ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2017 июль–сентябрь № 3 (36)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.242.5

БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ПЛАНИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ТРАНСПОРТНЫМИ ПОТОКАМИ

В.И. Хабаров[1], А.А. Теселкин[2]

[1]*Сибирский государственный университет путей сообщения*

[2]*Новосибирский государственный технический университет*

Рассматривается байесовский подход для задачи планирования наблюдений за транспортными потоками. Проблема является актуальной при организации мониторинга транспортных потоков для оценки корреспонденций. Применение байесовского подхода позволяет учесть априорную информацию о характере транспортных потоков, которая может быть получена из данных предыдущих обследований и прогнозных транспортных моделей. Задача планирования наблюдений сводится к задаче распределения ресурса на узлах транспортной сети. Рассматривается модель наблюдения за потоками, которая предполагает определение количества переходов транспортных средств из одного узла сети в другой. Для описания модели используется марковская цепь с дискретным временем. Матрица переходных вероятностей цепи оценивается с помощью байесовского метода на основе наблюдений за цепью в некоторые интервалы времени. Для предлагаемой модели наблюдений строится информационная матрица Фишера для байесовского случая. Задача распределения ресурса для наблюдения решается с применением методов оптимального планирования эксперимента. Задача планирования сводится к задаче нелинейного программирования с линейными ограничениями. Приводится пример и предлагается интерпретация полученных результатов для использования в практических целях.

Ключевые слова: транспортная сеть, матрица корреспонденции, марковские цепи, оптимальное планирование экспериментов, байесовский подход.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-3-105-118

Введение

Проблема оптимального планирования наблюдений за потоками в транспортной сети актуальна для задач организации системного мониторинга транспортных потоков, оценки матриц корреспонденций, калибровки транспортных моделей и т. д. Для решения таких задач транспортная сеть представляется в виде графа, вершины которого являются узлами сети, а дуги графа – отрезками (дорогами, путями), соединяющими узлы сети [1, 2]. Транспортные потоки на сети определяются весами на дугах графа.

Транспортная сеть является распределенным в пространстве объектом, поэтому процесс наблюдения за потоками затратен. Существуют физические и технологические ограничения при наблюдении за транспортной сетью. Эти ограничения порождают 5 основных моделей наблюдения на графе [3].

1. Модель наблюдения в узле.
2. Модель наблюдения на ребре.
3. Модель наблюдения за перетоком в сети.
4. Модель наблюдения за маршрутом.
5. Модель наблюдения за корреспонденцией.

Для рассмотренных моделей наблюдения встает вопрос о физической реализации способа наблюдения. В этой связи важно отметить, что модели наблюдения 1–3 *можно реализовать посредством локальных независимых наблюдателей*. Все остальные модели предполагают сетевую распределенную модель наблюдения, которую достаточно сложно осуществить физически. Под *наблюдателем* понимается некоторый агент, выполняющий учет перераспределения транспортных потоков. В качестве агента, например, можно рассмотреть учетчика, фиксирующего в режиме реального времени потоки, или камеру видеонаблюдения.

Зачастую имеется возможность собирать информацию только локально, в пределах одного узла или отрезка транспортной сети (модели наблюдения 1–3). Проведение подобных наблюдений также является дорогостоящим мероприятием, поэтому необходимо тщательно подходить к выбору точек для наблюдения, т. е. необходимо, чтобы наблюдения были максимально информативны. Возникает задача оптимального планирования наблюдений.

В последнее время было рассмотрено множество подходов, исследующих эту проблему. Обзор подобных работ представлен в [4]. В оригинальной статье [5] был предложен класс задач, получивший название задачи traffic counting location (TCL). Сформулированные в этой работе и уточненные в дальнейшем принципы предполагают наличие у исследователя информации о существующих корреспонденциях, что не всегда доступно и сужает круг применения результатов работы только до обновления имеющихся матриц корреспонденции.

Поэтому представляет интерес круг задач, в котором потоки в транспортной сети могут быть описаны с помощью некоторой статистической модели. В качестве примера можно привести представление перемещений микрообъекта в сети в виде марковской цепи [6]. В работе [3] было описано применение моделей для задач оценки транспортных корреспонденций. В работе [7] для планирования наблюдений применяются классические методы теории оптимального планирования эксперимента, при этом задача планирования наблюдений рассматривается как задача распределения ресурса на узлах транспортной сети. В данной статье предлагается развитие ранее предложенных методов в случае применения байесовского подхода к задаче планирования.

