

УДК 51-74:621

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНЗИСТОРНЫХ
УПРАВЛЯЕМЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЕЙ
В РЕЖИМЕ РЕКУПЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ****А.И. Андриянов¹, Е.А. Саченко²**¹*Брянский государственный технический университет*²*ООО «НПО «Электронтехника»*

В работе предложена кусочно-гладкая математическая модель транзисторного управляемого выпрямителя, предназначенная для изучения его работы в режиме рекуперации электроэнергии. Рассматриваемая математическая модель представляет собой решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих систему автоматического управления с транзисторным управляемым выпрямителем в режиме рекуперации на участке постоянства ее структуры. Это решение может быть применено для всех участков постоянства структуры с приспособыванием при переходе от одного участка к другому. Приведены результаты моделирования временных диаграмм транзисторного управляемого выпрямителя в режиме рекуперации, которые были получены с использованием данной модели. Выполнен сравнительный анализ результатов моделирования на основе предложенной математической модели и аналогичных результатов, полученных с использованием компьютерной модели *MATLAB Simulink*. Доказаны адекватность кусочно-гладкой математической модели и ее применимость для изучения режимов работы преобразователей данного класса. Показано, что предложенная математическая модель имеет ряд преимуществ по сравнению с широко используемыми имитационными моделями, создаваемыми в средах *MATLAB Simulink*, *OrCAD* и т. п., а именно – более высокую скорость расчета и точность. Данная модель может стать основой для построения математического аппарата, предназначенного для исследования нелинейной динамики транзисторных управляемых выпрямителей и оптимальной настройки их системы управления.

Ключевые слова: транзисторный управляемый выпрямитель, рекуперация электроэнергии, динамические режимы, кусочно-гладкая математическая модель.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42

Введение

Транзисторные управляемые выпрямители (УВ) приобретают все большее распространение в современной промышленности. Их основными достоинствами являются: высокий коэффициент мощности; двунаправленная передача энергии – от питающей сети в нагрузку и наоборот; формирование синусоидальной формы входного тока питающей сети; обеспечение постоянного уровня выходного напряжения.

Наиболее перспективным свойством УВ является их способность обеспечивать рекуперацию электроэнергии в питающую сеть [1], благодаря чему они находят широкое применение на транспорте, в крановом, конвейерном и лифтовом оборудовании, а также для решения задач энергосбережения. В связи с этим возрастают требования к устойчивости и надежности системы управления УВ.

УВ относятся к классу нелинейных систем автоматического управления с импульсной модуляцией и, следовательно, склонны к хаотической динамике [2]. В работах [3–6] рассмотрены некоторые бифуркационные явления, которые могут

возникать в процессе работы УВ, подключенных к реальной питающей сети. Для изучения этих эффектов в [3–5] использовалась усредненная линейризованная модель УВ [7], которая не учитывает импульсный режим работы преобразователя. Нелинейная часть усредненной модели обусловлена только лишь наличием элементов насыщения в системе управления, например, при гистерезисном управлении [5]. Усредненная модель не может быть применена для исследования всех разновидностей бифуркационных явлений, которые могут наблюдаться в УВ, а также для анализа их нелинейной динамики.

Более широкими возможностями обладают полные динамические модели, учитывающие импульсный режим преобразователя и его динамические нелинейности. На данный момент для исследования динамики УВ используются компьютерные модели, разрабатываемые в средах имитационного моделирования *MATLAB Simulink*, *OrCAD* и т. п. Они учитывают импульсные режимы работы, но при этом расчет ведется с использованием численных методов, что позволяет достичь приемлемой точности лишь при достаточно малом шаге интегрирования. Кроме того, процесс проектирования осложняется необходимостью выбора устойчивого численного метода и его параметров для конкретной задачи. К недостаткам компьютерных моделей относится также низкая скорость расчета. Это делает затруднительным использование моделей данного класса для исследования нелинейной динамики импульсных преобразователей.

Использование кусочно-гладких моделей [2] для описания динамических режимов преобразователей с ШИМ позволяет исключить недостатки компьютерных моделей и создать специальный математический аппарат для изучения нелинейной динамики импульсных преобразователей. Кроме того, данные модели позволяют достичь высокой скорости расчета.

В рамках настоящей работы представлено описание кусочно-гладкой математической модели УВ, работающего в режиме рекуперации, а также результаты сравнительного анализа разработанной модели и компьютерной модели, созданной в *MATLAB Simulink*.

1. Разработка математической модели УВ

Наиболее часто УВ используются в составе преобразователей частоты для управления электродвигателем, которые строятся на базе УВ и автономного инвертора напряжения (АИН). Поэтому для исследования особенностей работы УВ в режиме рекуперации в схему замещения данного преобразователя необходимо включить источник энергии, которым для УВ является система «АИН – электродвигатель». Она может быть представлена в виде источника тока с конечным внутренним сопротивлением согласно [8]. На основании этого допущения схема замещения системы автоматического управления УВ может быть представлена, как на рис. 1. На рисунке приняты следующие обозначения: U_A, U_B, U_C – фазные напряжения питающей сети, L_A, L_B, L_C – индуктивности дросселей фильтра, R_A, R_B, R_C – активные сопротивления дросселей фильтра, C_Φ – емкость конденсатора фильтра, I_M – источник тока, R_I – внутреннее сопротивление источника тока, ДТ – датчики входного тока, β_H – коэффициент обратной связи по напряжению, β_T – коэффициент обратной связи по входному току, β – коэффициент усиления датчиков входного напряжения, α_H – коэффициент пропорционального регулятора напряжения, α_T – коэффициент пропорционального регулятора тока, Y – блок перемножения сигналов, УВХ – устройство выборки-хранения, ЗГ – задаю-

щий генератор, ГОН – генератор опорного напряжения, К – ШИМ-компаратор, $U_{\text{осн}}$ – сигнал обратной связи по напряжению, $U_{\text{зн}}$ – сигнал задания по напряжению, $U_{\text{ошн}}$ – сигнал ошибки по напряжению, $U_{\text{ост}} = (U_{\text{ост}A}, U_{\text{ост}B}, U_{\text{ост}C})$ – вектор сигналов обратной связи по току фаз A, B, C , $U_{\text{зт}} = (U_{\text{зт}A}, U_{\text{зт}B}, U_{\text{зт}C})$ – вектор сигналов задания на ток фаз, $U_{\text{ошт}} = (U_{\text{ошт}A}, U_{\text{ошт}B}, U_{\text{ошт}C})$ – вектор сигналов ошибки по току фаз, $U_y = (U_{yA}, U_{yB}, U_{yC})$ – вектор сигналов управления фаз, $U_{\text{зг}}$ – напряжение задающего генератора, $U_{\text{оп}}$ – опорное напряжение, $U_{\text{упр}}$ – сигналы управления транзисторами.

