

УДК 550.837:517.958

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОНФОРМНЫХ СЕТОК С ШЕСТИГРАННЫМИ  
ЯЧЕЙКАМИ ДЛЯ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ  
АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ****М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, Д.С. Киселев,  
Н.В. Кондратьев, Ю.И. Кошкина, О.С. Трубачева***Новосибирский государственный технический университет*

Работа посвящена разработке методов численного 3D-моделирования технологий аэроэлектроразведки, позволяющих повысить вычислительную эффективность решения соответствующих прямых задач для сложно построенных трехмерных геологических моделей с изогнутыми поверхностями слоев и локальных неоднородностей при условии очень большого, порядка нескольких тысяч, положений приемно-генераторной установки. Методы основаны на использовании неконформных сеток с шестиугольными непрямоугольными ячейками, позволяющими с высокой точностью описывать изогнутые границы изучаемой среды, пространственно-временного группирования подзадач и прямых решателей систем линейных алгебраических уравнений. Приводится сравнительный анализ численных решений, получаемых на регулярных и соответствующих им (т. е. с таким же шагом в областях локальных сгущений) неконформных сетках, а также сравнительный анализ вычислительной эффективности для трехмерной многослойной геоэлектрической модели, содержащей целевой объект трубчатой формы, перекрытый латерально неоднородным верхним слоем, в условиях существенного перепада высот рельефа дневной поверхности. Результаты вычислительных экспериментов, проведенные для геоэлектрической модели, типичной для условий применения технологий аэроэлектроразведки, показали, что представленные методы позволяют сократить вычислительные затраты практически на два порядка: более чем на порядок за счет группирования подзадач и почти на порядок за счет использования не-регулярных неконформных сеток.

*Ключевые слова:* аэроэлектроразведка, метод конечных элементов, 3D-моделирование, неконформные сетки, электромагнитное поле.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-1-64-79

**Введение**

Технологии аэроэлектромагнитных исследований широко применяются при решении как поисковых геофизических задач (например, при поиске твердых полезных ископаемых [1, 2]), так и при решении инженерных задач [3]. Эти технологии позволяют обследовать большие площади за достаточно короткое время, обеспечивая при этом высокую плотность наблюдений. Отдельной проблемой является разработка математического аппарата и программного обеспечения для решения задач тестирования аэроэлектроразведочной аппаратуры [4, 5].

Поскольку технологии аэроэлектроразведки, как правило, нацелены на поиск локальных тел, не вызывает сомнений необходимость использования трехмерных подходов для обработки получаемых данных [1, 2, 6–10]. Численное моделирование многомерных геоэлектромагнитных полей является крайне ресурсоемким и поэтому требует разработки и применения вычислительно эффективных подходов

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00437 мол\_а.

© 2018 М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, Д.С. Киселев,  
Н.В. Кондратьев, Ю.И. Кошкина, О.С. Трубачева

и схем [11–16]. Дополнительной сложностью является то, что задачи аэроэлектроразведки относятся к классу «multisource» (системы наблюдений могут содержать десятки тысяч положений приемно-генераторной установки), и проблема повышения вычислительной эффективности для таких задач стоит наиболее остро. Кроме того, существенное влияние на измеряемые сигналы может оказать рельеф дневной поверхности, который может быть учтен либо с помощью «ступенчатой» аппроксимации [6, 17], либо с использованием сеток с ячейками гибкой (адаптирующейся под изогнутые границы среды) формы [18].

В данной работе для построения конечноэлементных аппроксимаций будут использованы неконформные сетки [17, 19–22] с ячейками гибкой формы (в виде шестигранников), сочетающие в себе возможности резкого сокращения дискретного аналога при сохранении требуемой точности численного решения и учета перепадов высот рельефа дневной поверхности и изменений глубин субгоризонтальных границ между слоями геологической модели.

### 1. Математические модели и конечноэлементные аппроксимации

Для расчета электромагнитного поля, возбуждаемого и принимаемого индукционными петлями аэросистемы, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля представляются в виде суммы двух составляющих:

$$\vec{E}^t = \vec{E}^P + \vec{E}^S, \quad \vec{B}^t = \vec{B}^P + \vec{B}^S, \quad (1)$$

где  $\vec{E}^P$  и  $\vec{B}^P$  – напряженность электрического и индукция магнитного первичных полей, возбуждаемых индукционным источником в относительно простой вмещающей среде, а  $\vec{E}^S$  и  $\vec{B}^S$  – напряженность электрического и индукция магнитного полей, определяемых влиянием трехмерной проводящей геологической среды [17, 23–28].

