

УДК 621.3.049.77.002.5

**АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ  
В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЭМС С УЧЕТОМ КРАЕВЫХ  
ЭФФЕКТОВ В 3D-ПРИБЛИЖЕНИИ****Д.И. Остертак***Новосибирский государственный технический университет*

При проектировании емкостных микроэлектромеханических систем (МЭМС) необходимо рассчитывать электрические емкости и электростатические силы, действующие между различными элементами конструкции. Эти параметры зачастую оценивают при помощи аналитических выражений, которые не учитывают краевые эффекты, либо с использованием численных методов, учитывающих краевые эффекты, но требующих больших временных затрат и мощных компьютеров, что затрудняет дальнейшие процессы оптимизации. На начальных этапах разработки МЭМС требуются быстрые, точные и наглядные методы расчета электростатических взаимодействий. Поэтому аналитические выражения, позволяющие вычислять емкости и силы с достаточной для практических применений точностью, представляют очень большой интерес. В данной работе представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований электростатических взаимодействий в МЭМС с плоскопараллельными электродами в 3D-приближении. Методом конечных элементов рассчитаны зависимости емкости и сил от величины межэлектродного зазора, толщины электродов и соотношения сторон электродов, на основе этого получены аппроксимационные формулы для расчета емкости и сил с учетом краевых эффектов. Проводится сравнение экспериментальных и теоретических результатов, показано их хорошее совпадение. Оценены пределы применимости полученных формул, учитывающих краевые эффекты в 3D-, 2D- и 1D-приближениях.

*Ключевые слова:* МЭМС, плоскопараллельный конденсатор, электрическая емкость, электростатические силы, краевые эффекты, метод конечных элементов, аппроксимационные формулы.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-1-116-132

**Введение**

При проектировании емкостных микроэлектромеханических систем (МЭМС) возникает необходимость в расчете емкостей и электростатических сил между различными узлами системы, имеющими различные потенциалы. Обычно такой расчет проводится на основе упрощенных аналитических выражений, наиболее часто используется классическая формула для идеального плоского конденсатора (ИПК), не учитывающая влияние краевых эффектов, которое становится особенно существенным, когда расстояние между электродами соизмеримо с их линейными размерами.

Численные расчеты с использованием метода конечных (МКЭ) или граничных (МГЭ) элементов позволяют оценить электростатические взаимодействия в МЭМС с учетом краевых эффектов. Данные методы, однако, требуют больших затрат времени и мощной вычислительной техники, что существенно усложняет

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, шифр проекта 8.6847.2017/БЧ, тема проекта: «Разработка теоретических основ построения измерительного оборудования для телекоммуникационных систем, содержащего мощные СВЧ аттенюаторы, полосовые фильтры с заданными частотами режекции и микрополосковые печатные антенны».

дальнейшие процессы оптимизации и проектирования МЭМС с одновременным учетом электрических и механических взаимодействий. На начальных этапах проектирования МЭМС желательно иметь быстрые и наглядные методы расчета. Особый интерес представляют аналитические методы, позволяющие вычислять емкости и силы с достаточной для практических применений точностью.

В литературе имеются аналитические выражения для расчета емкостей и электростатических сил с учетом краевых эффектов [1–11], однако некоторые из них учитывают только влияние конечной ширины [1–7] и длины электродов [8–10], а некоторые – конечной ширины и толщины электродов [7]. Бóльший практический интерес представляют аналитические выражения, которые бы учитывали одновременно конечную ширину, длину и толщину электродов (3D-приближение).

В данной работе проводится экспериментальное и теоретическое исследование зависимостей электрической емкости и электростатических сил в МЭМС с плоскопараллельной двухэлектродной структурой от геометрических параметров электродов в 3D-приближении, предлагаются соответствующие аппроксимационные формулы, полученные на основе рассчитанных данных.

### 1. Методика эксперимента

На рис. 1 приведена конструкция двухэлектродного плоскопараллельного конденсатора, используемого для измерения и расчета емкости системы в зависимости от межэлектродного зазора  $d$ .

Данная конструкция представляла собой два прямоугольных алюминиевых электрода с одинаковой длиной  $a = 98,58$  мм, шириной  $b = 26,92$  мм и толщиной  $h = 1,2$  мм, межэлектродный зазор величиной  $d$  был заполнен воздухом. Электроды закреплялись на диэлектрических подложках, которые в свою очередь монтировались на штативах измерительного прибора ИЗА-2, что позволяло устанавливать межэлектродный зазор  $d$  с точностью 0,5 мкм.

Для измерения емкости использовался цифровой LCR измеритель Е7-8, позволяющий измерять емкости от 0,01 пФ до 100 мкФ с погрешностью  $\pm 2,5$  %. Паразитная емкость между электродами составляла от 1,5 до 3,6 пФ и в дальнейшем вычиталась из экспериментальных зависимостей.

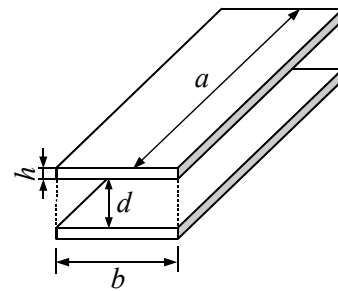


Рис. 1 – Схема МЭМС, используемая для измерения и расчета емкости

Fig. 1 – MEMS structure used for measurements and modeling

### 2. Методика расчета

Расчет зависимостей емкости  $C$  от межэлектродного зазора  $d$  при различных соотношениях длины  $a$  и ширины  $b$  электродов, а также толщины  $h$  и ширины  $b$  электродов проводился с использованием МКЭ в пакете ANSYS, погрешность расчетов составляла не более 0,03 %. В областях с резким пространственным изменением электрического поля плотность сетки была значительно выше, чем в остальных областях. В качестве граничных условий задавалась воздушная окружающая среда, в случае постоянного напряжения полагалось, что потенциал одного из электродов был 1 В, а другого 0 В, в случае постоянного заряда один из электродов имел заряд +1 Кл, второй –1 Кл.

### 3. Результаты расчетов и эксперимента

На рис. 2 представлены зависимости емкости от отношения величины межэлектродного зазора  $d$  к ширине электрода  $b$ . Белыми маркерами обозначены экспериментальные результаты, сплошной серой линией с треугольными маркерами – расчет МКЭ, черной штриховой линией – расчет по формуле ИПК.