1. Марковская модель транспортных потоков

Пусть граф транспортной сети, или транспортный граф $G(V, E)$, состоит из m узлов. Рассматривается задача определения транспортных потоков в сети G при модели наблюдения, реализуемой посредством локальных независимых наблюдателей.

Наблюдение происходит в узлах сети G. Каждый наблюдатель в некоторый интервал времени t фиксирует количество переходов микрообъектов из узла с номером i в узел с номером j. Интерпретация для задачи определения транспортных потоков может быть следующей: при наблюдении в узле i в некоторые определенные интервалы времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$ фиксируется перераспределение транспортных средств.

Таким образом, наблюдатель фиксирует только переходы в рамках одного узла, не учитывая при этом предыдущую траекторию объекта. Эта модель позволяет говорить о процессе как о цепи Маркова с дискретным временем и с матрицей переходных вероятностей $P = \{p_{ij}\}$ $(i, j = 1, \dots, m)$. Каждое состояние этой цепи ассоциировано с некоторой вершиной графа G.

Во многих случаях исследователь обладает априорной информацией о структуре отдельных элементов матрицы переходных вероятностей. С точки зрения задачи планирования наблюдений за транспортными потоками, исследователь может располагать априорными данными о перераспределении потоков. Они могут быть получены на основе результатов моделирования, экспертным путем или из данных предыдущих наблюдений.

Предлагается рассмотреть *байесовский метод оценки* переходных вероятностей на основе наблюдений за цепью в интервалы времени $t = \{0,1,\dots,T\}$ и на основе априорной информации. Исходными данными является статистика $n_{ij} = \sum_{t=0}^{T} n_{ij}(t)$, где $n_{ij}(t)$ – количество переходов цепи из состояния *i* в состояние *j* в интервал времени *t*, a_{ij} – количество переходов цепи из состояния *i* в состояние *j*. Пусть $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$ – общее число переходов цепи за время *T* в состоянии *i*, $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ – общее число переходов за время *T*, $a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ – априорная информация об общем числе переходов цепи в состоянии *i*.

Транспортный граф с известной структурой предполагает наличие информации о разрешенных переходах из состояния *i*. Для учета этой информации далее будет использоваться понятие «емкость состояния». Под емкостью состояния $s_i, i = 1,...,m,$ будем понимать количество выходящих дуг m_i из вершины графа сети с номером *i*. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1\,, p_{ij} > 0,\ i = 1,\dots,m\,.$$

Далее будут рассматриваться только разрешенные переходы из состояния *i*, т. е. такие, что $p_{ij} > 0$. Это избавит в дальнейшем от необходимости оговаривать условия использования выражений типа p_{ij}^{-1} или $\log p_{ij}$. Под выражениями вида a_{im_i}, n_{im_i} и p_{im_i} будут пониматься последние ненулевые элементы в строке *i*, а под выражениями вида $\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}, \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij}, \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ – суммы ненулевых элементов.

Рассмотрим теорему Байеса [8]:

$$f_p(P|n) = \frac{f(P)\cdot f(n|P)}{f(n)} = \frac{f(P)\cdot L(n,P)}{f(n)}\,, \tag{1}$$

где $f_p(P|n)$ – апостериорная плотность вероятности; $f(P)$ – априорная плотность распределения параметров; $L(n,P)$ – функция правдоподобия.

В качестве априорного распределения параметров может быть взято многомерное бета-распределение, поскольку оно является сопряженным распределением к мультиномиальному. Плотность вероятности совместного распределения всех p_{ij} может быть записана в следующем виде [8]:

$$\prod_{i=1}^{m} f(p_{i1},...,p_{im_i}) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{m_i} \Gamma\left(a_{ij}\right)} \cdot \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{\,a_{ij}-1} \right). \tag{2}$$

Функция правдоподобия в этом случае пропорциональна:

$$L(n,P) \sim \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{\,n_{ij}} = \prod_{i=1}^{m} p_{i1}^{n_{i1}}\, p_{i2}^{n_{i2}} \ldots p_{im_i-1}^{n_{im_i-1}} \left(1-\sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}\right)^{n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}} .$$

Апостериорная плотность вероятности также принадлежит к классу многомерных бета-распределений [9]:

$$f_p(P|n) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} n_{ij} + a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{m_i} \Gamma\left(n_{ij}+a_{ij}\right)} \prod_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}^{\,n_{ij}+a_{ij}-1} \left(1-\sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}\right)^{n_{im_i}+a_{im_i}-1} \right). \qquad (3)$$

