

УДК 519.633.2

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ****Н.Б. Иткина, С.И. Марков***Новосибирский государственный технический университет*

Математическое моделирование течения газов необходимо на этапе проектирования летательных аппаратов, освоения новых нефтегазовых месторождений и для реализации сложных систем транспортировки энергетического сырья до потребителей. Возникает проблема прогнозирования безотказных и эффективных режимов функционирования технологического оборудования и, как следствие, необходимость в оценке влияния техногенных воздействий на окружающую среду при эксплуатации данного оборудования. Применение математического моделирования позволяет эффективно решать данный класс инженерных задач. Однако при математическом моделировании процесса течения газов для большинства классических вычислительных схем характерно наличие вычислительной неустойчивости, обусловленной преобладанием конвективного переноса (при достаточном большом значении числа Пекле). Поэтому метод решения должен быть естественным образом адаптируемым к параметрам математической модели и отражать сложную структуру процесса. В данной работе приводятся оригинальная вычислительная схема стабилизированного векторного метода конечных элементов в трехмерной постановке, результаты математического моделирования течения газов, рекомендации по технологии выбора стабилизирующих параметров вычислительной схемы. Впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства Неделека, что позволяет выполнить условие Ладыженской–Бабушки–Бреци при использовании базисов первого порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей.

Ключевые слова: течение газов, система уравнений Навье–Стокса, стабилизированный векторный метод конечных элементов.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67

Введение

Задача математического моделирования течения газов является фундаментальной для многих инженерных приложений и достаточно хорошо освещена в литературе [5, 14]. Кроме того, для некоторых частных случаев постановки данной проблемы в средах с простой геометрией существуют аналитические решения [14].

Однако современные прикладные задачи в любой области отличаются многомасштабностью как геометрической (с точки зрения наличия включений разного масштаба), так и физической (контрастность физических характеристик среды). Данная особенность естественным образом приводит к усложнению используемого математического аппарата и вычислительных методов.

Современные вычислительные методы отличаются высоким уровнем сложности и адаптивности к конкретному классу прикладных задач. Данное свойство повышает эффективность применения методов для инженерных расчетов по сравнению с классическими стандартными подходами, такими как классический метод конечных элементов или метод конечных разностей.

При финансовой поддержке «Грант президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации».

Необходимо отметить, что для решения широкого круга физических задач существует множество специальных программных продуктов, таких как ANSYS, StarCD, CalculiX и пр. Данные программные комплексы предоставляют широкие возможности для моделирования сложных и сопряженных физических процессов, однако имеют закрытую от пользователя реализацию. Практически это означает, что пользователь не имеет возможности адаптировать вычислительную схему с точки зрения выбора вариационной постановки, построения специфических функций формы или учета функциональной многомасштабности. В результате это отрицательно сказывается на возможности адаптации данных программных продуктов к решению нестандартных проблем.

В качестве примера можно привести не имеющую аналитического решения задачу о течении газа в областях с L-shape конфигурацией (или с наличием острых кромок). При численном моделировании возможно появление нефизических осцилляций решения, что естественно требует специальных мер, таких как сгущение конечноэлементной сетки в районах острых кромок, повышения порядка аппроксимирующих базисных функций или применение специальных стабилизирующих вычислительных схем. Вопрос выбора пути решения описанной проблемы снимается сразу, когда принципиально важно получить результат за ограниченное время. Практически стабилизированные вычислительные схемы позволяют получить физически релевантное решение задачи на более грубых сетках и без повышения порядка аппроксимирующих базисных функций, что значительно снижает вычислительные затраты.

Кроме того, поскольку моделирование процесса течения газов базируется на решении системы уравнений Навье–Стокса, то существует естественная математическая сложность решения данной задачи. Для существования единственного решения системы уравнений Навье–Стокса выбор функциональных пространств для поля давления и поля скоростей должен удовлетворять условию Ладыженской–Бабушки–Бреци.

Фундаментальные исследования по проблеме моделирования течений газов можно найти в работах Kralik, Stiegler, Vostry, Zavorka [5]. В работах [1–4] приводится анализ существующих вычислительных схем на базе стабилизированных конечноэлементных методов. Однако большинство научных публикаций носит теоретический характер и не содержит информации о выборе стабилизирующих параметров при решении прикладных задач.