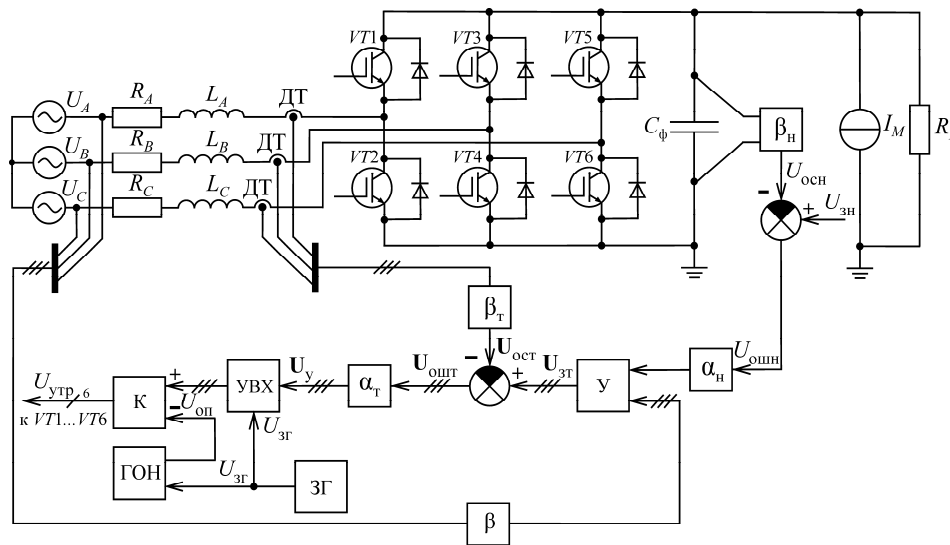


Рис. 1 – Схема замещения системы автоматического управления с УВ

Fig. 1 – Equivalent circuit of the automatic control system with a transistor controlled rectifier (TCR)

Математическая модель рассматриваемого преобразователя может быть представлена в форме системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и относится к классу кусочно-гладких моделей [2].

При составлении математической модели тактовый интервал разбивается на участки гладкости, в пределах которых работа преобразователя описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Для УВ максимально возможное число коммутаций на тактовом интервале равно четырем (с учетом коммутации в начале тактового интервала). На рис. 2 представлены участки гладкости для этого случая.

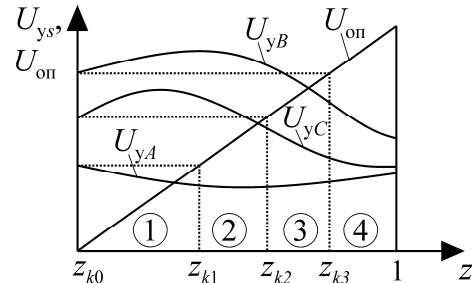
На рисунке приняты следующие обозначения: U_{ys} – сигнал управления фазы s , a – длительность тактового интервала, k – номер тактового интервала, z_{kp} – p -й момент коммутации на тактовом интервале в относительном времени.

При рассмотрении работы преобразователя на тактовом интервале удобно использовать относительное время z , которое определяется как

$$z = \frac{t - (k-1)a}{a}.$$

В пределах тактового интервала z изменяется от 0 до 1. На рис. 2 z_{k0} – начало k -го тактового интервала в относительном времени (z_{k0} всегда равно 0).

Рис. 2 – Разбиение тактового интервала УВ на участки гладкости при ШИМ-I
Fig. 2 – TCR clock period partitioning into smooth parts for PWM-I



В УВ можно выделить четыре участка гладкости.

1. Участок 1: $z_{k0} < z < z_{k1}$. На данном участке ключи нижнего плеча всех стоек УВ открыты. Комбинация открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 2, 4, 6.

2. Участок 2: $z_{k1} < z < z_{k2}$. На данном участке ключи нижнего плеча открыты в двух стойках УВ. Комбинации открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 4, 6 или 2, 3, 6 или 2, 4, 5.

3. Участок 3: $z_{k2} < z < z_{k3}$. На данном участке ключи нижнего плеча открыты в одной стойке УВ. Комбинации открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 3, 6 или 2, 3, 5 или 1, 4, 5.

4. Участок 4: $z_{k3} < z < 1$. На данном участке ключи нижнего плеча всех стоек УВ закрыты. Комбинация открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 3, 5.

Для формирования импульсов управления ключами используется ШИМ первого рода (ШИМ-I), которая наиболее часто применяется в микропроцессорных системах управления импульсными преобразователями. В ШИМ-I каждый момент коммутации определяется выборкой сигнала управления соответствующей фазы в начале тактового интервала [9].

На рис. 2 представлен частный случай, когда первый момент коммутации z_{k1} определяется сигналом управления фазы A , второй момент коммутации z_{k2} определяется сигналом управления фазы C и третий момент коммутации z_{k3} определяется сигналом управления фазы B (последовательность коммутаций: $A - C - B$). Очевидно, что в данном случае возможны шесть различных последовательностей коммутаций.

Схемы замещения силовой части УВ на каждом участке гладкости представлены на рис. 3.

Участкам 1 и 4 соответствует схема рис. 3, а. Участку 2 – схема рис. 3, б, участку 3 – схема рис. 3, в. На рисунке приняты следующие обозначения: U_j – напряжение j -й фазы ($j = 1, 2, 3$), L_j – индуктивность дросселя фильтра j -й фазы, R_j – активное сопротивление дросселя фильтра j -й фазы. Значения этих величин определяются в зависимости от комбинации открытых ключей в соответствии с табл. 1.