С помощью моды апостериорного распределения (3) оценки p_{ij} могут быть получены в виде

$$p_{ij}^{*} = \frac{n_{ij}+a_{ij}-1}{n_i + a_i - m_i},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,m_i .$$

2. Вычисление информационной матрицы Фишера

Рассмотрим информационную матрицу Фишера для байесовского случая. В качестве функции правдоподобия взята апостериорная плотность вероятности.

$$I\left(P|n\right) = E\left(\frac{\partial \ln f_p\left(P|n\right)}{\partial P}\right)^2 .$$

Поскольку

$$E\left(\frac{\partial \ln f_p\left(P|n\right)}{\partial p_{ij}}\right) = E\left(\frac{n_{ij}+a_{ij}-1}{p_{ij}} - \frac{n_{im_i}+a_{im_i}-1}{p_{im_i}}\right) =$$

$$= \frac{n_i p_{ij}+a_{ij}-1}{p_{ij}} - \frac{n_i p_{im_i}+a_{im_i}-1}{p_{im_i}} = \frac{a_{ij}-1}{p_{ij}} - \frac{a_{im_i}-1}{p_{im_i}} \neq 0 ,$$

то условие регулярности для байесовского случая не выполняется.

Рассмотрим приведенный ниже результат, который будет полезен для вычисления информационной матрицы Фишера.

Утверждение

Для вычисления информационной матрицы Фишера для апостериорного распределения может быть использовано следующее соотношение:

$$I(\Theta|X) = E_x\left[\left(\frac{\partial \ln g(\Theta|X)}{\partial\Theta}\right)^T \left(\frac{\partial \ln g(\Theta|X)}{\partial\Theta}\right)\right] =$$

$$= -E_x\left[\left(\frac{\partial^2 \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)^T \left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right) = I(X|\Theta) + I(\Theta) , \qquad (4)$$

при выполнении условия регулярности для $g(X|\Theta)$, где $g(\Theta|X)$ – апостериорная плотность распределения; X – выборочные данные; Θ – вектор оцениваемых параметров.

Доказательство

Исходя из формулы Байеса (1) верно следующее выражение:

$$\ln g(\Theta|X) = \ln g(X|\Theta) + \ln g(\Theta) - \ln g(X).$$

Соответственно, верно равенство и для производных:

$$\frac{\partial \ln g(\Theta|X)}{\partial\Theta} = \frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}. \tag{5}$$

Исходя из определения и соотношения (5) информационная матрица Фишера для апостериорного распределения равна

$$I(\Theta|X) = E_x\left[\left(\frac{\partial \ln g(\Theta|X)}{\partial\Theta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \ln g(\Theta|X)}{\partial\Theta}\right)\right] =$$

$$= E_x\left[\left(\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)\right] =$$

$$= E_x\left[\left(\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta}\right] + E_x\left[\left(\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{\mathrm{T}}\right]\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta} +$$

$$+\left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{\mathrm{T}} E_x\left[\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta}\right] + \left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{T}\left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right).$$

Поскольку условие регулярности для $g(X|\Theta)$ выполняется:

$$E_x\left[\frac{\partial \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta}\right] = 0.$$

Следовательно, информационную матрицу Фишера можно переписать в виде

$$I(\Theta|X) = -E_x\left[\left(\frac{\partial^2 \ln g(X|\Theta)}{\partial\Theta^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right)^{T}\left(\frac{\partial \ln g(\Theta)}{\partial\Theta}\right) = I(X|\Theta) + I(\Theta).$$

Согласно доказанному выше соотношению (4) для вычисления информационной матрицы может быть использовано следующее выражение:

$$I\left(P|n\right) = I\left(n|P\right) + I(P) =$$

$$= -E_n\left(\frac{\partial^2 \ln L(n,P)}{\partial P^2}\right) + \left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial P}\right)^{T}\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial P}\right). \tag{6}$$

Рассмотрим слагаемые в выражении (6) по отдельности. Первое слагаемое может быть вычислено следующим образом [7]:

$$I\left(n|P\right) = -E_n\left(\frac{\partial^2 \ln L\left(n,P\right)}{\partial P^2}\right) = E_n\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{n_{i1}}{p_{i1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i-1}}{p_{im_i-1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \end{bmatrix}$$

для всех $i = 1,...,m$. Предполагается, что

$$p_{im_i} = 1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}, \quad n_{im_i} = n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}, \quad a_{im_i} = a_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} a_{ij}.$$