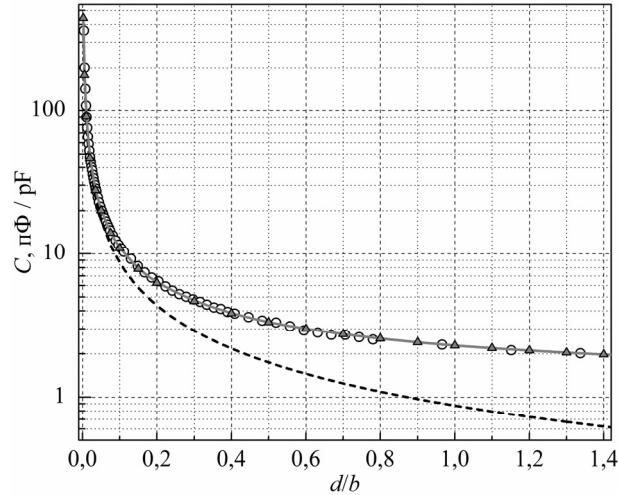


Рис. 2 – Зависимости емкости от нормированной величины межэлектродного зазора

Fig. 2 – Dependences of capacitance on normalized value of interelectrode gap

Из рис. 2 видно, что зависимость емкости, рассчитанная с использованием формулы ИПК (черная штриховая линия), с увеличением межэлектродного зазора  $d$  все больше расходится с экспериментом, что связано с проявлением краевых эффектов, не учитываемых моделью ИПК. Для конструкции, изображенной на рис. 1, оценки показывают, что для  $d/b < 0,02$  и  $d/b < 0,05$  значения емкостей, полученные экспериментально, превышают значения, найденные по формуле ИПК, на 10 и 16 % соответственно. С ростом отношения  $d/b$  погрешность расчетов с использованием формулы ИПК неуклонно растет, и при  $d/b = 0,2$  различие с экспериментом составляет уже около 45 %, а при  $d/b = 1$  – примерно 165 %, т. е. в данном случае для вычисления емкости формулу ИПК использовать нельзя.

Согласно рис. 2 зависимость, рассчитанная в рамках МКЭ, в диапазоне  $0,002 \leq d/b \leq 1,33$ , расходится с экспериментом не более чем на 5 %, что может быть связано с погрешностью измерений и вполне приемлемо для практических применений.

Для дополнительного подтверждения точности расчетов электрической емкости МКЭ в системе ANSYS был проведен их сравнительный анализ с экспериментальными результатами работ [8–9], где измерялась зависимость электрической емкости от межэлектродного зазора для конструкции, представляющей собой два квадратных алюминиевых электрода со стороной 25 см и толщиной 11 мкм, межэлектродный зазор был заполнен воздухом. Из-за погрешности измерений и вклада паразитной емкости расхождение между расчетами при помощи МКЭ

с экспериментальными данными составило не более 10 % в диапазоне  $0,01 \leq d/b \leq 1,55$ , что также вполне приемлемо для практических применений.

Кроме того, результаты расчетов в рамках МКЭ сравнивались с табличными данными из [11], при этом расхождение составляло не более 5 %. Поскольку расчеты емкости с использованием МКЭ обладают достаточной точностью, то дальнейший анализ проводился на его основе.

#### 4. Анализ полученных результатов

Как отмечалось выше, при проектировании МЭМС наиболее удобным является использование аналитических выражений. Для расчета зависимости емкости от величины межэлектродного зазора наибольшее распространение получила формула ИПК

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a b}{d}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды между электродами,  $a$ ,  $b$  и  $d$  – длина, ширина электрода и межэлектродный зазор, соответственно.

Однако, как показано выше, оценки емкости, полученные с использованием модели ИПК, могут иметь значительную погрешность, которая неуклонно растет с увеличением межэлектродного зазора  $d$ .

*Бесконечно-длинные электроды с нулевой толщиной.* Анализ литературных данных [1–7] показывает, что наиболее точное выражение для расчета емкости с учетом краевых эффектов при  $d/b \leq 2$  для бесконечно длинных ( $a/b \rightarrow \infty$ ) и бесконечно тонких ( $h/b = 0$ ) электродов имеет вид [3]

$$C_{1D} = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln \left[ (2\pi)^{1,04} \left( \frac{b}{d} + \frac{3}{4} \right) \right] \right] \right\} = C_0 \Phi_{1D}. \quad (2)$$

Оценки показывают, что (2) позволяет рассчитывать емкости с погрешностью менее 0,6 % (относительно численных расчетов МКЭ) при  $d/b \leq 2$ ,  $a/b \rightarrow \infty$  и  $h/b = 0$ . Для данного случая на рис. 3, а представлены зависимости нормированной емкости  $C/C_0$  от отношения  $d/b$ , сплошная линия – расчет с использованием (2), квадраты – численный расчет МКЭ, из рисунка видно, что результаты очень хорошо согласуются между собой. Из рис. 3, а также видно, что с ростом отношения  $d/b$  влияние краевых эффектов увеличивается, так при  $d/b = 2$  емкость, найденная численно, будет практически в 3 раза превосходить емкость, найденную в рамках модели ИПК, т. е. в таких случаях формулу (1) использовать нельзя.

*Бесконечно-длинные электроды с конечной толщиной.* В случае если электроды имеют конечную толщину  $h/b > 0$ , влияние краевых эффектов усиливается. В литературе имеется выражение для оценки емкости с учетом толщины электродов  $h$  при  $a/b \rightarrow \infty$ , считающееся наиболее точным в данном случае и именуемое модифицированной формулой Пальмера–Янга [7]:

$$C_{2D}^{ПЯ} = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln \left( 2\pi \frac{b}{d} \right) + \ln \left[ 1 + 2 \frac{h}{d} + 2 \sqrt{\frac{h}{d} + \left( \frac{h}{d} \right)^2} \right] \right] \right\}. \quad (3)$$

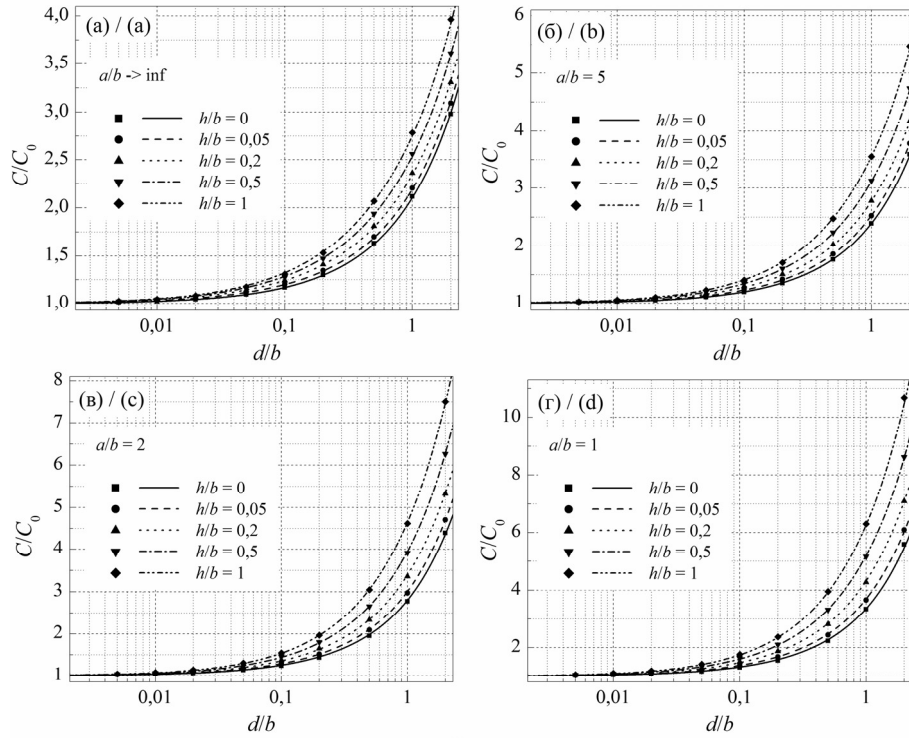


Рис. 3 – Зависимости нормированной емкости  $C/C_0$  от нормированного зазора  $d/b$  при различных отношениях  $a/b$  и  $h/b$