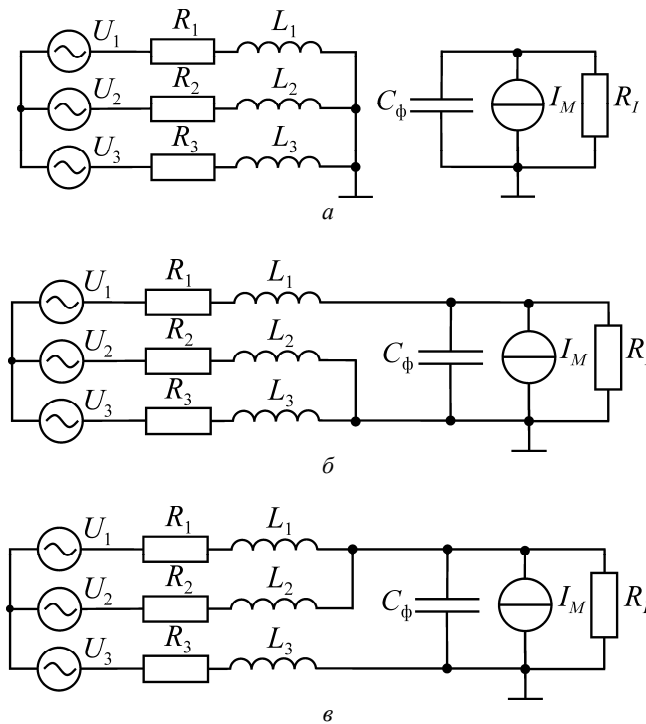


Рис.3 – Схема замещения УВ при различных комбинациях открытых ключей:

a – 1, 3, 5 или 2, 4, 6; *б* – 1, 4, 6 или 2, 3, 6 или 2, 4, 5; *в* – 1, 3, 6 или 2, 3, 5 или 1, 4, 5

Fig. 3 – TCR equivalent circuit for different combinations of the power switches in ON state:

a – 1, 3, 5 or 2, 4, 6; *b* – 1, 4, 6 or 2, 3, 6 or 2, 4, 5; *c* – 1, 3, 6 or 2, 3, 5 or 1, 4, 5

Таблица 1 / Table 1

Параметры схем замещения УВ на участках гладкости
Parameters of TCR equivalent circuit on different smooth parts

№	Номера открытых ключей	U_1	U_2	U_3	R_1	R_2	R_3	L_1	L_2	L_3	Схема замещения
1	1, 3, 5	U_A	U_B	U_C	R_A	R_B	R_C	L_A	L_B	L_C	рис. 3, <i>a</i>
2	2, 4, 6	U_A	U_B	U_C	R_A	R_B	R_C	L_A	L_B	L_C	рис. 3, <i>a</i>
3	1, 4, 6	U_A	U_B	U_C	R_A	R_B	R_C	L_A	L_B	L_C	рис. 3, <i>б</i>
4	2, 3, 6	U_B	U_A	U_C	R_B	R_A	R_C	L_B	L_A	L_C	рис. 3, <i>б</i>
5	2, 4, 5	U_C	U_A	U_B	R_C	R_A	R_B	L_C	L_A	L_B	рис. 3, <i>б</i>
6	1, 3, 6	U_A	U_B	U_C	R_A	R_B	R_C	L_A	L_B	L_C	рис. 3, <i>в</i>
7	2, 3, 5	U_B	U_C	U_A	R_B	R_C	R_A	L_B	L_C	L_A	рис. 3, <i>в</i>
8	1, 4, 5	U_A	U_C	U_B	R_A	R_C	R_B	L_A	L_C	L_B	рис. 3, <i>в</i>

Так как схемы замещения и их параметры для вариантов 1 и 2 табл. 1 одинаковы, всего можно выделить семь принципиально различных типов участка гладкости. Каждый тип участка гладкости характеризуется определенной комбинацией включенных ключей. При этом каждая схема замещения характеризует два или

три типа участка гладкости, но для каждого типа участка параметры схемы замещения индивидуальны.

На каждом участке гладкости схема замещения УВ может быть описана системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \quad (1)$$

где i – номер участка гладкости на тактовом интервале ($i = 1, 2, 3, 4$), \mathbf{A}_i – матрица постоянных коэффициентов размерности 3×3 на i -м участке гладкости, \mathbf{B} – матрица постоянных коэффициентов размерности 3×3 , постоянная для всех участков гладкости, $\mathbf{v}(t)$ – вектор вынуждающих воздействий размерности 3×1 $\mathbf{X} = (i_A, i_B, U_{c\Phi})^T$ – вектор переменных состояния.

В общем виде решение задачи Коши для системы (1) на каждом участке гладкости имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где t – текущий момент времени, t_0 – момент времени, соответствующий началу i -го участка гладкости, \mathbf{X}_{0i} – вектор начальных условий в момент перехода на i -й участок гладкости.

При анализе схем замещения участков гладкости были получены численные значения матрицы \mathbf{A}_i , \mathbf{B} и вектора $\mathbf{v}(t)$. Значения матриц \mathbf{A}_i для каждого типа участка приведены в табл. 2. В таблице используется коэффициент $N = (L_A L_B + L_B L_C + L_C L_A)^{-1}$.

Произведение $\mathbf{B}\mathbf{v}(t)$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{v}(t) = \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + B_c \mathbf{v}_c, \quad (3)$$

где \mathbf{B}_v – матрица постоянных коэффициентов размерности 3×3 ; B_c – постоянный коэффициент равный $1/C_\Phi$; $\mathbf{v}_v(t)$ – вектор гармонических вынуждающих воздействий размерности 3×1 ; \mathbf{v}_c – вектор постоянных вынуждающих воздействий размерности 3×1 .

Матрица \mathbf{B}_v определяется по выражению

$$\mathbf{B}_v = \begin{pmatrix} N(L_B + L_C) & -NL_C & -NL_B \\ -NL_C & N(L_A + L_C) & -NL_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{v}_v(t)$ определяется как

$$\mathbf{v}_v(t) = E_m (\sin(\omega t + \varphi_A), \sin(\omega t + \varphi_B), \sin(\omega t + \varphi_C))^T,$$

где E_m – амплитуда напряжения питающей сети, ω – угловая частота напряжения питающей сети, φ_A , φ_B , φ_C – углы сдвига фазных напряжений питающей сети.