В данной работе предлагается оригинальная вычислительная схема стабилизированного векторного метода конечных элементов на базе SUPG-схемы (противопотоковая схема Петрова–Галеркина). Процесс течения газов моделируется путем численного решения системы уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке на тетраэдральных сетках с использованием специальных базисов функциональных пространств. Впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства Неделека, что позволяет автоматически выполнить условие неразрывности и условие Ладыженской–Бабушки–Бреци при использовании базисов первого порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей. Приводятся результаты математического моделирования течения газов и рекомендации по технологии выбора стабилизирующих параметров вычислительной схемы в зависимости от сеточного числа Пекле.

1. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается задача о течении несжимаемого газа в трубе Ω диаметром $l = 1,4$ м и с твердыми стенками. В начальный момент времени газ покоился. Движение газа задается перепадом давления на концах трубы Γ_1 и Γ_2 . Расчетная область представлена на рис. 1. Определить скорость газа вдоль границы S .

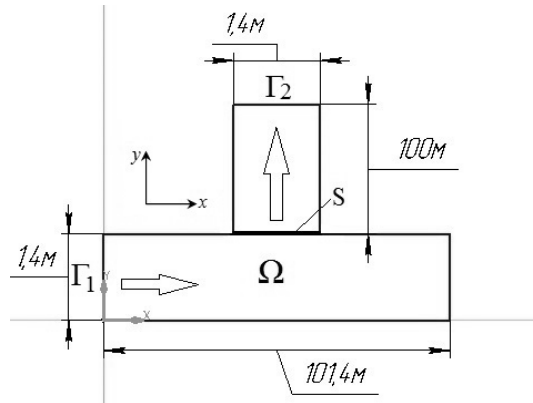


Рис. 1 – Расчетная область

Fig. 1 – Computational domain

Течение несжимаемого газа в $\Omega \in R^3$ описывается системой уравнений Навье–Стокса, которая состоит из уравнения движения и уравнения неразрывности [4]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

с начальными условиями, соответствующими покоящемуся газу,

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

и краевыми условиями для скорости и давления

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (3)$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_1, \quad p|_{\Gamma_2} = p_2,$$

где \mathbf{u} , м/с – скорость течения газа; p , Па – давление газа, \mathbf{n} – нормальный вектор; μ , Па·с – коэффициент вязкости газа; ρ , кг/м³ – плотность вещества.

2. Вариационная постановка

Решением задачи (1) будем называть пару (\mathbf{u}, p) , где $\mathbf{u} \in V(\Omega)$, $p \in P(\Omega)$,

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}, \quad (4)$$

$$P(\Omega) = \{ q \mid q \in L_2(\Omega) \}.$$

Аппроксимируем производную по времени в уравнении (1) и запишем

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j}{h_t} + \gamma(\mathbf{u}_{j+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_{j+1} \right) = -\nabla p_{j+1} + \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{u}_{j+1}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{j+1} = 0.$$

Тогда дискретная вариационная постановка задачи (5) имеет вид [1]: найти такие $\mathbf{u}^h \in V^h(\Omega)$, $p^h \in P^h(\Omega)$, что $\forall \mathbf{v}^h \in V^h(\Omega)$, $\forall q^h \in P^h(\Omega)$ выполнялось

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^h : \nabla \mathbf{v}^h d\Omega + \frac{\rho}{h_t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \rho \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} (p^h \nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega, \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) q^h d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{F} = \frac{\rho}{h_t} \mathbf{u}_j$, j – предыдущий временной слой. Или в виде билинейных форм

$$\begin{aligned} & \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \frac{\rho}{h_t} (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \rho(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_h = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_h, \\ & \frac{\rho}{h_t} (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Стабилизированный векторный метод конечных элементов

Стабилизированные конечноэлементные методы формируются на основе стандартного метода конечных элементов с добавлением специальных стабилизирующих операторов. Применение данных операторов обусловлено возникновением нефизичных осцилляций решения при использовании конечноэлементной дискретизации задач с преобладающим конвективным переносом. Данный подход рассмотрен в работах L.P. France, F. Brezzi, J. Douglas [2, 3, 6].

Обсудим необходимость применения стабилизированных методов на примере задачи конвекции-диффузии

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \text{ в } \Omega \in R^3, \\ & u|_{\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{a} – скорость конвекции, u – решение задачи, λ – коэффициент диффузии.