Для мультиномиального распределения известно (см. [10]), что $E_n\left[n_{ij}\right] = n_i p_{ij}$ $\forall i = 1,\ldots,m; j = 1,...,m_i$, отсюда

$$E_n[A_i] = n_i \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{i1}} + \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i-1}} + \frac{1}{p_{im_i}} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Для вычисления второго слагаемого, согласно (6), необходимо найти производные логарифма априорной плотности функции (2):

$$\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial}{\partial p_{ij}}(\ln \Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right) - \sum_{j=1}^{m_i} \ln \Gamma(a_{ij}) + \sum_{j=1}^{m_i-1}(a_{ij}-1)\ln p_{ij} +$$

$$+\left(a_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} a_{ij} - 1\right)\ln\left(1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}\right) = \frac{a_{ij}-1}{p_{ij}} - \frac{a_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} a_{ij} - 1}{1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}}. \tag{9}$$

Тогда, учитывая (9), второе слагаемое вычисляется следующим образом:

$$I(P) = \left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial P}\right)^T \left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial P}\right) = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix},$$

где B_{ik} – блок размера $m_i \times m_k$ с элементами:

$$b_{ijkl} = \left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}}\right)\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{kl}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\left(a_{ij}-1\right)}{p_{ij}} - \frac{\left(a_{im_i}-1\right)}{p_{im_i}}\right)\left(\frac{\left(a_{kl}-1\right)}{p_{kl}} - \frac{\left(a_{km_k}-1\right)}{p_{km_k}}\right) =$$

$$
= \frac{(a_{ij}-1)(a_{kl}-1)}{p_{ij}\,p_{kl}} - \frac{\left(a_{im_i}-1\right)(a_{kl}-1)}{p_{im_i}\,p_{kl}} -
$$

$$
- \frac{(a_{ij}-1)\left(a_{km_k}-1\right)}{p_{ij}\,p_{km_k}} + \frac{\left(a_{im_i}-1\right)\left(a_{km_k}-1\right)}{p_{im_i}\,p_{km_k}} . \qquad (10)
$$

3. Планирование наблюдений

Постановка задачи планирования экспериментов сводится к задаче распределения ресурса по узлам сети [7]. Наблюдатели фиксируют переходы микрообъектов, находясь в состояниях $\{s_1,\ldots,s_m\}$ в интервалы времени $t=\{0,1,\ldots,T\}$. На весь эксперимент отведен ресурс в N наблюдений. Каждый наблюдатель получает часть этого ресурса $\{n_i, i=1,..,m\}$ таким образом, что $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$. Требуется найти распределение $n=\{n_i,\ i=1,..,m\}$, максимизирующее некоторый функционал от информационной матрицы Фишера.

Для решения исходной задачи рассмотрим следующую постановку задачи планирования экспериментов:

$$
n^* = \operatorname{Arg}\max_n \Phi\left[E_P\left[I\left(P|n\right)\right]\right], \qquad (11)
$$

где Φ – некоторый критерий оптимальности.

Если рассматривать D-оптимальные планы, то задачу (11) можно переписать в виде

$$
n^* = \operatorname{Arg}\max_n \ln\det\left(E_P\left[I\left(n|P\right)\right] + E_P\left[I\left(P\right)\right]\right). \qquad (12)
$$

Для вычисления $E_P\left[I\left(n|P\right)\right]$ согласно (7) и (8) необходимо найти

$$
E_P\left[\frac{n_i}{p_{ij}} + \frac{n_i}{p_{im_i}}\right] = n_i\left(E_P\left[\frac{1}{p_{ij}}\right] + E_P\left[\frac{1}{p_{im_i}}\right]\right).
$$

Известно, что p_{ij} распределены как многомерное бета-распределение. Соответственно, исходя из определения математического ожидания,

$$
E_P\left[\frac{1}{p_{ik}}\right] = \int\ldots\int_0^1 \frac{1}{p_{ik}} f(p_{i1},\ldots,p_{im_i})\,dp_{i1}\ldots dp_{im_i} =
$$

$$
= \int\ldots\int_0^1 \frac{1}{p_{ik}} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{m_i}\Gamma\left(a_{ij}\right)} \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{\,a_{ij}-1}\,dp_{i1}\,\ldots\,dp_{im_i} =
$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{m_i} \Gamma\left(a_{ij}\right)} \int \ldots \int_0^1 p_{ik}{}^{a_{ik}-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m_i} p_{ij}{}^{a_{ij}-1}\, dp_{i1} \ldots dp_{im_i} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{m_i} \Gamma(a_{ij})} \frac{\Gamma(a_{ik}-1)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m_i} \Gamma(a_{ij})}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}-1\right)} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}-1}{a_{ik}-1} = \frac{a_i-1}{a_{ik}-1}. \quad (13)$$