Если в качестве вмещающей среды взять однородное пространство (поскольку при существенном влиянии рельефа поверхности Земли и негоризонтальных границ ее верхних слоев вся проводящая среда является фактически трехмерной), то вторичное поле (поле влияния трехмерной проводящей геологической среды)  $\vec{E}^S(x, y, z, t)$  без учета токов смещения в трехмерной расчетной области  $\Omega$  может быть найдено из решения векторного дифференциального уравнения для вектор-потенциала  $\vec{A}^S(x, y, z, t)$ :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^S \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}^S}{\partial t} = \sigma \vec{E}^P + \nabla \times \left( \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \nabla \times \vec{A}^P \right). \quad (2)$$

Вектор-потенциал  $\vec{A}^S$  связан с  $\vec{E}^S$  соотношением  $\vec{E}^S = -\frac{\partial \vec{A}^S}{\partial t}$ , а с  $\vec{B}^S$  – соотношением  $\vec{B}^S = \nabla \times \vec{A}^S$  (аналогично и вектор-потенциал  $\vec{A}^P$  связан с  $\vec{E}^P$  и  $\vec{B}^P$  соотношениями  $\vec{E}^P = -\frac{\partial \vec{A}^P}{\partial t}$  и  $\vec{B}^P = \nabla \times \vec{A}^P$ ). В уравнении (2)  $\mu$  – магнитная проницаемость трехмерной среды;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость трехмерной среды. На удаленных границах  $\partial\Omega$  трехмерной расчетной области  $\Omega$  задаются нулевые касательные составляющие  $\vec{A}^S$ :

$$\vec{\mathbf{A}}^s \times \vec{\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (3)$$

где  $\vec{\mathbf{n}}$  – нормаль к границе  $\partial\Omega$ . Вектор-потенциал  $\vec{\mathbf{A}}^p$  может быть рассчитан как аналитически (с использованием закона Био–Савара–Лапласа), так и численно в результате решения осесимметричной задачи [5, 22].

Эквивалентная вариационная формулировка для уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}^s) (\nabla \times \vec{\mathbf{\Psi}}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}^s}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{\Psi}} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \sigma \vec{\mathbf{E}}^p \cdot \vec{\mathbf{\Psi}} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}^p) (\nabla \times \vec{\mathbf{\Psi}}) d\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\vec{\mathbf{\Psi}}(x, y, z)$  – пробная вектор-функция [22].

Решение  $\vec{\mathbf{A}}^s(x, y, z, t)$  ищется в виде

$$\vec{\mathbf{A}}^s = \sum_{i=1}^n q_i^s(t) \vec{\mathbf{\Psi}}_i(x, y, z), \quad (5)$$

где  $\vec{\mathbf{\Psi}}_i$  – базисные вектор-функции;  $n$  – их число (совпадающее с количеством нетерминальных ребер в трехмерной конечноэлементной сетке);  $q_i^s$  – искомые веса разложения  $\vec{\mathbf{A}}^s$  по базису  $\{\vec{\mathbf{\Psi}}_i\}$ . Принципы построения на неконформных сетках согласованных глобальных базисных вектор-функций из стандартных локальных edge-функций описаны в работе [17].

Подставляя соотношение (5) в уравнение (4) и заменяя пробную функцию  $\vec{\mathbf{\Psi}}$  в уравнении (4) поочередно всеми базисными функциями  $\vec{\mathbf{\Psi}}_i$ , получаем систему линейных уравнений

$$\mathbf{G}\mathbf{q}^s + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}^s}{\partial t} = \mathbf{f}, \quad (6)$$

где компоненты матриц  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{M}$  и вектора правой части  $\mathbf{f}$  определяются соотношениями

$$G_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{\mathbf{\Psi}}_i) (\nabla \times \vec{\mathbf{\Psi}}_j) d\Omega, \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \vec{\mathbf{\Psi}}_i \cdot \vec{\mathbf{\Psi}}_j d\Omega, \quad (7)$$

$$f_i = \int_{\Omega} \sigma \vec{\mathbf{E}}^p \cdot \vec{\mathbf{\Psi}}_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}^p) (\nabla \times \vec{\mathbf{\Psi}}_i) d\Omega. \quad (8)$$