Вариационная формулировка задачи (8): найти $u \in H_0^1(\Omega)$, чтобы $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(\lambda \nabla u, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u, v) = (f, v) \text{ в } \Omega \in R^3. \quad (9)$$

Положим в (10) $v = u$ и, применив соотношение Пуанкаре–Фридрихса и неравенство Коши–Шварца, получим оценку

$$\lambda C \|u\|_1^2 \leq k \|\nabla u\|^2 = (f, u) \leq \|f\| \|u\| \leq \|f\| \|u\|_1, \quad \|u\|_1 \leq \frac{1}{\lambda C} \|f\|. \quad (10)$$

Оценка (10) в пространстве $L_2(\Omega)$ с нормой $\|u\|_1$ определяет основную проблему задачи (8): для малых значений параметра λ малое изменение входных данных f приводит к большому изменению решения u . Это означает, что при большом значении числа Пекле (критерия Пекле)

$$\text{Pe} = h \frac{\|\mathbf{a}\|}{\lambda}, \quad (11)$$

где h – диаметр сферы, описанной вокруг конечного элемента, возможно появление нефизичных осцилляций численного решения задачи (8). Новая вариационная формулировка задачи (8) имеет вид [1]: найти $u \in H_0^1(\Omega)$, чтобы $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(\lambda \nabla u, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u, v) + \sum_K \tau_K (-\lambda \nabla u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v) = (f, v) \text{ в } \Omega \in R^3, \quad (13)$$

где K – конечный элемент.

Для системы уравнений Навье–Стокса стабилизированную схему SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin Method) можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} & \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \frac{\rho}{h_t} (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \rho(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_h + \\ & + \sum_K \tau_K (\nabla p - \mathbf{F}, \nabla \mathbf{v})_h + \sum_K \tau_K (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F}, \nabla \mathbf{v})_h = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_h, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\rho}{h_t} (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = 0.$$

Выбор параметра τ осуществляется с помощью оценки сеточного числа Пекле (11). Если $Pe \geq 1$, то $\tau = h/2\|\mathbf{u}\|$, иначе $\tau = h/2\mu$. Параметр h – диаметр сферы, описанной вокруг конечного элемента [3]. Формулы (13) и (14) получены из условия минимизации ошибки (10). Для дополнительной информации о выводе данных соотношений см. работы [1, 2, 6].

3. Базисы конечноэлементных пространств

Систему уравнений Навье–Стокса, используемую для описания движения несжимаемой жидкости (газа), можно трактовать, как задачу с ограничением $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Для решения таких задач обычно используется метод Лагранжа. Применение этого подхода в конечноэлементной дискретизации приводит к определению пары (\mathbf{u}, p) . Существование единственного решения в этом случае обеспечивается выполнением условия Ладыженской–Бабушки–Бреци [4]

$$\inf_{p \in P(\Omega)} \left(\sup_{\mathbf{u} \in V(\Omega)} \frac{(\nabla \mathbf{u}, p)}{\|\mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{u}\|} \right) \geq \beta, \quad (15)$$

где $\mathbf{u} \in V(\Omega)$, $p \in P(\Omega)$, $\beta > 0$ не зависит от размера конечного элемента.

Выполнение условия может быть гарантировано специальным выбором функциональных пространств для аппроксимации поля давления и поля скоростей. Обратим внимание, что выполнение условия (15) позволяет не строить специальные операторы для однозначного определения поля давления, поскольку решается задача о седловой точке [1], а условие неразрывности выполняется автоматически [1, 6]. Для решения задачи (1)–(3) будем использовать тетраэдральные конечные элементы (рис. 2). Введем барицентрические координаты $\{\lambda_i, i = \overline{1,4}\}$ на тетраэдре Ω_k , см. систему уравнений (16).