Таким образом, учитывая (8) и (13),

$$E_P\left[E_n[A_i]\right] = \begin{cases} n_i(a_i-1)\left(\dfrac{1}{a_{ij}-1} + \dfrac{1}{a_{im_i}-1}\right) \text{ для диагональных элементов,} \\ n_i \dfrac{(a_i-1)}{a_{im_i}-1} \text{ для } \textit{вне}\text{диагоналдьных элементов.} \end{cases} \quad (14)$$

Для вычисления $E_P\left[I(P)\right]$ необходимо отметить, что $\forall i \neq j$ блоки матрицы $E_P[B_{ij}]$ являются нулевыми, так как

$$E_P\left[\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}}\right)\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{kl}}\right)\right] = E_P\left[\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}}\right] E_P\left[\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{kl}}\right] = 0. \quad (15)$$

Как следствие, матрица $E_P\left[I\left(P\right)\right]$ является блочно-диагональной.

Исходя из соотношения (10) и определения математического ожидания,

$$E_P\left[\frac{1}{p_{ij}\,p_{il}}\right] = \int \ldots \int_0^1 \frac{1}{p_{ij}\,p_{il}} \cdot f(p_{i1},\ldots,p_{im_i})\, dp_{i1} \ldots dp_{im_i} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{s=1}^{m_i} a_{is}-1\right)\left(\sum_{s=1}^{m_i} a_{is}-2\right)}{(a_{ij}-1)(a_{il}-1)} = \frac{(a_i-1)(a_i-2)}{(a_{ij}-1)(a_{il}-1)}. \quad (16)$$

$$E_P\left[\frac{1}{p_{ij}\,p_{ij}}\right] = \frac{(a_i-1)(a_i-2)}{(a_{ij}-1)(a_{ij}-2)}. \quad (17)$$

Таким образом, с учетом (10), (16), (17) верно следующее соотношение при $j \neq l$:

$$E_P\left[\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}}\right)\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{il}}\right)\right] = (a_i-1)(a_i-2) - (a_i-1)(a_i-2) -$$

$$-(a_i-1)(a_i-2) + \frac{(a_i-1)(a_i-2)\left(a_{im_i}-1\right)}{\left(a_{im_i}-2\right)} = \frac{(a_i-1)(a_i-2)}{\left(a_{im_i}-2\right)}, \quad (18)$$

и, аналогично, при $j = l$:

$$E_P\left[\left(\frac{\partial \ln f(P)}{\partial p_{ij}}\right)^2\right] = (a_i - 1)(a_i - 2)\left(\frac{1}{(a_{ij} - 2)} + \frac{1}{\left(a_{im_i} - 2\right)}\right). \quad (19)$$

Таким образом, с учетом (7), (15)

$$E_P\left[I\left(n|P\right)\right] = E_P\left[I\left(n|P\right) + I(P)\right] = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & C_m \end{bmatrix}, \quad (20)$$

причем

$$C_i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & \cdots & c_{1(m_i-1)}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(m_i-1)1}^i & \cdots & c_{(m_i-1)(m_i-1)}^i \end{bmatrix},$$

где с учетом (14), (18), (19)

$$c_{kl}^i = \begin{cases} n_i(a_i - 1)\left(\dfrac{1}{a_{ik} - 1} + \dfrac{1}{a_{im_i} - 1}\right) + \\ +(a_i - 1)(a_i - 2)\left(\dfrac{1}{(a_{ik} - 2)} + \dfrac{1}{\left(a_{im_i} - 2\right)}\right) \ \text{при}\, k = 1; \\ n_i \dfrac{(a_i - 1)}{a_{im_i} - 1} + \dfrac{(a_i - 1)(a_i - 2)}{\left(a_{im_i} - 2\right)} \ \text{при}\, k \neq 1. \end{cases} \cdot \quad (21)$$

Учитывая блочно-диагональную структуру матрицы (20), имеем

$$\ln\det E_P\left[I\left(n|P\right) + I\left(P\right)\right] = \ln\prod_{i=1}^{m}\det C_i = \sum_{i=1}^{m}\ln\det C_i .$$