Fig. 3 – Dependences of normalized capacitance  $C/C_0$  on normalized interelectrode gap  $d/b$  at different ratios of  $a/b$  and  $h/b$

Анализ показывает, что (3) имеет достаточно узкие диапазоны применимости: погрешность расчетов увеличивается с ростом как толщины электродов  $h$ , так и межэлектродного зазора  $d$ . Например, при  $d/b = 0,5$  и  $h/b = 0,1$  погрешность расчетов составит около 2,5 %, а при  $h/b = 0,5$  и том же  $d/b$  – около 5 %. При  $d/b = 2$  и  $h/b = 1$  выражение (3) становится плохо применимым, поскольку погрешность в этом случае достигает 19 %.

Однако если формулу (3) модифицировать следующим образом:

$$C_{2D}^I = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln \left[ (2\pi)^{1,04} \left( \frac{b}{d} + \frac{3}{4} \right) \right] + \theta_1 \ln^{1,16} \Omega \right] \right\} = C_0 \Phi_{2D}^I, \quad (4)$$

где  $\Omega = 1 + 2h/d + 2\sqrt{h/d + h^2/d^2}$ ,  $\theta_1 = 1,268 / [1 + 0,2(h/b)^{-0,449}]$  – коэффициент учитывающий отношение между толщиной  $h$  и шириной  $b$  электродов, то точность вычислений заметно повышается. Анализ показывает, что погрешность расчетов с использованием (4) при  $d/b \leq 2$  и  $h/b \leq 1$  составляет менее 1,3 % (относительно численных расчетов), что вполне достаточно для практических применений.

Для данного случая на рис. 3, а представлены зависимости нормированной емкости  $C/C_0$  от отношения  $d/b$  при  $h/b = 0, 0,05, 0,2, 0,5$  и 1 (где линии – расчет с использованием (4), фигуры – численный расчет МКЭ), из которых видно, что результаты очень хорошо согласуются между собой.

Из зависимостей рис. 3, а видно, что с ростом  $d/b$  влияние толщины  $h$  электродов на электрическую емкость усиливается: так, если при  $d/b = 0,02$  отношение емкостей для  $h/b = 1$  и  $h/b = 0$  составляло всего 1,037, то при  $d/b = 0,2$  оно составляет примерно 1,18, а при  $d/b = 2$  – уже 1,33.

*Прямоугольные электроды с нулевой толщиной.* Для плоскопараллельного конденсатора с бесконечно тонкими электродами ( $h/b = 0$ ), но когда длина  $a$  и ширина  $b$  электродов соизмеримы между собой, в литературе [8, 9] имеется формула для расчета емкости с учетом краевых эффектов, которая считается наиболее точной:

$$C_{2D}^{\text{II}} = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln \left[ 2\pi \left( \frac{b}{d} + \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \right) \right] \right] + \right. \\ \left. + \frac{d}{\pi a} \left[ 1 + \ln \left[ 2\pi \left( \frac{a}{d} + \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{a}{b} \right) \right) \right] \right] \right\}. \quad (5)$$

Оценки показывают, что погрешность формулы (5) относительно численных расчетов составляет не более 3 % при  $d/b \leq 2$  и любых значениях  $a/b$ . Точность расчетов можно несколько повысить, если модифицировать (5) следующим образом:

$$C_{2D}^{\text{III}} = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln^{\beta_1} \Psi_1 \right] + \frac{d}{\pi a} \left[ 1 + \ln^{\beta_2} \Psi_2 \right] \right\} = C_0 \Phi_{2D}^{\text{III}}, \quad (6)$$

где  $\Psi_1 = (2\pi)^{1,04} (b/d + 0,75(1 + b/a))$ ,  $\Psi_2 = (2\pi)^{1,04} (a/d + 0,75(1 + a/b))$ , а  $\beta_1 = 1 - 0,036(b/a)$ ,  $\beta_2 = 1 - 0,036(a/b)$  – коэффициенты учитывающие отношение сторон  $a$  и  $b$ . Анализ показывает, что погрешность расчетов с использованием (6) при  $d/b \leq 2$  и любых значениях  $a/b$  составляет менее 2,1 %.

Для данного случая на рис. 3, а–г представлены зависимости нормированной емкости  $C/C_0$  от отношения  $d/b$  при  $h/b = 0$  и  $a/b = 1, 2, 5$  и  $\infty$ , сплошные линии – расчет с использованием (6), квадраты – численный расчет МКЭ, из рисунка видно, что результаты очень хорошо согласуются между собой. Очевидно, что при уменьшении отношения  $a/b$  вклад краевых эффектов в электрическую емкость растет, особенно это заметно при увеличении  $d/b$ : так, если при  $d/b = 0,02$  отношение емкостей для  $a/b = 1$  и  $a/b \rightarrow \infty$  составляло всего 1,034, то при  $d/b = 0,2$  оно составляет примерно 1,2, а при  $d/b = 2$  – уже 1,87.

*Прямоугольные электроды с конечной толщиной.* Для случаев, когда длина  $a$  и ширина  $b$  электродов соизмеримы, но при этом они имеют еще и конечную толщину  $h/b > 0$ , в литературе не встречается аналитических выражений.