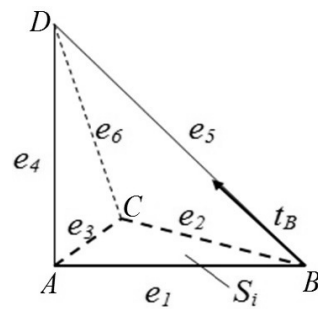


Рис. 2 – Тетраэдральный конечный элемент

Fig. 2 – Tetrahedral finite element

Каждая из функций $\{\lambda_i, i = \overline{1,4}\}$ принимает значение 1 в вершине i с координатами (X_i, Y_i, Z_i) и ноль в остальных вершинах тетраэдра. Данный базис будет использован для аппроксимации поля давления.

$$\lambda_i(x, y, z) = \alpha_1^i x + \alpha_2^i y + \alpha_3^i z + \alpha_4^i, \quad i = \overline{1,4}. \quad (16)$$

В соответствии с ЛББ условием (15) для аппроксимации вектора скорости будем использовать полный векторный базис первого порядка пространства [13]:

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H(\text{div}, \Omega), \int_{\Omega} (\mathbf{w})^2 < \infty, \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w})^2 < \infty \right\}. \quad (17)$$

Для построения такого базиса на каждой грани тетраэдра $S_i, i = \overline{1,4}$ определим Whitney-функции [12]

$$\gamma_{0,T}^{S_i} = \frac{\lambda_A t_A}{t_A n_{i,T}} + \frac{\lambda_B t_B}{t_B n_{i,T}} + \frac{\lambda_C t_C}{t_C n_{i,T}}, \quad (18)$$

где $n_{i,T}$ – единичный вектор внешней нормали к грани $S_i, i = \overline{1,4}$, λ_i – базисная функция, ассоциированная с i -й вершиной, t_i – единичные касательные векторы. Whitney-функции (18) образуют неполный векторный базис первого порядка. Для построения полного базиса первого порядка необходимо добавить к Whitney-функциям линейные фазе-функции [13]

$$\gamma_{1,T}^{S_i,1} = \frac{\lambda_B t_B}{t_B \cdot n_{i,T}} - \frac{\lambda_A t_A}{t_A \cdot n_{i,T}}, \quad \gamma_{1,T}^{S_i,2} = \frac{\lambda_A t_A}{t_A \cdot n_{i,T}} - \frac{\lambda_C t_C}{t_C \cdot n_{i,T}}. \quad (19)$$

Для построения базиса более высокого порядка необходимо определить *edge*-функции, ассоциированные с ребрами тетраэдра [13]. Пусть вершины F, E, D определяют грань $S_i, i = \overline{1,4}$, вершины F, E определяют ребро $e_j, D \notin e_j$. Тогда *edge*-функции определяются с помощью ортогональных полиномов Лежандра L_i

$$\gamma_{k,T}^{S_i,e_j} = \lambda_E \lambda_F L_{k-2}(\lambda_F - \lambda_E) \frac{t_D}{t_D \cdot n_{i,T}}. \quad (20)$$

Построение *edge*-функций (20) может быть неединственным. Предложен вариант, принадлежащий J. Webb [12, 13].

4. Верификация вычислительной схемы SUPG

Рассмотрим стационарное течение газа в прямой трубе при наличии постоянного перепада давления. Диаметр трубы $l = 1,4$ м, длина – $L = 100$ м. Внутри трубы течет **бутан** ($\mu = 7,44$ мкПа·с, $\rho = 2,700$ кг/м³). На границе Γ_1 задано давление $p_1 = 200$ кПа, на границе Γ_2 задано давление $p_2 = 0$ Па. На границах Γ_3 и Γ_4 задано условие прилипания $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ и непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Данная задача имеет аналитическое решение [14]:

$$p = -\frac{|p_1 - p_2|}{L} x + p_1, \quad \mathbf{u}_x = \frac{|p_1 - p_2|}{2\mu L} \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 - y^2 \right). \quad (21)$$

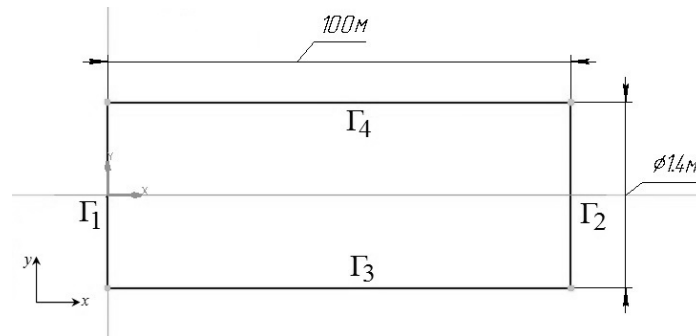


Рис. 3 – Расчетная область

Fig. 3 – Computational domain

Сравним погрешности численных решений с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ), стабилизированного (СМКЭ) и с помощью ANSYS 17,0 CFX. Триангуляция расчетной области представлена на рис. 4. Использовано 122,602 элемента, средний размер ребра КЭ 0,1 (м). Точность решения СЛАУ $\varepsilon = 10^{-12}$. Норму погрешности решений будем оценивать в пространстве $L_2(\Omega)$