Таким образом, задачу (12) можно переписать в виде

$$n^* = \operatorname{Arg}\max_n\left(\sum_{i=1}^{m}\ln\det C_i\right), \quad (22)$$

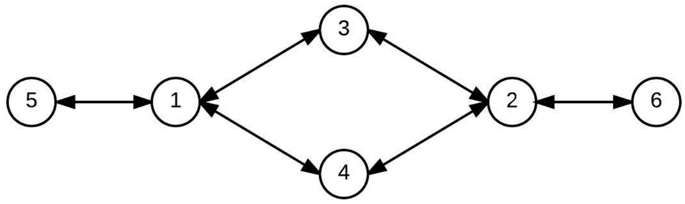
с учетом ограничений:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N, \ \forall i = 1,...,m \ \ n_i \geq 0 .$$

Оптимизационная задача (22) является нелинейной с линейными ограничениями и может быть решена с помощью численных методов. Важно отметить, что $\det C_i$ является полиномиальной функцией от n_i степени $m_i - 1$, соответственно распределение ресурса (план эксперимента) по узлам будет зависеть от количества выходящих дуг $m_i - 1$ и от априорных распределений a_{ij} .

4. Пример

Рассмотрим решение задачи на примере простой сети, представленной на рисунке. Микрообъекты могут перемещаться по сети от узла 5 к узлу 6 и наоборот. Известны априорные значения перераспределения микрообъектов a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}.



Тестовая транспортная сеть
Test transportation network

Важно отметить, что интерес для задачи распределения ресурса представляют только узлы 1 и 2, поскольку вероятности перехода из них могут отличаться от 0 и 1. В таком случае задаче (22) соответствуют ограничения $n_1 + n_2 = N$ и $n_1 \ge 0,\ n_2 \ge 0$.

Таким образом, согласно (21), $E_P\left[I\left(n\middle|P\right)\right]$ для рассматриваемого примера равна

$$E_P\left[I\left(n\middle|P\right)\right] = \begin{pmatrix} q_1 \cdot n_1 + r_1 & 0 \\ 0 & q_2 \cdot n_2 + r_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} q_i &= (a_i - 1)\left(\frac{1}{a_{i3} - 1} + \frac{1}{a_{i4} - 1}\right); \\ r_i &= (a_i - 1)(a_i - 2)\left(\frac{1}{(a_{i3} - 2)} + \frac{1}{(a_{i4} - 2)}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда выражение (22) может быть переписано в виде

$$n^* = \operatorname*{Arg\,max}_n \left(\ln\left(q_1 n_1 + r_1\right) + \ln\left(q_2 n_2 + r_2\right)\right). \tag{24}$$

Воспользуемся функцией Лагранжа

$$L\ (n,\ \lambda) = \ln(q_1 n_1 + r_1) + \ln(q_2 n_2 + r_2) + \lambda(n_1 + n_2 + N)$$

и найдем решение (24) с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial n_1} = \dfrac{q_1}{q_1 n_1 + r_1} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial n_2} = \dfrac{q_2}{q_2 n_2 + r_2} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = n_1 + n_2 - N = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Решением (25) являются:

$$n_1 = \frac{N}{2} + \frac{r_2}{2q_2} - \frac{r_1}{2q_1},$$

$$n_2 = \frac{N}{2} - \frac{r_2}{2q_2} + \frac{r_1}{2q_1}$$

или, учитывая (23):

$$n_1 = \frac{N}{2} + \frac{a_2 - 2}{2} \frac{(a_{23} + a_{24} - 4)}{(a_{23} + a_{24} - 2)} \frac{(a_{23} - 1)(a_{24} - 1)}{(a_{23} - 2)(a_{24} - 2)} -$$

$$- \frac{a_1 - 2}{2} \frac{(a_{13} + a_{14} - 4)}{(a_{13} + a_{14} - 2)} \frac{(a_{13} - 1)(a_{14} - 1)}{(a_{13} - 2)(a_{14} - 2)};$$

$$n_2 = \frac{N}{2} - \frac{a_2 - 2}{2} \frac{(a_{23} + a_{24} - 4)}{(a_{23} + a_{24} - 2)} \frac{(a_{23} - 1)(a_{24} - 1)}{(a_{23} - 2)(a_{24} - 2)} +$$

$$+ \frac{a_1 - 2}{2} \frac{(a_{13} + a_{14} - 4)}{(a_{13} + a_{14} - 2)} \frac{(a_{13} - 1)(a_{14} - 1)}{(a_{13} - 2)(a_{14} - 2)}.$$