Если скомбинировать формулы (4) и (6), то получится выражение, которое будет учитывать влияние краевых эффектов за счет сторон  $a$ ,  $b$  и толщины  $h$  (3D-приближение):

$$C_{3D} = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[ 1 + \ln^{\beta_1} \Psi_1 + \xi_1 \theta_1 \ln^{1,16\gamma_1} \Omega \right] + \right. \\ \left. + \frac{d}{\pi a} \left[ 1 + \ln^{\beta_2} \Psi_2 + \xi_2 \theta_2 \ln^{1,16\gamma_2} \Omega \right] \right\} = C_0 \Phi_{3D}, \quad (7)$$

где  $\theta_2 = 1,268 / [1 + 0,2(h/a)^{-0,449}]$  – коэффициент, учитывающий отношение толщины  $h$  и длины  $a$  электрода (аналогично  $\theta_1$  в (4)). Кроме того, в (7) появляются коэффициенты  $\gamma_1 = [1 + 1,277(a/b)^{-0,841}]^{-1}$ ,  $\gamma_2 = [1 + 1,277(b/a)^{-0,841}]^{-1}$ , учитывающие отношение между сторонами электродов  $a$  и  $b$ , а также коэффициенты  $\xi_1 = [1 + 8,244(a/b)^{-1,777}]^{-1} + [0,247 + 0,073(a/b)^{1,308}]^{-1}(h/b)^{0,38}$  и  $\xi_2 = [1 + 8,244(b/a)^{-1,777}]^{-1} + [0,247 + 0,073(b/a)^{1,308}]^{-1}(h/a)^{0,38}$ , которые учитывают соотношения  $a/b$ ,  $h/b$  и  $h/a$ .

Оценки показывают, что погрешность формулы (7) при  $d/b \leq 2$ ,  $h/b \leq 1$  и любых значениях  $a/b$  составляет менее 3,2 % (относительно численных расчетов).

На рис. 3,  $a$ – $г$  изображены зависимости нормированной емкости  $C/C_0$  от отношения  $d/b$  при различных соотношениях  $a/b$  и  $h/b$  (где линии – расчет с использованием выражения (7), фигуры – численный расчет МКЭ), из которых видно, что (7) достаточно хорошо описывает численные результаты.

Из зависимостей рис. 3 можно заметить, что как с ростом толщины  $h$  электродов, так и с уменьшением отношения  $a/b$  влияние краевых эффектов увеличивается. Причем это влияние оказывается взаимосвязанным, т. е. чем больше толщина  $h$ , тем сильнее растет вклад краевых эффектов при уменьшении  $a/b$ , и наоборот, чем меньше  $a/b$ , тем сильнее проявляет себя толщина  $h$ .

Так, например, при  $d/b = 2$  и  $a/b = 5$  отношение емкостей для  $h/b = 1$  и  $h/b = 0,2$  составляет примерно 1,31, однако если уменьшить  $a/b$  до 1, то отношение между емкостями для тех же величин  $h/b$  и  $d/b$  составит уже около 1,51. Если же, например, при  $d/b = 2$  и  $h/b = 0,2$  отношение емкостей для  $a/b = 1$  и  $a/b = 5$  составляет примерно 1,7, то для  $h/b = 1$  и прежних  $a/b$  и  $d/b$  это отношение составит уже 1,95.

Примечательно, что выражение (7) для оценки емкости в 3D-приближении при  $h/b = 0$  превращается в выражение (6), при  $a/b \rightarrow \infty$  – в выражение (4), при  $h/b = 0$  и  $a/b \rightarrow \infty$  – в выражение (2), а при  $h/b = 0$ ,  $a/b \rightarrow \infty$  и  $d/b \rightarrow 0$  – в выражение (1). Таким образом, формула (7) является универсальной.

В таблице представлены диапазоны отношения  $d/b$ , при которых погрешность в оценке емкости с помощью представленных формул не превышает 10 %.

Из таблицы видно, что наиболее узкие диапазоны применимости имеет формула ИПК (1), формула (2) для  $C_{1D}$  более применима для бесконечно длинных и достаточно тонких прямоугольных электродов, когда  $a/b \rightarrow \infty$  и  $h/b \leq 0,05$ . Формула (4) для  $C_{2D}^I$  наиболее точна для отношения  $a/b \rightarrow \infty$  и любых толщин вплоть до  $h/b = 1$ . Формула (6) для  $C_{2D}^{III}$ , напротив, более точна без учета толщины ( $h/b = 0$ ), однако позволяет вычислять емкость для любых отношений  $a/b$ . И наконец, формула (7) для  $C_{3D}$  является универсальной и позволяет для представленных в таблице параметров  $a/b$ ,  $h/b$  и  $d/b \leq 2$  рассчитывать емкость с погрешностью менее 3,2 %.

Диапазоны применимости выражений (1), (2), (4), (6) и (7) для  
оценки емкости с погрешностью не более 10 %

	Формула	$h/b = 0$	$h/b \leq 0,05$	$h/b \leq 0,2$	$h/b \leq 0,5$	$h/b \leq 1$
		$d/b$				
$a/b \rightarrow \infty$	$C_0$ (1)	$\leq 0,0608$	$\leq 0,0461$	$\leq 0,0373$	$\leq 0,0321$	$\leq 0,0288$
	$C_{1D}$ (2)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 0,4546$	$\leq 0,1377$	$\leq 0,09$
	$C_{2D}^I$ (4)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$
	$C_{2D}^{III}$ (6)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 0,4546$	$\leq 0,1377$	$\leq 0,09$
	$C_{3D}$ (7)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$
$a/b \geq 5$	$C_0$ (1)	$\leq 0,05$	$\leq 0,0364$	$\leq 0,0288$	$\leq 0,0242$	$\leq 0,0211$
	$C_{1D}$ (2)	$\leq 0,727$	$\leq 0,284$	$\leq 0,1014$	$\leq 0,06$	$\leq 0,0437$
	$C_{2D}^I$ (4)	$\leq 0,727$	$\leq 0,582$	$\leq 0,404$	$\leq 0,284$	$\leq 0,2085$
	$C_{2D}^{III}$ (6)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 0,2123$	$\leq 0,0823$	$\leq 0,0538$
	$C_{3D}$ (7)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$
$a/b \geq 2$	$C_0$ (1)	$\leq 0,04$	$\leq 0,0278$	$\leq 0,0217$	$\leq 0,018$	$\leq 0,0153$
	$C_{1D}$ (2)	$\leq 0,2187$	$\leq 0,0957$	$\leq 0,0487$	$\leq 0,0329$	$\leq 0,0251$
	$C_{2D}^I$ (4)	$\leq 0,2187$	$\leq 0,1512$	$\leq 0,1046$	$\leq 0,0773$	$\leq 0,0586$
	$C_{2D}^{III}$ (6)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 0,1274$	$\leq 0,052$	$\leq 0,033$
	$C_{3D}$ (7)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$
$a/b \geq 1$	$C_0$ (1)	$\leq 0,03$	$\leq 0,02$	$\leq 0,0152$	$\leq 0,0124$	$\leq 0,0105$
	$C_{1D}$ (2)	$\leq 0,0912$	$\leq 0,043$	$\leq 0,0256$	$\leq 0,0187$	$\leq 0,0146$
	$C_{2D}^I$ (4)	$\leq 0,0912$	$\leq 0,0574$	$\leq 0,0405$	$\leq 0,0307$	$\leq 0,0239$
	$C_{2D}^{III}$ (6)	$\leq 2$	$\leq 1,976$	$\leq 0,0679$	$\leq 0,0328$	$\leq 0,0219$
	$C_{3D}$ (7)	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$	$\leq 2$

