. – London: Springer, 2004. – 340 p.

23. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции. (Основные понятия). – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.

24. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 300 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru.

Шипагин Виктор Игоревич, аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. E-mail: shipagin@mail.ru.

DOI: 10.17212/2782-2230-2022-3-26-48

On controllability and observability of multichannel automatic control systems in the synthesis by the modal method using the polynomial matrix decomposition of the object and controller*

A.A. Voevoda[1], V.I. Shipagin[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, professor of the Department of Automation. E-mail: ucit@ucit.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, graduate student of the Department of Automation. E-mail: shipagin@mail.ru*

When considering the issue of synthesis of an automatic control system by a modular method using a polynomial decomposition of the transfer functions of an object and a controller, synthesis algorithms for fully controlled systems are proposed. However, the question arises about the possibilities of using this algorithm if this condition is not met. The consideration of this issue turned out to be especially relevant for multichannel models of objects with a non-square transfer function (having an unequal number of input and output channels). It is shown that for some fundamental terms of the theory of automatic control, such as controllability, reachability, observability, stability and some others, there are special definitions of them in the case of considering this type of objects. The term non–square object is proposed for use, which is used mainly in foreign literature. Some restrictions on the modal synthesis of regulators by a method using a polynomial matrix separation of the object and the regulator are considered. Examples of internally and asymptotically unstable systems are given. A hypothesis is put forward about the stability of the controlled system. An example of a multichannel system "inverted pendulum on a cart" is considered, which is an object with a non-square matrix transfer function (in this example, the number of input actions is less than the number of output parameters). Using the static characteristics of this object, it is demonstrated that not always controlled systems can be stabilized in a given position. For example, in the case of setting the desired angle of an inverted pendulum other than zero, it is impossible to hold the position of the cart in a given coordinate. At the same time, if you set the angle at the equilibrium point as the desired angle of the inverted pendulum, then stabilization of the cart at a given coordinate becomes possible.

Keywords: modal synthesis methods, multichannel object, synthesis of multichannel controllers, polynomial matrix method, controllability, observability, stability, reachability, asymptotic stability, stability, inverted pendulum on a cart, state space

REFERENCES

1. Andreev Yu.N. *Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob"ektami* [Control of finite-dimensional linear plants]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 424 p.

2. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 2nd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

3. Antsaklis P.J., Michel A.N. *Linear systems*. New York, McGraw-Hill, 1997. 670 p.

* *Received 09 July 2022.*

4. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Shipagin V.I. *Polinomial'nyi metod sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya dlya odnokanal'nykh i mnogokanal'nykh ob"ektov* [Polynomial method for the synthesis of automatic control systems for single-channel and multi-channel objects]. Dushanbe, Tajik technical university named after academician M.S. Osimi Publ., 2021. 192 p.

5. Filyushov V.Yu. *Polinomial'nyi metod sinteza regulyatorov dlya mnogokanal'nykh ob"ektov s nekvadratnoi matrichnoi peredatochnoi funktsiei*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for synthesizing regulators for multichannel objects with a non-square matrix transfer function. PhD eng. sci. diss.]. St. Petersburg, 2022. 177 p.

6. Khakimova G.G. Razvitie terminologii kak otdel'noi distsipliny i ee status v sovremennom yazykoznanii [Development of terminology theory of as a separate discipline and its status in modern linguistics]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta = Bulletin of Bashkir University*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 950–954.

7. Volik B.G., ed. *Teoriya upravleniya: terminologiya* [Control theory. The terms]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 56 p.

8. Voevoda A.A., Shipagin V.I., Filiushov V.Yu. Polinomial'nyi metod sinteza regulyatorov dlya chastnogo sluchaya mnogokanal'-nykh ob"ektov s odnoi vkhodnoi peremennoi i neskol'kimi vykhodnymi [Polynomial method for the synthesis of regulators for the special case of multichannel objects with one input variable and several output values]. *Bezopasnost' tsifrovykh tekhnologii = Digital Technology Security*, 2021, no. 3 (102), pp. 21–42. DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42.

9. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

10. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 1. Morgan and Claypool Publishers, 2011. 184 p.

11. Kailath T. *Linear systems.* Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980. 350 p.

12. Wolovich W.A. *Linear multivariable systems*. New York, Springer, 1974. 358 p.

13. Antonyuk E.M., Varshavsky I.E., Kolpakova I.S., Antonyuk P.E. Multichannel systems of automatic control with adaptive polling channels. *XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM)*, St. Petersburg, Russia, 2016, pp. 414–415. DOI: 10.1109/SCM.2016.7519797.

14. Voronov A.A. *Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, controllability, observability]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 336 p.

15. Dyadik V.F., Baidali S.A., Krinitsyn N.S. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2011. 196 p.

16. Voronov A.A. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya*. Ch. 3. *Optimal'nye, mnogosvyaznye i adaptivnye sistemy* [Fundamentals of the theory of automatic control. Pt. 3. Optimal, multi-connected and adaptive systems]. Moscow, Energiya Publ., 1970. 328 p.

17. Meerov M.V., Litvak B.L. *Optimizatsiya sistem mnogosvyaznogo upravleniya* [Optimization of multi-link control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 344 p.

18. Bukov V.N. Vlozhenie sistem. Analiticheskii podkhod k analizu i sintezu matrich*nykh sistem* [The attachment systems. Analytical approach to analysis and synthesis of matrix systems]. Kaluga, N.F. Bochkareva Publ., 2006. 716 p.

19. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. 2nd ed. Hoboken, NJ, Wiley, 2005. 574 p.

20. Sarma K.L.N., Chidambaram M. Centralized PI/PID controllers for nonsquare systems with RHP zeros. *Journal of the Indian Institute of Science*, 2005, vol. 85 (4), pp. 201–214.

21. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.

22. Albertos P., Sala A. *Multivariable control systems: an engineering approach*. London, Springer, 2004. 340 p.

23. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii. (Osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions. (Basic concepts)]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

24. Voevoda A.A., Shoba E.V. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.

Для цитирования:

Воевода А.А., Шипагин В.И. Об управляемости и наблюдаемости многоканальных САУ при синтезе модальным методом с использованием полиномиального матричного разложения объекта и регулятора // Безопасность цифровых технологий. – 2022. – № 3 (106). – С. 26–48. – DOI: 10.17212/2782-2230-2022-3-26-48.

For citation:

Voevoda A.A., Shipagin V.I. Ob upravlyaemosti i nablyudaemosti mnogokanal'nykh SAU pri sinteze modal'nym metodom s ispol'zovaniem polinomial'nogo matrichnogo razlozheniya ob"ekta i regulyatora [On controllability and observability of multichannel automatic control systems in the synthesis by the modal method using the polynomial matrix decomposition of the object and controller]. *Bezopasnost' tsifrovykh tekhnologii = Digital Technology Security*, 2022, no. 3 (106), pp. 26–48. DOI: 10.17212/2782-2230-2022-3-26-48.