$$\|\Delta\|_{L_2(\Omega)} = \|I^{\text{точное}} - I^{\text{числ}}\|_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (I^{\text{точное}} - I^{\text{числ}})^2 d\Omega. \quad (22)$$

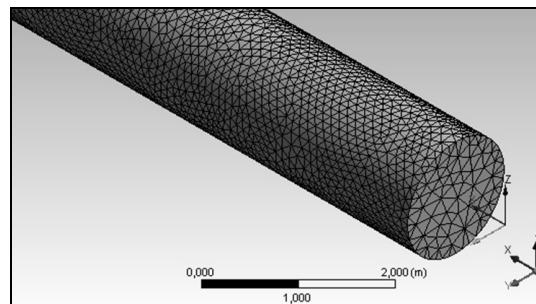
Рис. 4 – Триангуляция расчетной области:
122,602 элемента, размер ребра 0,1 (м)Fig. 4 – The computational domain triangulation:
122,602 elements, the edge size 0,1 (m)

Таблица содержит информацию о времени и погрешности численного решения поставленной задачи разными методами. В качестве решателя СЛАУ для МКЭ и СМКЭ выбран метод BiCGStab с SQ-факторизацией. В ANSYS CFX (Computational Fluid Dynamics) для решения СЛАУ применяется алгебраический многосеточный решатель с использованием двух подходов: итерационный решатель на подпространствах Крылова (объединение GMRES и BiCG) с предобуславливанием Якоби и прямой метод с LU-разложением. Для решения поставленной задачи с помощью пакета ANSYS была выбрана модификация решателя с использованием LU-разложения.

Конвективный член в уравнениях Навье–Стокса вносит не только несимметричность в матрицу СЛАУ, но и закононеопределенность в режиме доминирования конвекции. Практически установлено, что для числа Пекле 10^3 итерационные решатели начинают стагнировать и не достигают требуемой точности. Данный

эффект можно наблюдать для классического МКЭ, поскольку время решения задачи установить невозможно из-за стагнирования решателя. Для числа Пекле 10^{10} уже невозможно применять прямые методы, поскольку возникают ограничения на машинную арифметику. Применение схемы SUPG (СМКЭ) позволило получить решение задачи с требуемой точностью, потратив на порядок меньше времени по сравнению с программным комплексом ANSYS.

Погрешность и время решения задачи
Accuracy and time for solving the problem

Метод решения	Перепад давления, кПа	Погрешность, давление	Погрешность, скорость	Время решения, с
МКЭ	200	1,55E-1	6,23E+2	стагнация
	400	2,98E-0	8,54E+3	
	1200	6,58E+1	5,79E+5	
ANSYS CFX	200	5,69E-6	2,37E-4	35
	400	4,15E-5	3,81E-3	48
	1200	8,98E-4	8,56E-2	225
СМКЭ	200	2,35E-11	5,89E-5	10
	400	4,62E-11	7,59E-4	13
	1200	5,98E-11	9,25E-4	15

4. Решение поставленной задачи

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим течение **бутана**. На границе Γ_1 задано давление $p_1 = 200$ кПа, на границе Γ_2 задано давление $p_2 = 0$ Па. Триангуляция области состоит из 400,131 элемента, размер ребра не более 0,1 (м). На рис. 5 изображены профили скорости вдоль границы S , полученные с помощью МКЭ, СМКЭ и ANSYS. На графиках представлен модуль скорости.