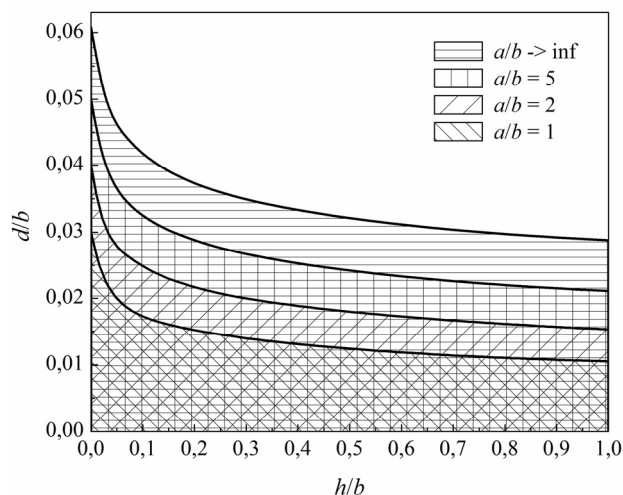


Рис. 4 – Диапазоны применимости формулы ИПК (1)  
с погрешностью менее 10 %

Fig. 4 – The range of applicability of equation (1) with  
accuracy of 10 %



На рис. 4 в виде заштрихованных площадей представлены диапазоны, при которых формула ИПК (1) позволяет рассчитывать электрическую емкость с погрешностью менее 10 % для  $a/b = 1, 2, 5$  и  $\infty$ . Из рисунка видно, что как с ростом отношения  $h/b$ , так и с уменьшением отношения  $a/b$  диапазон допустимых значений  $d/b$  сужается. Например, для случая наиболее сильного вклада краевых эффектов при  $a/b = 1$  формула (1) будет иметь погрешность менее 10 % при  $d/b \leq 0,03$  для бесконечно тонких ( $h/b = 0$ ) электродов и при  $d/b \leq 0,0105$  для  $h/b = 1$ , при дальнейшем увеличении толщины  $h$  допустимый диапазон  $d/b$  будет еще уже.

### 5. Электростатические силы в 3D-приближении

При приложении между электродами электрического напряжения  $V$  или сообщении электродам зарядов  $+Q$  и  $-Q$  (рис. 5) возникает электростатическая сила притяжения, стремящаяся уменьшить величину зазора между электродами. Компонента  $F$  электрической силы может быть рассчитана из зависимости изменения емкости системы  $C$  от величины межэлектродного зазора  $d$  при постоянном напряжении  $V$  (рис. 5, а) или постоянном заряде  $Q$  (рис. 5, б) на обкладках конденсатора. В основе данного подхода лежат соотношения, связывающие силу  $F$  и потенциальную энергию  $U$ :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d}, \quad (8)$$

где  $U = CV^2/2 = Q^2/(2C)$ .

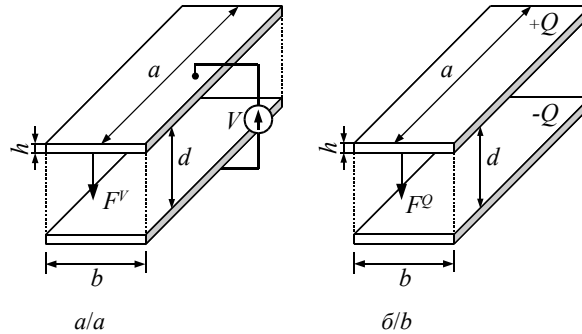


Рис. 5 – Модель МЭМС, используемая в расчетах электростатической силы:

$a$  – при постоянном напряжении;  $б$  – при постоянном заряде

Fig. 5 – MEMS model used for electrostatic force calculation:

$a$  – by constant voltage;  $b$  – by constant charge

Анализ показывает, что влияние краевых эффектов сказывается не только на оценках электрической емкости, но и на электростатических силах.

В рамках модели ИПК из выражений (1) и (8) получаются формулы для расчета электростатических сил при постоянном напряжении:

$$F_0^V = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2d^2} = -\frac{C_0 V^2}{2d}, \quad (9)$$

и постоянном заряде:

$$F_0^Q = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon ab}. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) не учитывают влияние краевых эффектов на электростатические силы, используя (7) и (8), можно получить выражения для расчета электростатических сил с учетом краевых эффектов при постоянном напряжении

$$F_{3D}^V = \frac{-C_0 V^2}{2d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(2\pi)^{1,04} \beta_1 \ln^{\beta_1-1} \Psi_1}{\Psi_1} + 1,16\gamma_1 \theta_1 \xi_1 \frac{h/b}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{1,16\gamma_1-1} \Omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2\pi)^{1,04} \beta_2 \ln^{\beta_2-1} \Psi_2}{\Psi_2} + 1,16\gamma_2 \theta_2 \xi_2 \frac{h/a}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{1,16\gamma_2-1} \Omega \right] \right\} \quad (11)$$

и постоянном заряде

$$F_{3D}^Q = \frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon ab \Phi_{3D}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(2\pi)^{1,04} \beta_1 \ln^{\beta_1-1} \Psi_1}{\Psi_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 1,16\gamma_1 \theta_1 \xi_1 \frac{h/b}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{1,16\gamma_1-1} \Omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2\pi)^{1,04} \beta_2 \ln^{\beta_2-1} \Psi_2}{\Psi_2} + 1,16\gamma_2 \theta_2 \xi_2 \frac{h/a}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{1,16\gamma_2-1} \Omega \right] \right\}. \quad (12)$$

Анализ показывает, что используя выражения (11) и (12), можно оценить значения электростатических сил с погрешностью менее 10 % (относительно численных расчетов) при  $d/b \leq 1$ ,  $h/b \leq 1$  и любых значениях  $a/b$ .

Выражения (11) и (12) для оценки электростатических сил в 3D-приближении при  $h/b = 0$  превращаются в выражения для оценки сил в 2D-приближении:

$$F_{2D,1}^V = \frac{-C_0 V^2}{2d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\beta_1 \ln^{\beta_1-1} \Psi_1}{b/d + 0,75(1+b/a)} + \frac{\beta_2 \ln^{\beta_2-1} \Psi_2}{a/d + 0,75(1+a/b)} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$F_{2D,1}^Q = \frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon ab (\Phi_{2D}^{\text{III}})^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\beta_1 \ln^{\beta_1-1} \Psi_1}{b/d + 0,75(1+b/a)} + \frac{\beta_2 \ln^{\beta_2-1} \Psi_2}{a/d + 0,75(1+a/b)} \right] \right\}, \quad (14)$$

позволяющие оценить значения электростатических сил с погрешностью менее 10 % (относительно численных расчетов) при  $d/b \leq 1$ ,  $h/b = 0$  и любых значениях  $a/b$ .