При достаточно больших значениях $a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}$ решение может быть переписано в виде:

$$n_1 \approx \frac{N}{2} + \frac{a_2 - 2}{2} - \frac{a_1 - 2}{2},$$
$$n_2 \approx \frac{N}{2} - \frac{a_2 - 2}{2} + \frac{a_1 - 2}{2}. \qquad (26)$$

Интерпретация для результата (26) следующая. При двух узлах с одинаковым числом выходящих отрезков предпочтение, в большей степени, отдается тому узлу, который, по априорной информации, обладает меньшей интенсивностью. Это не противоречит интуиции, поскольку чем меньше объем априорных наблюдений в узле, тем выше вероятность ошибки в оценке перераспределения потоков.

Заключение

В работе рассмотрен байесовский подход к задаче организации мониторинга транспортных потоков с целью оценки транспортных корреспонденций. Предложена задача оптимального планирования наблюдений в виде задачи распределения ресурса по узлам марковской цепи с дискретным временем. Рассмотрены байесовский подход к задаче планирования экспериментов и соответствующая информационная матрица Фишера (6). Для планирования использованы D-оптимальные планы (12).

Задача планирования наблюдений сводится к нелинейной оптимизационной задаче с линейными ограничениями (22). План эксперимента (распределение ресурса) по узлам сети для байесовского подхода будет зависеть от количества выходящих дуг и величины априорных распределений потоков в узлах.

Полученные результаты могут применяться для организации обследований потоков на транспортной сети в целях калибровки транспортных моделей и первичной оценки матриц корреспонденции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / А.В. Гасников, С.Л. Кленов, Е.А. Нурминский, Я.А. Холодов, Н.Б. Шамрай, М.Л. Бланк, Е.В. Гасникова, А.А. Замятин, В.А. Малышев, А.В. Колесников, А.М. Райгородский; под ред. А.В. Гасникова. – М.: Изд-во МФТИ, 2010. – 360 с.
2. **Швецов В.И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
3. **Хабаров В.И., Теселкин А.А.** Марковские модели в задачах оценивания транспортных корреспонденций // Научный вестник НГТУ. – 2016. – № 1 (62). – С. 91–105. – doi: 10.17212/1814-1196-2016-1-91-105.
4. **Bera S., Krishna Rao K.V.** Estimation of origin-destination matrix from traffic counts: the state of the art // European Transport . – 2011. – Vol. 49. – P. 3–23.
5. **Yang H., Zhou J.** Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation // Transportation Research. Part B: Methodological. – 1998. – Vol. 32. – P. 109–126.
6. **Хабаров В.И., Молодцов Д.О., Хомяков С.В.** Марковская модель транспортных корреспонденций // Доклады ТУСУР. – 2012. – № 1 (25), ч. 1. – С. 113–117.
7. **Хабаров В.И., Теселкин А.А., Косолапов К.П.** Планирование экспериментов для оценки матрицы транспортных корреспонденций // Доклады АН ВШ РФ. – 2015. – № 3 (28). – С. 109–116.
8. **Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А.** Оценивание параметров марковских процессов по агрегированным временным рядам. – М.: Статистика, 1977. – 221 с.
9. **Martin J.J.** Bayesian decision problems and Markov chains. – New York: John Wiley and Sons, 1967. – 202 p.
10. Справочник по прикладной статистике. В 2 т. Т. 1 / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана; пер. с англ. под ред. Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 510 с.

BAYESIAN APPROACH TO THE PROBLEM OF PLANNING TRAFFIC FLOW OBSERVATIONS

Khabarov V.I.[1], Tesselkin A.A.[2]

[1]*Siberian Transport University, Novosibirsk, Russia*

[2]*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The Bayesian approach to the problem of planning traffic flow observations is considered in the paper. The problem is relevant in organizing traffic flow monitoring to estimate the origin-destination matrix. The Bayesian approach allows us to expand a set of tools appropriate for solving the design problem. The approach makes it possible to take into account prior information on the nature of traffic flows that can be obtained from the data of previous surveys and prediction traffic models. The problem of observation planning is reduced to the problem of resource allocation on the nodes of a transportation network. An observation model that is supposed to fix the number of vehicle transitions from one node to another is also considered. A Markov chain with discrete time is used to describe the model. The matrix of chain transition probabilities is estimated using the Bayesian method based on chain observations at discrete moments of time. A Fisher information matrix for the Bayesian case is constructed for the observation model proposed. The problem of resource allocation for observation is solved using optimal experimental design methods. The design problem is reduced to the non-linear programming problem with linear constraints. An example is given and the interpretation of the results obtained for practical use is provided.