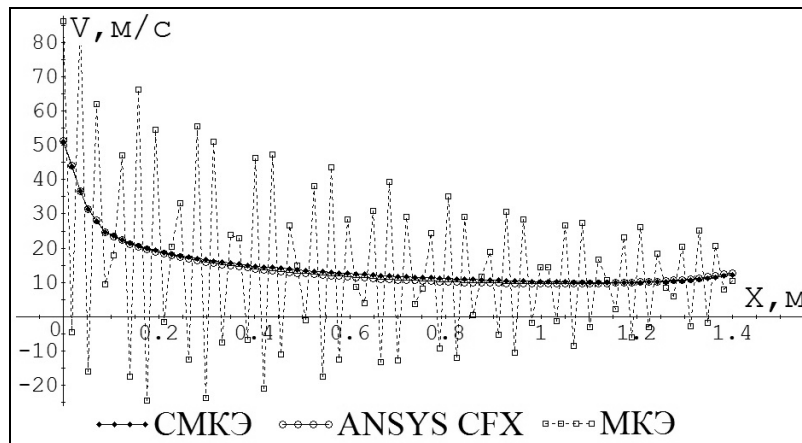


Рис. 5 – Поле скоростей бутана вдоль границы S спустя 0,4 с

Fig.5 – The butane velocity field along the border S after 0,4 sec

Как можно видеть, решение, полученное с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ), имеет нефизические осцилляции. Время решения задачи с помощью СМКЭ составило 14 с, решение с помощью ANSYS – 51 с. Таким образом, применение стабилизированного подхода позволяет получить физически адекватное решение задачи в 4 раза быстрее.

Заключение

В данной работе была впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства $H(\text{div}, \Omega)$, что позволяет выполнить условие Ладыженской–Бабушки–Бреци при использовании базисов одного порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей.

Проведена верификация стабилизированной вычислительной схемы на задаче, имеющей аналитическое решение. Сделано сравнение полученных результатов с решениями, полученными с помощью классического метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS. Метод показал хорошие результаты при моделировании процесса течения газа в трубе с L-shape конфигурацией, которая является главным тестом на проверку устойчивости всех конечноразностных и конечноэлементных схем при решении сингулярно-возмущенных задач. Метод позволяет получить физически адекватное решение с меньшими вычислительными затратами по сравнению с другими рассмотренными подходами. Данная вычислительная схема может быть использована для решения задач движения жидкостей и газов в достаточно широком диапазоне изменения физических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Russo A., Brezzi F., Marini L.** On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2005. – Vol. 194 (2–5). – P. 127–148.
2. **Hauke G.** A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191 (27). – P. 2925–2947.
3. **Masud A., Franca L., Hauke G.** Stabilized finite elements methods // *Finite element methods: 1970's and beyond*. – Barcelona, Spain: CIMNE, 2003.
4. **Riviere B.** Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems // *Journal of Scientific Computing*. – 2005. – Vol. 22/23. – P. 479–500.
5. Dynamic modeling of large-scale networks with application to gas distribution / J. Králík, P. Stiegler, Z. Vostř, J. Zavorka. – Prague: Academia, 1998. – 360 p.
6. **Burman E., Ern A.** Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection–diffusion–reaction equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191. – P. 3833–3855.
7. **Burman E., Ern A.** Stabilized Galerkin approximation of convection-diffusion-reaction equations: discrete maximum principle and convergence // *Mathematics of Computation*. – 2005. – Vol. 74. – P. 1637–1652.
8. **Carmo E.G.D. do, Alvarez G.B.** A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection-diffusion problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2004. – Vol. 193. – P. 2383–2402.
9. **Hundsdorfer W., Verwer J.G.** Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations. – Berlin; New York: Springer, 2003. – 471 p. – (Springer Series in Computational Mathematics; vol. 33).
10. **Vohralík M.** Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients // *Journal of Scientific Computing*. – 2011. – Vol. 46 (3). – P. 397–438. – doi: 10.1007/s10915-010-9410-1.
11. **Kim K.Y.** A posteriori error estimators for locally conservative methods of nonlinear elliptic problems // *Applied Numerical Mathematics*. – 2007. – Vol. 57 (9). – P. 1065–1080.
12. **Webb J.P.** Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1999. – Vol. 47 (8). – P. 1244–1253.

13. Webb J.P. Hierarchal scalar and vector tetrahedra // IEEE Transactions on Magnetic. – 1993. – Vol. 29 (2). – P. 1495–1498.
14. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 574 с.