Для бесконечно длинных прямоугольных электродов ( $a/b \rightarrow \infty$ ) (11) и (12) превращаются в формулы

$$F_{2D,2}^V = \frac{-C_0 V^2}{2d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{b/d + 0,75} + 1,16\theta_1 \frac{h/b}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{0,16} \Omega \right] \right\}, \quad (15)$$

$$F_{2D,2}^Q = \frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon a b (\Phi_{2D}^I)^2} \times \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{b/d + 0,75} + 1,16\theta_1 \frac{h/b}{h/d + 0,5(1-1/\Omega)} \ln^{0,16} \Omega \right] \right\}, \quad (16)$$

позволяющие оценить значения электростатических сил с погрешностью менее 3 % (относительно численных расчетов) при  $d/b \leq 1$ ,  $h/b \leq 1$  и  $a/b \rightarrow \infty$ .

При  $h/b = 0$  и  $a/b \rightarrow \infty$  (11) и (12) превращаются в выражения

$$F_{1D}^V = \frac{-C_0 V^2}{2d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi(b/d + 0,75)} \right\}, \quad (17)$$

$$F_{1D}^Q = \frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon a b \Phi_{1D}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi(b/d + 0,75)} \right\}, \quad (18)$$

позволяющие оценить значения электростатических сил с погрешностью менее 2 % (относительно численных расчетов) при  $d/b \leq 1$ ,  $h/b = 0$  и  $a/b \rightarrow \infty$ .

При  $h/b = 0$ ,  $a/b \rightarrow \infty$  и  $d/b \rightarrow 0$  (11) и (12) превращаются в формулы (9) и (10), соответственно, которые не учитывают краевые эффекты.

На рис. 6 представлены зависимости нормированных значений электростатической силы при постоянном напряжении от нормированного зазора  $d/b$  для  $a/b = 5$  и  $h/b = 0,01, 0,2$  и 1, фигуры – численный расчет МКЭ, линии – расчет с помощью выражения (11). Значения силы нормировались на соответствующие значения силы, найденные с помощью формулы ИПК (9).

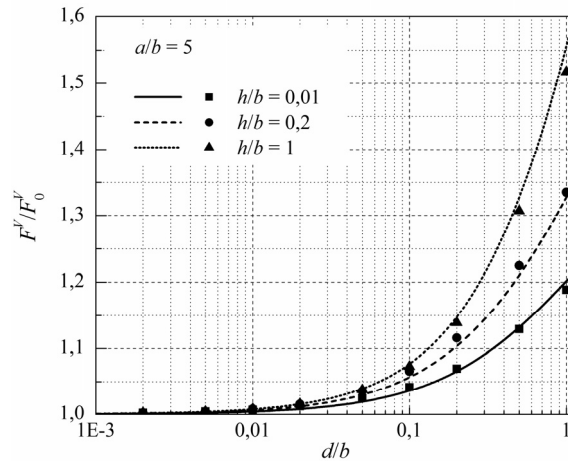


Рис. 6 – Зависимости нормированных значений электростатической силы при постоянном напряжении от величины  $d/b$  для  $a/b = 5$  и  $h/b = 0,01, 0,2, 1$

Fig. 6 – Dependences of normalized electrostatic force values on normalized interelectrode gap  $d/b$  for  $a/b = 5$  and  $h/b = 0,01, 0,2, 1$  by constant voltage

Из рис. 6 видно, что при увеличении зазора  $d$  численно рассчитанные значения силы начинают превосходить значения силы, рассчитанные при помощи формулы ИПК (9), причем это расхождение увеличивается с ростом толщины  $h$ . Например, при  $h/b = 0,01$  и  $d/b = 0,2$  отношение между значениями силы, найденными численно и по формуле ИПК, будет около 1,07, при  $h/b = 0,2$  и том же значении  $d/b$  почти 1,12, при  $h/b = 1$  и  $d/b = 0,2$  это отношение становится равным 1,14, а при  $h/b = 1$  и  $d/b = 1$  это отношение становится равным 1,52. Анализ показывает, что наибольшую погрешность в оценке электростатической силы при постоянном напряжении модель ИПК (9) имеет при  $a/b = 1$ , причем эта погрешность растет как с ростом толщины электродов, так и с ростом межэлектродного зазора. Например, при  $a/b = 1$ ,  $h/b = 1$  и  $d/b = 1$  это отношение становится равным 1,77, в подобных случаях модель ИПК становится неприменимой.

На рис. 7 представлены зависимости нормированных значений электростатической силы при постоянном заряде от нормированного зазора  $d/b$  для  $a/b = 1$  и  $h/b = 0,01, 0,2$  и 1, фигуры – численный расчет МКЭ, линии – расчет с помощью выражения (12). Значения силы нормировались на соответствующие значения силы, найденные с помощью формулы ИПК (10).

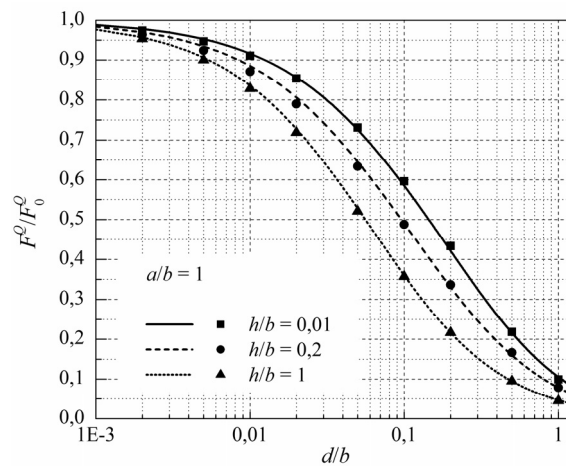


Рис. 7 – Зависимости нормированных значений электростатической силы при постоянном заряде от величины  $d/b$  для  $a/b = 1$  и  $h/b = 0,01, 0,2, 1$

Fig. 7 – Dependences of normalized electrostatic force values on normalized interelectrode gap  $d/b$  for  $a/b = 1$  and  $h/b = 0,01, 0,2, 1$  by constant charge

Из рис. 7 видно, что при увеличении зазора  $d$  численно рассчитанные значения силы начинают уменьшаться относительно значений силы, рассчитанных при помощи формулы ИПК, которые согласно (10) не зависят от  $d$ . Анализ показывает, что наибольшую погрешность в оценке электростатической силы при постоянном заряде модель ИПК имеет при  $a/b = 1$ , причем эта погрешность растет с ростом толщины электродов и межэлектродного зазора. Например, при  $h/b = 0,01$  и

$d/b = 0,2$  отношение между значениями силы, найденными численно и по формуле ИПК (10), будет 0,433, при  $h/b = 0,2$  и  $d/b = 0,2$  оно будет 0,337, при  $h/b = 1$  и том же значении  $d/b$  – почти 0,217, а при  $h/b = 1$  и  $d/b = 1$  это отношение становится равным примерно 0,045, т.е. значения сил будут отличаться примерно в 22 раза, в таких случаях модель ИПК применять нельзя.