Таблица 2 / Table 2

Значения матрицы A_i для различных типов участка гладкости
Matrix A_i calculation on different smooth parts

№	Номера открытых ключей	Значение A_i на i -м участке гладкости
1	1, 3, 5 или 2, 4, 6	$A_1 = A_4 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & 0 \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
2	1, 4, 6	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & -N(L_B+L_C) \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & NL_C \\ \frac{1}{C_\Phi} & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
3	2, 3, 6	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & NL_C \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & -N(L_A+L_C) \\ 0 & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
4	2, 4, 5	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_C R_B] & -N(L_C R_B-L_B R_C) & NL_B \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & NL_A \\ -\frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
5	1, 3, 6	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & -NL_B \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & -NL_A \\ \frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
6	2, 3, 5	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & N(L_B+L_C) \\ -N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_C R_A] & -NL_A \\ \frac{1}{C_\Phi} & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
7	1, 4, 5	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & -N(L_C R_B-L_B R_C) & -NL_C \\ -N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & N(L_A+L_C) \\ 0 & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$

Вектор v_c определяется по выражению

$$v_c = (0, 0, I_M)^T,$$

где I_M – ток источника тока в схеме замещения АИН с электродвигателем.

После подстановки выражения (3) в (2) решение системы (1) может быть представлено в виде

$$X(t) = e^{A_i(t-t_0)} X_{0i} + e^{A_i(t-t_0)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) d\tau + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} B_c \mathbf{v}_c d\tau \right) = \\ & = e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \Psi_1(t) + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \Psi_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Векторная функция $\Psi_1(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) = & - \left(\mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \times \right. \\ & \left. \times \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности 3×3 , $\hat{\mathbf{v}}_v(t)$ – вектор гармонических функций размерности 3×1 вида

$$\hat{\mathbf{v}}_v(t) = E_m \left(\cos(\omega t + \varphi_A), \cos(\omega t + \varphi_B), \cos(\omega t + \varphi_C) \right)^T.$$

Векторная функция $\Psi_2(t)$ имеет вид

$$\Psi_2(t) = \mathbf{A}_i^{-1} \left(\mathbf{E} - e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \right) B_c \mathbf{v}_c. \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в (4) и получим решение системы (1) в конечном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} - e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \left(\mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \times \right. \\ & \left. \times \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right] + \\ & + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{A}_i^{-1} \left(\mathbf{E} - e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \right) B_c \mathbf{v}_c = \\ = & e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} - \left(\mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \right. \\ & \left. - e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right] + \mathbf{A}_i^{-1} \left(e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} - \mathbf{E} \right) B_c \mathbf{v}_c. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение (7) на i -м участке гладкости k -го тактового интервала в относительном времени имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = & e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} \mathbf{X}_{0ki} - \left(\mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(z) \right) - e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} \left(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(z_{k(i-1)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(z_{k(i-1)}) \right) \right] + \mathbf{A}_i^{-1} \left(e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} - \mathbf{E} \right) B_c \mathbf{v}_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{X}_{0ki} – вектор переменных состояния в начале i -го участка гладкости k -го тактового интервала, а векторы $\mathbf{v}_v(z)$ и $\hat{\mathbf{v}}_v(z)$ определяются из выражений:

$$\mathbf{v}_v(z) = E_m \begin{pmatrix} \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_A) \\ \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_B) \\ \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_C) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{v}}_v(z) = E_m \begin{pmatrix} \cos(\omega(z+k-1)a + \varphi_A) \\ \cos(\omega(z+k-1)a + \varphi_B) \\ \cos(\omega(z+k-1)a + \varphi_C) \end{pmatrix}.$$

Как упоминалось ранее, в данном случае рассматривается система управления с ШИМ-I, где значения моментов коммутации z_{k1} , z_{k2} , z_{k3} определяются значениями компонент вектора сигналов управления \mathbf{U}_y (рис. 1) в моменты z_{k0} .

Определим компоненты вектора \mathbf{U}_y в начале k -го тактового интервала.

Сигнал управления фазы A в начале k -го тактового интервала определяется как

$$\begin{aligned} U_{yA}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\Phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_A) - \beta_T i_A(z_{k0}) \right] = \\ &= \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_A) - \beta_T \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_{0k1} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{C}_1 = (0, 0, 1)^T$, $\mathbf{C}_2 = (1, 0, 0)^T$ – векторы постоянных коэффициентов, определяющие элементы вектора начальных условий в начале тактового интервала \mathbf{X}_{0k1} , которые используются в (9).

Аналогично определяются сигналы управления фаз B и C в момент z_{k0} :

$$\begin{aligned} U_{yB}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\Phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_B) - \beta_T i_B(z_{k0}) \right] = \\ &= \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_B) - \beta_T \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_{0k1} \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U_{yC}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\Phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_C) - \beta_T i_C(z_{k0}) \right] = \alpha_T \left[\alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \varphi_C) + \beta_T (\mathbf{C}_2 \mathbf{X}_{0k1} + \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_{0k1}) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{C}_3 = (0, 1, 0)^T$ – вектор постоянных коэффициентов, определяющий второй элемент вектора \mathbf{X}_{0k1} , который участвует в выражениях (10) и (11).

Относительный момент коммутации фазы s (z_{ks}) определяется из следующего уравнения

$$U_{ys}(z_{k0}, k) = U_{оп}(z_{ks}), \quad (12)$$

где $s = A, B, C$. При двухполярном пилообразном сигнале ГОН $U_{оп}(z) = 2U_{опm}(z-1)$, где $U_{опm}$ – амплитуда опорного напряжения. В этом случае моменты коммутации z_{ks} могут быть выражены из (12) в следующем виде

$$z_{ks} = U_{ys}(z_{k0}, k) / (2U_{опm}) + 0,5, \quad (13)$$

Подставляя выражения (9), (10) и (11) в (13), определяем относительные моменты коммутации ключей стоек, соответствующих фазам A , B , C на тактовом интервале (z_{kA} , z_{kB} , z_{kC} соответственно). Сравнивая полученные значения между собой, устанавливаем последовательность коммутации ключей стоек, т.е. определяем z_{k1} , z_{k2} , z_{k3} . Последовательность коммутаций однозначно определяет набор значений матриц A_i на тактовом интервале, используемых при расчете переходных процессов (табл. 3).