Функции  $\vec{\mathbf{E}}^p(x, y, z, t)$  и  $\vec{\mathbf{A}}^p(x, y, z, t)$ , характеризующие первичное поле, также представляются в виде линейных комбинаций базисных вектор-функций  $\vec{\mathbf{\Psi}}_i$ :

$$\vec{\mathbf{E}}^p = \sum_{i=1}^n q_i^p(t) \vec{\mathbf{\Psi}}_i(x, y, z), \quad \vec{\mathbf{A}}^p = \sum_{i=1}^n q_i^{ap}(t) \vec{\mathbf{\Psi}}_i(x, y, z), \quad (9)$$

где веса  $q_i^P$  являются значениями касательной компоненты  $\bar{\mathbf{E}}^P$  на соответствующих ребрах конечноэлементной сетки, а веса  $q_i^{ap}$  – значениями касательной компоненты  $\bar{\mathbf{A}}^P$ . В этом случае вектор правой части  $\mathbf{f}$  системы уравнений (6) может быть вычислен в виде  $\mathbf{f} = \mathbf{M}\mathbf{q}^P + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{q}^{ap}$ , где  $\bar{\mathbf{G}}$  – это матрица с компонентами

$$\bar{G}_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) (\nabla \times \bar{\Psi}_i) \cdot (\nabla \times \bar{\Psi}_j) d\Omega. \quad (10)$$

Для повышения вычислительной эффективности при реализации представленной математической модели используется так называемое группирование подзадач, каждая из которых соответствует одному положению источника в пространстве и одному временному слою. Подзадачи объединяются в группу так, что получаемая в результате аппроксимации по пространству и времени матрица системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одинаковой. В этом случае при использовании для ее решения прямых методов наиболее вычислительно затратная операция, связанная с разложением матрицы СЛАУ на треугольные сомножители, выполняется только один раз сразу для всех подзадач из группы, а дополнительные вычислительные затраты для каждой подзадачи будут определяться только затратами на решение двух СЛАУ с треугольными матрицами-сомножителями. Группирование по пространству осуществляется путем использования (построения) единой конечноэлементной сетки для группы положений источника (см., например, работы [7, 17, 19]).

Аппроксимацию по времени мы будем выполнять с использованием многослойных неявных схем [12, 13, 22, 27, 29], и поэтому для группирования по времени необходимо использование специальной временной сетки, которая представляет собой объединение временных подынтервалов, внутри которых используется постоянный по времени шаг.

Так, после применения трехслойной неявной схемы для аппроксимации производных  $\frac{\partial \mathbf{q}^s}{\partial t}$  в системе уравнений (6), получим

$$\mathbf{G}\mathbf{q}^{s,j} + \frac{3}{2\delta t_j} \mathbf{M}\mathbf{q}^{s,j} = \mathbf{f}^j - \frac{1}{2\delta t_j} \mathbf{M}\mathbf{q}^{s,j-2} + \frac{2}{\delta t_j} \mathbf{M}\mathbf{q}^{s,j-1}, \quad (11)$$

где  $\delta t_j$  – шаг по времени на соответствующем подынтервале временной сетки, а  $\mathbf{q}^{s,j}$ ,  $\mathbf{q}^{s,j-1}$  и  $\mathbf{q}^{s,j-2}$  – значения вектора весов  $\mathbf{q}$  на текущем ( $j$ -м) и двух предыдущих временных шагах. При этом если текущий шаг ( $j$ -й) является первым шагом в очередном подынтервале постоянного шага временной сетки, то вместо  $\mathbf{q}^{s,j-2}$  берется значение  $\mathbf{q}^{s,j-k-1}$  в момент времени  $t_{j-k-1}$ , где  $k$  – целое число, которое определяет увеличение шага сетки на текущем временном подынтервале относительно предыдущего.

Для задания рельефа дневной поверхности и изогнутых границ между слоями геоэлектрической модели используются наборы точек  $\{x_p, y_p, z_p\}_m$ , где  $m$  – номер соответствующей поверхности (поверхность Земли, границы между слоями). По этим наборам строятся определяющие рельеф поверхности Земли и форму

границ между слоями сплайны  $Z_m(x, y)$  с использованием эрмитовых кусочно-бикубических базисных функций [22].