На рис. 8 в виде заштрихованных площадей представлены диапазоны, при которых (9) позволяет рассчитывать электростатическую силу при постоянном напряжении с погрешностью менее 10 % для  $a/b = 1, 5$  и  $\infty$ . Из рисунка видно, что как с ростом отношения  $h/b$ , так и с уменьшением отношения  $a/b$  диапазон допустимых значений  $d/b$  сужается. Для случая наиболее сильного вклада краевых эффектов при  $a/b = 1$  формула (9) будет иметь погрешность менее 10 % при  $d/b \leq 0,267$  для бесконечно тонких ( $h/b = 0$ ) электродов и при  $d/b \leq 0,092$  для  $h/b = 1$ , при дальнейшем увеличении толщины  $h$  допустимый диапазон  $d/b$  будет сужаться.

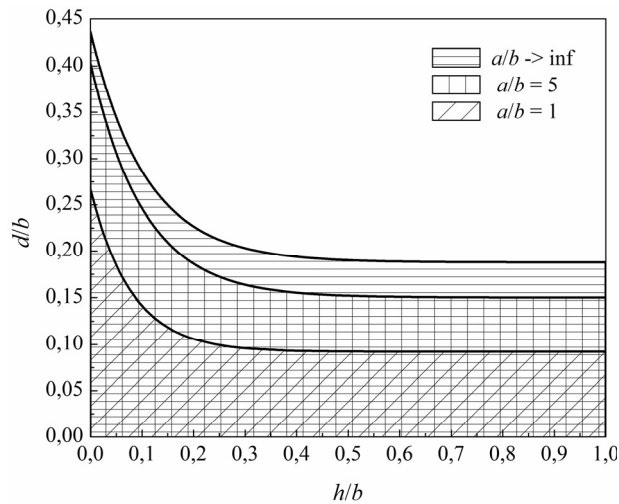


Рис. 8 – Диапазоны применимости формулы (9) с погрешностью менее 10 %

Fig. 8 – The range of applicability of equation (9) with accuracy of 10 %

На рис. 9 в виде заштрихованных площадей представлены диапазоны, при которых (10) позволяет рассчитывать электростатическую силу при постоянном заряде с погрешностью менее 10 % для  $a/b = 1, 5$  и  $\infty$ . Из рисунка видно, что как с ростом отношения  $h/b$ , так и с уменьшением отношения  $a/b$  диапазон допустимых значений  $d/b$  сужается. Для случая наиболее сильного вклада краевых эффектов при  $a/b = 1$  формула (10) будет иметь погрешность менее 10 % при  $d/b \leq 0,0107$  для бесконечно тонких ( $h/b = 0$ ) электродов и при  $d/b \leq 0,0044$  для  $h/b = 1$ , при дальнейшем увеличении толщины  $h$  допустимый диапазон  $d/b$  будет еще уже.

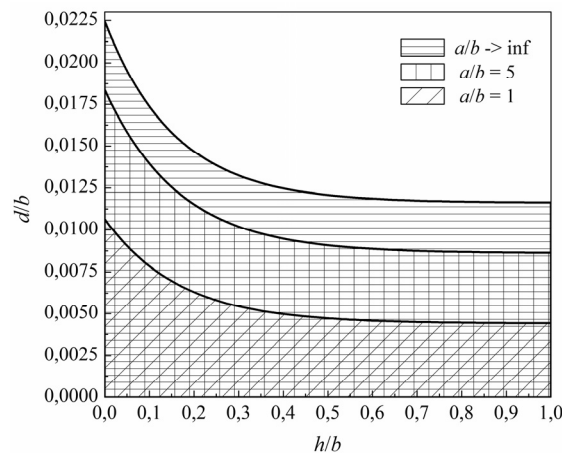


Рис. 9 – Диапазоны применимости формулы (10) с погрешностью менее 10 %

Fig. 9 – The range of applicability of equation (10) with accuracy of 10 %

Из анализа зависимостей рис. 4, 8 и 9 можно сделать вывод о том, что модель ИПК более применима для расчета электростатической силы при постоянном напряжении, менее применима для расчета электрической емкости и практически неприменима для расчета электростатической силы при постоянном заряде.

### Закключение

В работе представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований электрической емкости и электростатических сил в МЭМС с плоско-параллельными электродами в 3D-приближении.

Приведены экспериментально полученные зависимости емкости от величины межэлектродного зазора, показано, что с увеличением зазора вклад краевых эффектов растет, и при  $d/b = 1$  различие между расчетами по формуле ИПК (без учета краевых эффектов) и экспериментальными данными составляет примерно 165 %.

С использованием МКЭ рассчитаны зависимости емкости и электростатических сил от величины межэлектродного зазора, толщины электродов и соотношения сторон электродов с учетом краевых эффектов. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов, показано их хорошее совпадение.

Получены аппроксимационные формулы для расчета емкости и сил с учетом краевых эффектов. Оценены пределы применимости полученных формул, учитывающих краевые эффекты в 3D-, 2D- и 1D-приближениях. Данные формулы позволяют рассчитывать электрическую емкость при  $d/b \leq 2$ ,  $h/b \leq 1$  и любых значениях  $a/b$  с погрешностью менее 3,2 %, а электростатические силы при постоянном напряжении и постоянном заряде при  $d/b \leq 1$ ,  $h/b \leq 1$  и любых  $a/b$  с погрешностью менее 10 %, что вполне достаточно для практических применений.

Показано, что при межэлектродных зазорах, соизмеримых с линейными размерами электродов и толщиной электродов, расчеты емкости и электростатических сил без учета краевых эффектов приводят к большим ошибкам и могут быть использованы с погрешностью не более 10 % лишь при  $d/b \leq 0,03$  для бесконечно тонких ( $h = 0$ ) электродов и при  $d/b \leq 0,0105$  для  $h = b$  для оценки емкости;