После определения набора матриц A_i вычисление решения задачи Коши на тактовом интервале выполняется по формуле (8) с приспособыванием при переходе от участка к участку.

Таблица 3 / Table 3

Набор матриц A_i на тактовом интервале в зависимости от последовательности коммутации ключей
The set of matrices A_i on a clock period for different commutation sequences of the power switches

№	Моменты коммутации			Матрицы A_i			
	z_{k1}	z_{k2}	z_{k3}	A_1	A_2	A_3	A_4
1	z_{kA}	z_{kB}	z_{kC}	1	2	5	1
2	z_{kB}	z_{kA}	z_{kC}	1	3	5	1
3	z_{kA}	z_{kC}	z_{kB}	1	2	7	1
4	z_{kB}	z_{kC}	z_{kA}	1	3	6	1
5	z_{kC}	z_{kA}	z_{kB}	1	4	7	1
6	z_{kC}	z_{kB}	z_{kA}	1	4	6	1

3. Моделирование процессов рекуперации в УВ с использованием кусочно-гладкой математической модели

Для оценки адекватности разработанной математической модели было выполнено моделирование УВ в режиме рекуперации с использованием кусочно-гладкой модели при ее программной реализации на встроенном языке *MATLAB* и с использованием компьютерной модели основанной на применении численных методов и реализованной в среде имитационного моделирования *Simulink*, которая входит в пакет прикладных программ *MATLAB*. При этом рассматривался следующий набор параметров: $E_m = 311$ В; $\omega = 628,32$ рад/с; $\varphi_A = 0$ рад; $\varphi_B = -2\pi/3$ рад; $\varphi_C = 2\pi/3$ рад; $R_A = R_B = R_C = 0,1$ Ом; $L_A = L_B = L_C = 5$ мГн; $C_\phi = 47$ мкФ; $I_M = 15$ А; $R_I = 1$ МОм; $\beta_T = 1$; $\beta = 0,00322$; $\beta_H = 0,018$; $\alpha_H = 6$; $\alpha_T = 0,5$; $\mathbf{X}_0 = (0, 0, 0)^T$; $U_{опт} = 10$ В; $a = 200$ мкс; ограничения коэффициента заполнения на тактовом интервале: $\gamma_{\min} = 0,05$ и $\gamma_{\max} = 0,95$. Для оценки реакции УВ как нелинейной системы на изменение одного из параметров системы управления моделирование осуществлялось при двух разных значениях напряжения задания $U_{зн}$: 5 и 2 В. При этом среднее значение выходного напряжения на конденсаторе фильтра $U_{сф, ср}$ в установившемся режиме составило соответственно 665 и 585 В.

Для моделирования в *MATLAB Simulink* были заданы следующие параметры расчета: обобщенный численный метод для расчета дискретных систем

(discrete (no continuous state)) с фиксированным шагом интегрирования [10]; шаг интегрирования: 10^{-6} с. Моделирование с использованием математической модели выполнялось при числе точек на тактовом интервале равном 200, что соответствует шагу интегрирования, заданному в *MATLAB Simulink*.

На рис. 4 приведены результаты сравнительного моделирования при $U_{c\phi, cp} = 665$ В.

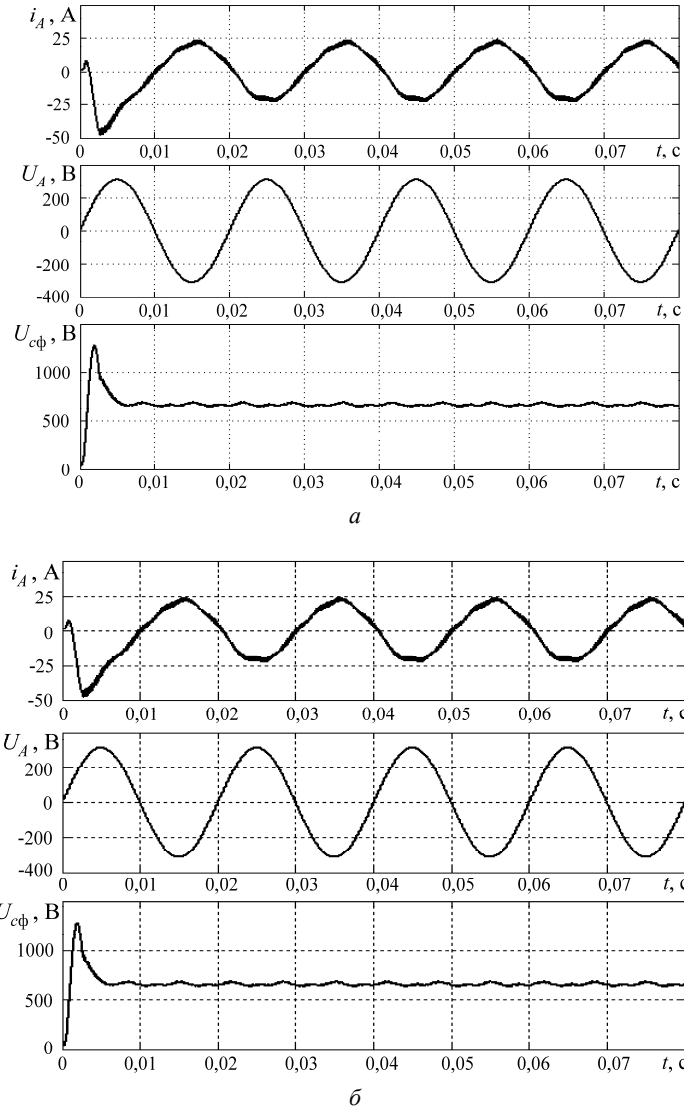


Рис. 4 – Временные диаграммы i_A , U_A , $U_{c\phi}$ при $U_{c\phi, cp} = 665$ В, полученные с использованием:

a – компьютерной модели *MATLAB Simulink*; b – математической модели

Fig. 4 – Waveforms i_A , U_A , $U_{c\phi}$ for $U_{c\phi, cp} = 665$ V constructed using:

a – *MATLAB Simulink* computer model; b – the mathematical model

Как видно из рисунка, перерегулирование напряжения на конденсаторе $U_{сф}$ составляет порядка 200 %, однако его значение может быть уменьшено с использованием задатчика интенсивности $U_{зн}$. По окончании переходного процесса в системе присутствуют малоамплитудные колебания напряжения на конденсаторе, при этом основная часть энергии паразитных гармонических составляющих сосредоточена в гармониках, кратных частоте сетевого напряжения. Форма тока сети имеет практически синусоидальную форму с наличием незначительных искажений.