STABILIZED VECTOR FINITE ELEMENT METHOD FOR MODELING GAS FLOWS

N.B. Itkina, S.I. Markov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Mathematical modeling gas flows naturally arises in the aircraft design, the development of new oil and gas fields and the development of energy raw material transport systems to consumers. There is a forecasting problem of the dependable and efficient process equipment operation modes. It is also necessary assess the impact of technogenic effects the environment during the equipment operation in order to prevent technological accidents. The problem decision is based on the development and practical application of engineering calculations using modern and universal methods. A mathematical model of the gas flows is a singularly perturbed problem that causes the instability of most computational schemes for sufficiently large values of the Peclet number. Therefore, the method of solving a problem should be naturally adapted to the parameters of a physical problem and reflect a complex structure of the process. A finite element method is one of the approaches used for such problems. In this paper we present an original computational scheme of a stabilized vector finite element method in 3D. Mathematical modeling results of the gas flows are given. Detailed recommendations on selecting computational scheme stabilizing parameter are proposed. The possibility of using the computational scheme of the stabilized vector finite element method with special vector basis functions of Nedelec's space is studied for the first time. It allows satisfying the Ladyzhenskaya – Babuska – Brezzi condition using first-order basis functions for the pressure and velocity field approximation.

Keywords: gas flows, the Navier–Stokes equations, stabilized vector finite element method.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67

REFERENCES

1. Russo A., Brezzi F., Marini L. On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194 (2–5), pp. 127–148.
2. Hauke G. A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, vol. 191 (27), pp. 2925–2947.
3. Masud A., Franca L., Hauke G. Stabilized finite elements methods. *Finite element methods: 1970's and beyond*. Barcelona, Spain, CIMNE, 2003.
4. Riviere B. Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems. *Journal of Scientific Computing*, 2005, vol. 22–23, pp. 479–500.
5. Kralik J., Stiegler P., Vostry Z., Zavorka J. *Dynamic modeling of large-scale networks with application to gas distribution*. Prague, Academia, 1998. 360 p.
6. Burman E., Ern A. Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection–diffusion–reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, vol. 191, pp. 3833–3855.
7. Burman E., Ern A. Stabilized Galerkin approximation of convection-diffusion-reaction equations: discrete maximum principle and convergence. *Mathematics of Computation*, 2005, vol. 74, pp. 1637–1652.
8. Carmo E.G.D. do, Alvarez G.B. A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, vol. 193, pp. 2383–2402.
9. Hundsdorfer W., Verwer J.G. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, New York, Springer, 2003, vol. 33. 471 p.

10. Vohralik M. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. *Journal of Scientific Computing*, 2011, vol. 46 (3), pp. 397–438. doi: 10.1007/s10915-010-9410-1
11. Kim K.Y. A posteriori error estimators for locally conservative methods of nonlinear elliptic problems. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, vol. 57 (9), pp. 1065–1080.
12. Webb J.P. Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1999, vol. 47 (8), pp. 1244–1253.
13. Webb J.P. Hierarchal scalar and vector tetrahedral. *IEEE Transactions on Magnetic*, 1993, vol. 29 (2), pp. 1495–1498.
14. Ol'khovskii I.I. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki dlya fizikov* [Theoretical mechanics for physicists]. Moscow, MSU Publ., 1978. 574 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Иткина Наталья Борисовна – родилась в 1959 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры вычислительных технологий, факультет прикладной математики и информатики, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: неконформные конечно-элементные методы. Опубликовано 93 научных работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: itkina.nat@yandex.ru).

Itkina Natalya Borisovna (b. 1959) – Ph.D. in Engineering, Associate Professor at the department of computational technologies of the Novosibirsk state technical university. Her research interests are currently focused on nonconforming finite element method. She is author of 93 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: itkina.nat@yandex.ru).



Марков Сергей Игоревич – родился в 1991 году, аспирант кафедры Вычислительных технологий, факультет прикладной математики и информатики, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: неконформные конечноэлементные методы. Опубликовано 30 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: www.sun91@list.ru).

Markov Sergey Igorevich (b. 1991) – postgraduate student at the Department of Computational Technologies of the Novosibirsk state technical university. His research interests are currently focused on nonconforming finite element method. He is author of 30 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: www.sim91@list.ru).

Статья поступила 31 марта 2016 г.

Received March 31, 2016

To Reference:

Itkina N.B., Markov S.I. Primenenie stabilizirovannogo vektornogo metoda konechnykh elementov dlya modelirovaniya techeniya gazov [Stabilized vector finite element method for modeling gas flows]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 57–67. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67