при  $d/b \leq 0,267$  для  $h = 0$  и при  $d/b \leq 0,092$  для  $h = b$  для оценки электростатической силы при постоянном напряжении; при  $d/b \leq 0,0107$  для  $h = 0$  и при  $d/b \leq 0,0044$  для  $h = b$  для оценки электростатической силы при постоянном заряде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Palmer H.B.** Capacitance of a parallel-plate capacitor by the Schwartz-Christoffel transformation // *Electrical Engineering*. – 1937. – Vol. 56, iss. 3. – P. 363–368. – doi: 10.1109/EE.1937.6540485.
2. **Elliot R.S.** *Electromagnetics: history, theory, and applications*. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 631 p.
3. **Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Электростатические взаимодействия в МЭМС с плоскопараллельными электродами. Ч. 1. Расчет емкостей // *Нано- и микросистемная техника*. – 2010. – № 7. – С. 37–41.
4. **Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Электростатические взаимодействия в МЭМС с плоскопараллельными электродами. Ч. 2. Расчет электростатических сил // *Нано- и микросистемная техника*. – 2010. – № 8. – С. 40–47.
5. **Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Расчет нормальной составляющей электростатической силы в МЭМС // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2009. – № 1 (55). – С. 40–45.
6. **Драгунов В.П., Колчужин В.А., Остертак Д.И.** Влияние краевых эффектов на электрическую емкость в МЭМС // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2009. – № 2 (13). – С. 97–105.
7. **Leus V., Elata D.** Fringing field effect in electrostatic actuators // *Technical Report ETR*. – 2004. – Vol. 2. – P. 2–15.
8. **Драгунов В.П., Доржиев В.Ю.** Влияние краевых эффектов на функционирование МЭМС // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2016. – № 1. – С. 48–61.
9. **Доржиев В.Ю., Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Расчет емкости МЭМС в 2D-приближении // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2010. – № 4 (62). – С. 73–80.
10. **Hosseini M., Zhu G., Peter Y.-A.** A new formulation of fringing capacitance and its application to the control of parallel-plate electrostatic micro actuators // *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. – 2007. – Vol. 53, iss. 2. – P. 119–128. – doi: 10.1007/s10470-007-9067-3.
11. **Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.** Расчет электрической емкости. – Л.: Энергоиздат, Ленинградское отделение, 1981. – 288 с.

#### AN ANALYSIS OF ELECTROSTATIC INTERACTIONS IN PARALLEL-PLATE MEMS WITH REGARD TO FRINGING FIELD EFFECTS WITHIN A 3D-APPROACH

**Ostertak D.I.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

During the process of designing capacitive microelectromechanical systems (MEMS) it is necessary to calculate electric capacitance and electrostatic forces acting between different elements of the construction. These parameters are often evaluated using analytical expressions which do not take into account fringing field effects or by means of numerical computation which takes into account these effects but requires a lot of time and powerful computers that hamper further optimization. At initial stages of MEMS design it is essential to have fast, accurate and evident methods of electrostatic interaction calculation. Therefore analytical expressions allowing evaluating capacitances and electrostatic forces with an accuracy sufficient for practical application are of great interest. This work is devoted to experimental and theoretical study of electro-

static interactions in parallel-plate MEMS within a 3D-approach. Dependences of capacitance and electrostatic forces on the interelectrode gap, electrode thickness, and the length-to-width ratio are calculated using the finite element method. On the basis of the calculation approximation formulas for capacitance and electrostatic forces evaluation taking into account fringing field effects have been obtained. A comparison between experimental and theoretical results demonstrates a good coincidence. Applicability limits of the formulas obtained with regard to fringing field effects within 3D, 2D, and 1D-approaches are estimated.

**Keywords:** MEMS, parallel-plate capacitor, capacitance, electrostatic forces, fringing field effects, finite element method, approximation formulas.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-1-116-132

#### REFERENCES

1. Palmer H.B. Capacitance of a parallel-plate capacitor by the Schwartz-Christoffel transformation. *Electrical Engineering*, 1937, vol. 56, iss. 3, pp. 363–368. doi: 10.1109/EE.1937.6540485.
2. Elliot R.S. *Electromagnetics: history, theory, and applications*. New York, McGraw-Hill, 1966. 631 p.
3. Dragunov V.P., Ostertak D.I. Elektrostaticheskie vzaimodeistviya v MEMS s ploskoparallelnymi elektrodami. Ch. 1. Raschet emkosti [Electrostatic Interactions in MEMS with Plane-Parallel Electrodes. Pt. 1. Estimation of the capacitance]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Journal of Nano and Microsystem Technique*, 2010, no. 7, pp. 37–41.
4. Dragunov V.P., Ostertak D.I. Elektrostaticheskie vzaimodeistviya v MEMS s ploskoparallelnymi elektrodami. Ch. 2. Raschet elektrostaticheskikh sil [Electrostatic interactions in MEMS with plane-parallel electrodes. Pt. 2. Estimation of electrostatic forces]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Journal of Nano and Microsystem Technique*, 2010, no. 8, pp. 40–47.
5. Dragunov V.P., Ostertak D.I. Raschet normal'noi sostavlyayushchei elektrostaticheskoi sily v MEMS [Calculation of the normal component of the electrostatic force in MEMS]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 1 (55), pp. 40–45.
6. Dragunov V.P., Kolchuzhin V.A., Ostertak D.I. Vliyanie kraevykh effektov na elektricheskuyu emkost' v MEMS [Fringing field effect on electric capacitance in MEMS]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2009, no. 2 (13), pp. 97–105.
7. Leus V., Elata D. Fringing field effect in electrostatic actuators. *Technical Report ETR*, 2004, vol. 2, pp. 2–15.
8. Dragunov V.P., Dorzhiev V.Yu. Vliyanie kraevykh effektov na funktsionirovanie MEMS [Fringing field effects influence on MEMS functioning]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 1, pp. 48–61.
9. Dorzhiev V.Yu., Dragunov V.P., Ostertak D.I. Raschet emkosti MEMS v 2D-priblizhenii [Calculation of MEMS capacity in 2D-approximation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 4 (62), pp. 73–80.
10. Hosseini M., Zhu G., Peter Y.-A. A new formulation of fringing capacitance and its application to the control of parallel-plate electrostatic micro actuators. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 2007, vol. 53, iss. 2, pp. 119–128. doi: 10.1007/s10470-007-9067-3.
11. Iossel' Yu.Ya., Kochanov E.S., Strunskii M.G. *Raschet elektricheskoi emkosti* [Electric capacitance calculation]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1981. 288 p.



## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ



**Остертак Дмитрий Иванович** – родился в 1983 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры полупроводниковых приборов и микроэлектроники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нано- и микросистемная техника. Опубликовано 40 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса 20. E-mail: ostertak@ngs.ru, ostertak@corp.nstu.ru).

**Ostertak Dmitriy Ivanovich** (b. 1983) – Candidate of Sciences (Eng.), associate professor, associate professor of the department of semiconductor devices and microelectronics at the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nano- and microsystem engineering. He is the author of 40 scientific papers. (Address: 20, Kark Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: ostertak@ngs.ru, ostertak@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 22 февраля 2017 г.*

*Received February 22, 2017*

---

To Reference:

Ostertak D.I. Analiz elektrosticheskikh vzaimodeistvii v ploskoparallelnykh MEMS s uchetoм kraevykh effektov v 3D-priblizhenii [An analysis of electrostatic interactions in parallel-plate MEMS with regard to fringing field effects within a 3D-approach]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2017, no. 1 (34), pp. 116–132. doi: 10.17212/1727-2769-2017-1-116-132