При использовании ЭВМ на основе процессора *Intel Core i5-4200M* 2,5 ГГц время расчета диаграмм, представленных на рис. 4, для модели *MATLAB Simulink* составило 21 с, для математической модели – 10,2 с. Также стоит отметить, что снижение количества точек для расчета на тактовом интервале при использовании кусочно-гладкой математической модели не влияет на точность расчета фазовых переменных в каждой точке. Следовательно, выбранное количество точек, равное 200, в данном случае может быть избыточным и его снижение еще больше увеличит скорость расчета модели без потери точности. Снижение же количества точек на тактовом интервале при использовании численных методов в *MATLAB Simulink* ведет к уменьшению точности, что недопустимо. Вместе с тем при использовании численных методов ошибка интегрирования имеет тенденцию к накоплению с течением времени, что существенно меньше выражено при использовании кусочно-гладких моделей.

На рис. 5 приведены временные диаграммы абсолютных отклонений i_A и $U_{сф}$ (Δi_A и $\Delta U_{сф}$ соответственно) при сравнении результатов, полученных с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*.

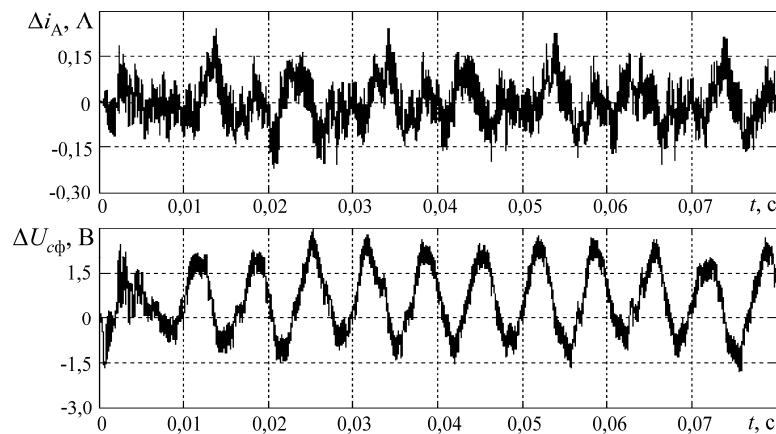


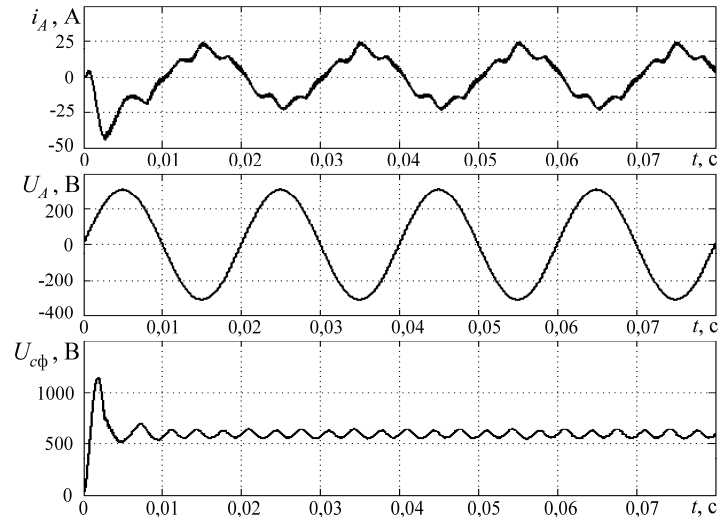
Рис. 5 – Временные диаграммы Δi_A , $\Delta U_{сф}$ при $U_{сф, ср} = 665$ В для сравнения результатов моделирования с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*

Fig. 5 – Waveforms Δi_A , $\Delta U_{сф}$ for $U_{сф, ср} = 665$ V constructed for comparison of simulation results of the mathematical model and *MATLAB Simulink* computer model

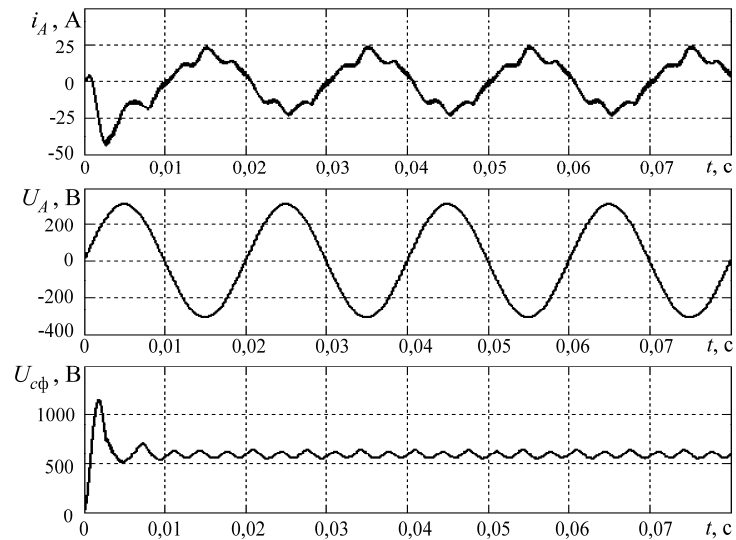
Из рисунка видно, что пиковые отклонения i_A и $U_{сф}$ на выбранном интервале расчета составляют: $\Delta i_{A \max} = 0,25$ А; $\Delta U_{сф \max} = 2,96$ В (1,25 и 0,5 % соответ-

ственно, в относительном выражении). Данные отклонения пренебрежимо малы по сравнению с мгновенными значениями соответствующих сигналов.