Для построения конечноэлементных аппроксимаций используются неконформные конечноэлементные сетки с ячейками в виде шестигранников. Построение таких сеток, в свою очередь, выполняется следующим образом. Сначала строятся псевдорегулярные прямоугольные сетки в шаблонных координатах  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  с оптимизацией числа узлов (в результате чего в сетке появляются так называемые терминальные (висячие) узлы [5, 17, 19–22]) по четырехэтапному алгоритму, который представлен в работе [17]. Затем выполняется их отображение в реальные координаты с необходимыми деформациями с использованием функций  $Z_m(x, y)$ .

В соответствии с принципами метода конечных элементов глобальные матрицы  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\bar{\mathbf{G}}$  собираются из локальных матриц конечных элементов  $\hat{\mathbf{G}}^e$ ,  $\hat{\mathbf{M}}^e$  и  $\hat{\bar{\mathbf{G}}}^e$ . Для расчета локальных матриц на шестиграннике  $\Omega_e$  вводится шаблонный (мастер-) элемент  $\Omega^{ME} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , на котором стандартным образом вводятся вектор-функции (edge-функции)  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$ . Отображение шаблонного элемента  $\Omega^{ME}$  в шестигранник  $\Omega_e$  (ячейку конечноэлементной сетки) определяется в виде:

$$x = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{z}_i, \quad (12)$$

где  $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i\}$  – координаты вершин шестигранника  $\Omega_e$ ,  $\hat{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta)$  – стандартные скалярные трilinearные базисные функции, определенные на шаблонном элементе  $\Omega^{ME}$  (каждая функция  $\hat{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta)$  является произведением трех линейных одномерных функций  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  вида  $W_-(\vartheta) = \frac{1-\vartheta}{2}$  или  $W_+(\vartheta) = \frac{1+\vartheta}{2}$  и равна единице в одной вершине  $\Omega^{ME}$ , которая отображается в узел  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$ , и нулю в остальных вершинах).

Локальные базисные вектор-функции  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$  на произвольном шестиграннике  $\Omega_e$  определяются через вектор-функции формы (edge-функции) шаблонного элемента  $\Omega^{ME}$  в виде

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_i(x, y, z) = \mathbf{J}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)), \quad i = 1, \dots, 12, \quad (13)$$

где  $\mathbf{J}(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$  – матрица отображения (12)  $\Omega^{ME}$  в  $\Omega_e$ .

С учетом (13) и (7)–(10) выражения для расчета компонент локальных матриц принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ij} &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mu} \text{rot } \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \cdot \text{rot } \hat{\boldsymbol{\psi}}_j d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{J}|} (\mathbf{J}^T \text{rot } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i) \cdot (\mathbf{J}^T \text{rot } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j) d\xi d\eta d\zeta, \\ \hat{M}_{ij} &= \int_{\Omega_e} \sigma \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}_j d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma (\mathbf{J}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i) \cdot (\mathbf{J}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

$$\hat{G}_{ij} = \int_{\Omega_e} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot } \hat{\psi}_i \cdot \text{rot } \hat{\psi}_j d\Omega =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{|J|} (\mathbf{J}^T \text{rot } \hat{\varphi}_i) \cdot (\mathbf{J}^T \text{rot } \hat{\varphi}_j) d\xi d\eta d\zeta,$$

где  $|J| = \det \mathbf{J}$ .

Техника сборки глобальных матриц из локальных с учетом принципов построения согласованных глобальных базисных вектор-функций на неконформных сетках описана в работе [17].

## 2. Результаты численных экспериментов

Сравнительный анализ численных решений, получаемых на регулярных и соответствующих им (т. е. с таким же шагом в областях локального сгущения) неконформных сетках, а также сравнительный анализ вычислительной эффективности проводился для трехмерной многослойной геоэлектрической модели, содержащей целевой объект трубчатой формы, перекрытый латерально неоднородным верхним слоем, в условиях существенного перепада высот рельефа дневной поверхности. Геоэлектрическая модель была построена как результат обобщения результатов интерпретации практических данных аэроэлектроразведки на нескольких участках.