Keywords: transportation network, origin-destination matrix, Markov chains, design of experiments, Bayesian approach.

DOI: 10.17212/1727-2769-2017-3-105-118

REFERENCES

1. Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskii E.A., Kholodov Ya.A., Shamrai N.B, Blank M.L., Gasnikova E.V., Zamyatin A.A., Malyshev V.A., Kolesnikov A.V., Raigorodskii A.M. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnyh potokov* [Introduction to the mathematical modelling of traffic flows]. Moscow, MFTI Publ., 2010. 360 p.
2. Shvetsov V.I. Matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Mathematical modelling of transport flows]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2003, no. 11, pp. 3–46. (In Russian).
3. Khabarov V.I., Tesselkin A.A. Markovskie modeli v zadachakh otsenivaniya transportnykh korrespondentsii [Using Markov models in problems of origin-destination matrix estimation]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (62), pp. 91–105. doi: 10.17212/1814-1196-2016-1-91-105.
4. Bera S., Krishna Rao K.V. Estimation of origin-destination matrix from traffic counts: the state of the art. *European Transport*, 2011, vol. 49, pp. 3–23.
5. Yang H., Zhou J. Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation. *Transportation Research. Part B: Methodological*, 1998, vol. 32, pp. 109–126.
6. Khabarov V.I., Molodtsov D.O. Khomyakov S.V. Markovskaya model' transportnykh korrespondentsii [Model Markov chains for transport correspondence]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*, 2012, no. 1 (25), pt. 1, pp. 113–117.
7. Khabarov V.I., Tesselkin A.A. Kosolapov K.P. Planirovanie eksperimentov dlya otsenki matritsy transportnykh korrespondentsii [Design of experiments for transport correspondence matrix estimation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. 109–116.
8. Lee T.C., Judge G.G., Zellner A. *Estimating the parameters of the Markov probability model from aggregate time series data*. Amsterdam, London, North-Holland, 1970. 254 p. (Russ. ed.: Li Ts., Dzhadzh D., Zel'ner A. *Otsenivanie parametrov markovskikh protsessov po agregiro-vannym vremennym ryadam*. Moscow, Statistika Publ., 1977. 221 p.).
9. Martin J.J. *Bayesian decision problems and Markov chains*. New York, John Wiley and Sons, 1967. 202 p.
10. Ledermann W., Lloyd E., eds. *Handbook of Applicable Mathematics*. Vol. 6. Statistics, pt. A. Chichester, John Wiley & Sons, 1984. 580 p. (Russ. ed.: Spravochnik po prikladnoi statistike. V 2 t. T. 1. Ed.by E. Lloid, U. Lederman. Translation ed. from English Yu.N. Tyurin. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1989. 510 p.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Хабаров Валерий Иванович – родился в 1951 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент Академии Высшей школы, заведующий кафедрой информационных технологий транспорта Сибирского государственного университета путей сообщения. Область научных интересов: искусственный интеллект, математическое моделирование транспортных потоков, планирование эксперимента. Опубликовано около 120 научных работ. (Адрес: 630049, Россия, Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191. E-mail: khabarov51@mail.ru).

Khabarov Valeriy Ivanovich (b. 1951) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, corresponding member of the Russian Higher School Academy of Sciences, Head of IT in Transport Department of Siberian Transport University. His research interests are currently focused on artificial intelligence, mathematical modelling of traffic flows, design of experiments. He is author of about 120 scientific papers. (Address: 191 D. Kovalchuk St., Novosibirsk, 630049, Russia. E-mail: khabarov51@mail.ru).

Теселкин Александр Александрович – родился в 1992 году, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: математическое моделирование транспортных потоков, методы планирования экспериментов. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: a.tesselkin@gmail.com).

Teselkin Alexandr Alexandrovich (b. 1992) – PhD student, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on mathematical modeling of traffic flows and design of experiments. He is the author of 20 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: a.tesselkin@gmail.com).

Статья поступила 15 сентября 2017 г.
Received September15, 2017

To Reference:

Khabarov V.I., Tesselkin A.A. Baiesovskii podkhod k zadache planirovaniya nablyudenii za transportnymi potokami [Bayesian approach to the problem of planning traffic flow observations]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2017, no. 3 (36), pp. 105–118. doi: 10.17212/1727-2769-2017-3-105-118