На рис. 6 приведены результаты сравнительного моделирования при $U_{cф, ср} = 585$ В.



а



б

Рис. 6 – Временные диаграммы i_A , U_A , $U_{cф}$ при $U_{cф, ср} = 585$ В, полученные с использованием:

а – компьютерной модели MATLAB Simulink; б – математической модели

Fig. 6 – Waveforms Δi_A , $\Delta U_{cф}$ for $U_{cф, ср} = 585$ V constructed for comparison of simulation results of MATLAB Simulink computer model (a) and the mathematical model (b)

Как видно из рисунка, при снижении $U_{\text{зн}}$ в системе появляются колебания напряжения на конденсаторе с большой амплитудой, кратные частоте питающей сети. Они обусловлены эффектом перемодуляции, возникающим вследствие насыщения в системе управления. В этом случае сигнал управления U_y на некоторых тактовых интервалах будет выходить за границы пилообразного опорного напряжения $U_{\text{оп}}$. При этом коэффициент заполнения на этих тактовых интервалах будет ограничиваться на уровне γ_{min} или γ_{max} . Наблюдаемый режим работы является устойчивым, при этом форма фазных токов существенно отличается от синусоидальной. Как видно из рис. 6, в токе сети присутствует гармоника с частотой 300 Гц. Время расчета данных временных диаграмм для модели *MATLAB Simulink* составило 22 с, для математической модели – 10,5 с.

На рис. 7 приведены временные диаграммы Δi_A , $\Delta U_{\text{сф}}$ при $U_{\text{сф, ср}} = 585$ В. Пиковые абсолютные отклонения i_A и $U_{\text{сф}}$ на выбранном интервале расчета также пренебрежимо малы и составляют: $\Delta i_{A\text{max}} = 0,2$ А, $\Delta U_{\text{сфmax}} = 2,8$ В (1,5 и 0,5 % соответственно, в относительном выражении).

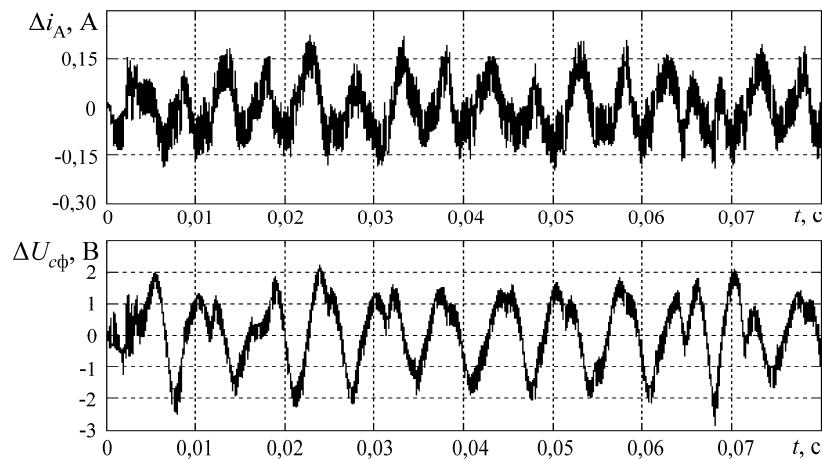


Рис. 7 – Временные диаграммы Δi_A , $\Delta U_{\text{сф}}$ при $U_{\text{сф, ср}} = 585$ В

для сравнения результатов моделирования с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*

Fig. 7 – Waveforms Δi_A , $\Delta U_{\text{сф}}$ for $U_{\text{сф, ср}} = 585$ V constructed for comparison of simulation results of the mathematical model and *MATLAB Simulink* computer model

Представленные результаты показывают, что разработанная математическая модель достоверно отображает процессы в УВ в режиме рекуперации и обеспечивает более высокую скорость расчета по сравнению с *MATLAB Simulink*. При одном и том же шаге интегрирования время расчета временных зависимостей на основе математической модели приблизительно в два раза меньше. Разработанная модель исключает проблему выбора устойчивого численного метода, которая характерна для моделей *MATLAB Simulink* при попытках получить достоверные временные зависимости.

Заключение

1. Предложена кусочно-гладкая математическая модель УВ, имеющая преимущества по скорости расчета перед компьютерными моделями.

2. На основе предложенной математической модели может быть разработан специализированный математический аппарат для бифуркационного анализа УВ в режиме рекуперации и решения задач параметрического синтеза системы управления.

3. Рассмотренная математическая модель может быть легко модифицирована для исследования УВ с системами управления на основе более сложных типов регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. PWM regenerative rectifiers: state of the art / J.R. Rodriguez, J.W. Dixon, J.R. Espinoza, J. Pontt, P. Lezana // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2005. – Vol. 52, N 1. – P. 5–22.
2. Нелинейная динамика полупроводниковых преобразователей / А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко, А.И. Андриянов, С.Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТУСУР, 2007. – 224 с.
3. Low-frequency Hopf bifurcation and its effects on stability margin in three-phase PFC power supplies connected to non-ideal power grid / M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, C. Wan, X. Ruan // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2013. – Vol. 60, N 12. – P. 3328–3340.
4. Interacting bifurcation phenomenon in three-phase voltage source converter connected to non-ideal power grid / M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, X. Ruan, C. Wan // IECON 2013 – 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. – Vienna, Austria, 2013. – P. 8373–8378.
5. Nonlinear behavior and instability in a three-phase boost rectifier connected to a nonideal power grid with an interacting load / C. Wan, M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, X. Ruan // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2013. – Vol. 28, N 7. – P. 3255–3265.
6. **Zoltan S.** Nonlinear phenomena of controlled three-phase converters: PhD dissertation / Budapest University of Technology and Economics. – Budapest, 2007. – 107 p.
7. **Jian S.** Small-signal methods for AC distributed power systems – a review // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2009. – Vol. 24, N 11. – P. 2545–2554.
8. **Blasko V.** Power conditions and control of regenerative brake // Conference record of the 1998 IEEE Industry Applications Conference: Thirty-Third IAS Annual Meeting. – St. Louis, Missouri, USA, 1998. – Vol. 2. – P. 1504–1510.
9. **Жусубалиев Ж.Т.** Бифуркации и хаос в релейных и широтно-импульсных системах автоматического управления. – М.: Машиностроение-1, 2001. – 120 с.
10. **Солонина А.И.** Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Simulink. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.

A MATHEMATICAL MODEL OF TRANSISTOR CONTROLLED RECTIFIERS IN THE ELECTRIC POWER REGENERATION MODE

Andriyanov A.I.¹, Sachenko E.A.²

¹*Bryansk State Technical University, Bryansk, Russia*

²*NPO “Electrontechnika”, Ltd, Bryansk, Russia*

At present, transistor controlled rectifiers in the electric power regeneration mode are widely used in the electronic power supply industry and are integrated with cranes, conveyor equipment, transport units, etc. One of the most significant issues of the synthesis of transistor controlled rectifier automatic control systems is the absence of adequate mathematical tools for a full description of the considered converter behavior and particularly its nonlinear dynamics. Actually, the most common research and development tool for a switching power converter is its computer model that is implemented with the help of different CAD-systems, such as *MATLAB Simulink*,

OrCAD, etc. However, computer models exhibit a low calculation speed and are hard to utilize for bifurcation analysis of switching converters due to the problem of selecting a proper numerical method providing their stable operation.

It is known that switching power converters are most accurately described by means of piecewise-smooth models. In this paper a piecewise-smooth mathematical model of a transistor controlled rectifier in the regeneration mode is presented. The simulation results of transistor controlled rectifier operation based on the considered model are also shown in the paper. The proposed piecewise-smooth model validity and its applicability for the study of transistor controlled rectifier operation modes are demonstrated. The advantages of the proposed model over widely used computer models are also described.

This model can be utilized to form the basis of mathematical tools for studying non-linear dynamics of transistor controlled rectifiers and to adjust their control system in the optimal way.

Keywords: transistor controlled rectifier; electric power regeneration; dynamic modes; piecewise-smooth mathematical model.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42

REFERENCES

1. Rodriguez J.R., Dixon J.W., Espinoza J.R., Pontt J., Lezana P. PWM regenerative rectifiers: state of the art. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, vol. 52, no. 1, pp. 5–22.
2. Kobzev A.V., Mikhal'chenko G.Ya., Andriyanov A.I., Mikhal'chenko S.G. *Nelineinaya dinamika poluprovodnikovyykh preobrazovatelei* [Nonlinear dynamics of semiconductor converters]. Tomsk, TUSUR Publ., 2007. 224 p.
3. Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Wan C., Ruan X. Low-frequency Hopf bifurcation and its effects on stability margin in three-phase PFC power supplies connected to non-ideal power grid. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, vol. 60, no. 12, pp. 3328–3340.
4. Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Ruan X., Wan C. Interacting bifurcation phenomenon in three-phase voltage source converter connected to non-ideal power grid. *IECON 2013 – 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Vienna, Austria, 2013, pp. 8373–8378.
5. Wan C., Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Ruan X. Nonlinear behavior and instability in a three-phase boost rectifier connected to a nonideal power grid with an interacting load. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2013, vol. 28, no. 7, pp. 3255–3265.
6. Zoltan S. *Nonlinear phenomena of controlled three-phase converters*. PhD diss. Budapest University of Technology and Economics. Budapest, 2007. 107 p.
7. Jian S. Small-signal methods for AC distributed power systems – a review. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, vol. 24, no. 11, pp. 2545–2554.
8. Blasko V. Power conditions and control of regenerative brake. *Conference record of the 1998 IEEE Industry Applications Conference: Thirty-Third IAS Annual Meeting*, St. Louis, Missouri, USA, 1998, vol. 2, pp. 1504–1510.
9. Zhusubaliev Zh.T. *Bifurkatsii i khaos v releinykh i shirotno-impul'snykh sistemakh avtomaticheskogo upravleniya* [Bifurcations and chaos in relay and pulse-width modulation automatic control systems]. Moscow, Mashinostroenie-1 Publ., 2001. 120 p.
10. Solonina A.I. *Tsifrovaya obrabotka signalov. Modelirovanie v Simulink* [Digital signal processing. Simulation in Simulink]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2012. 432 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Андрьянов Алексей Иванович – родился в 1979 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Электронные, радиоэлектронные и электротехнические системы», Брянский государственный технический университет. Область научных интересов: нелинейная динамика импульсных преобразователей. Опубликовано 100 научных работ. (Адрес: 241035, Россия, Брянск, бул. 50 лет октября, д. 7. Email: mail@ahaos.ru).

Andriyanov Alexey Ivanovitch (b. 1979) – PhD (Eng.), Associate professor, Associate professor of the dep. of Electronic, Radioelectronic and Electrotechnical Systems, Bryansk State Technical University. His research interests are currently focused on nonlinear dynamics of switching converters. He is the author of 100 scientific papers. (Address: 7, bul. 50-letiya Oktyabrya, Bryansk, 241035, Russian Federation. Email: mail@ahaos.ru).



Саченко Екатерина Алексеевна – родилась в 1987 году, инженер, ООО «НПО «Электронтехника», аспирант кафедры «Электронные, радиоэлектронные и электротехнические системы» Брянского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика импульсных преобразователей. Опубликовано 6 научных работ. (Адрес: 241031, Россия, Брянск, бул. Щорса, д. 1. Email: kittie-kat@yandex.ru).

Sachenko Ekaterina Alexeevna (b. 1987) – development engineer of ООО 'NPO 'Electrontechnica', postgraduate student of the dep. of Electronic, Radioelectronic and Electrotechnical Systems, Bryansk State Technical University. Her research interests are currently focused on nonlinear dynamics of switching converters. She is the author of 6 scientific papers. (Address: 1, bul. Shchorsa, Bryansk, 241031, Russia. Email: kittie-kat@yandex.ru).

Статья поступила 01 апреля 2016 г.

Received April 01, 2016

To Reference:

Andriyanov A.I., Sachenko E.A. Matematicheskaya model' tranzistornykh upravlyaemykh выпрямителей в режиме рекуперации электроэнергии [Mathematical model of transistor controlled rectifiers in electric power regeneration mode]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 26–42. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42