На рис. 1 представлены сечения конечноэлементных сеток плоскостью  $y = \text{const}$ , пересекающей целевой объект и часть неоднородностей верхнего и нижнего слоев, для двух групп положений приемно-генераторных установок. На рисунках слева показаны конечноэлементные сетки для группы, расположенной над целевым объектом – значения координаты  $x$  (направленной вдоль профиля) для этих положений лежат в диапазоне от 3160 до 3320 м. На рисунках справа показаны сетки для группы положений приемно-генераторной установки, у которых значения координаты  $x$  лежат в диапазоне от 3650 до 3820 м. При этом в верхнем ряду рисунков представлены регулярные сетки, в которых сгущение выполнено в области расположения приемно-генераторных установок группы, а в нижнем ряду – соответствующие этим сеткам нерегулярные неконформные сетки, в которых в районе расположения приемно-генераторных установок размеры ячеек совпадают с размерами ячеек регулярных сеток.

На рис. 2, а показаны графики сигналов электромагнитного поля, рассчитанные вдоль профиля на различных временах после выключения импульса в источнике: 0.08, 0.12, 0.2, 0.312, 0.6 мс (расчет выполнялся в диапазоне от 0.01 до 10 мс). При этом светлыми линиями (со значками в виде ромбиков) показаны графики сигналов, рассчитанные для модели с целевым объектом (рис. 1), и, для сравнения (чтобы показать влияние целевого объекта), темными линиями (со значками в виде треугольничков) представлены графики сигналов без целевого объекта. На рис. 2 представлены отклонения решений (сигналов в приемнике), полученных на нерегулярных сетках, от решений, полученных на соответствующих регулярных сетках, вдоль профиля на пяти рассматриваемых временах для модели с целевым объектом.

Из представленных результатов видно, что отличие численных решений, полученных на регулярных и нерегулярных сетках, не превышает 1.5 %, а в среднем составляет порядка 0.5%. При этом влияние целевого объекта составляет порядка 30 %.

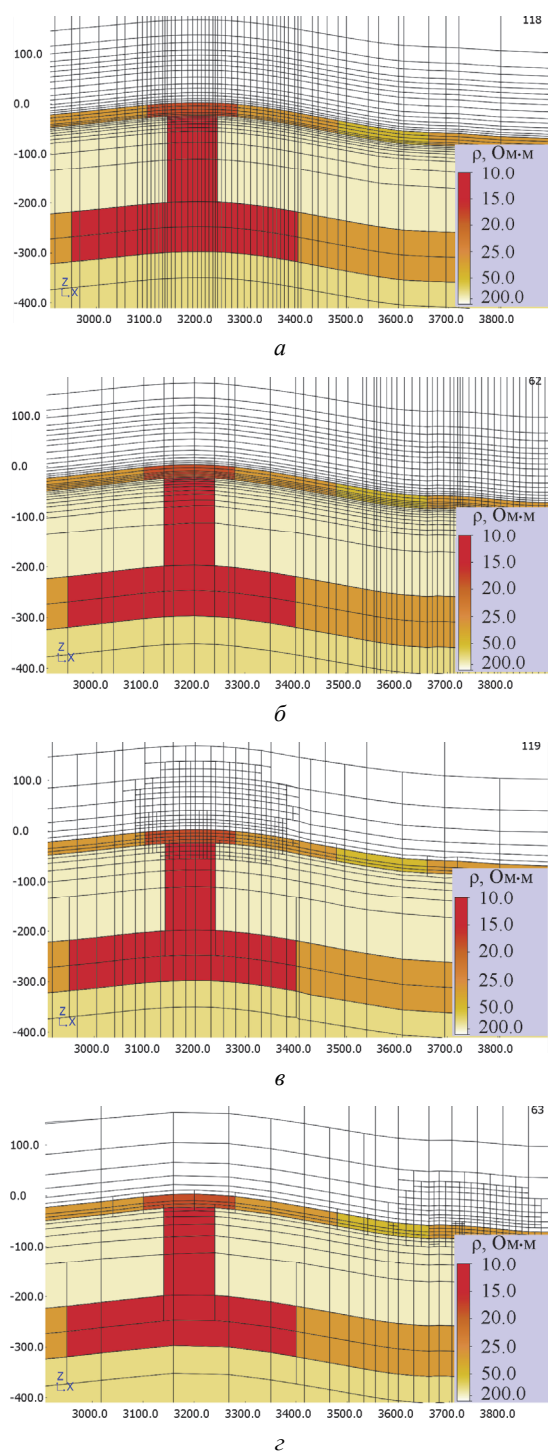


Рис. 1 – Регулярные (*a*, *б*) и соответствующие нерегулярные неконформные (*в*, *г*) конечноэлементные сетки

Fig. 1 – Regular (*a*, *b*) and corresponding irregular non-conforming (*c*, *d*) finite-element meshes

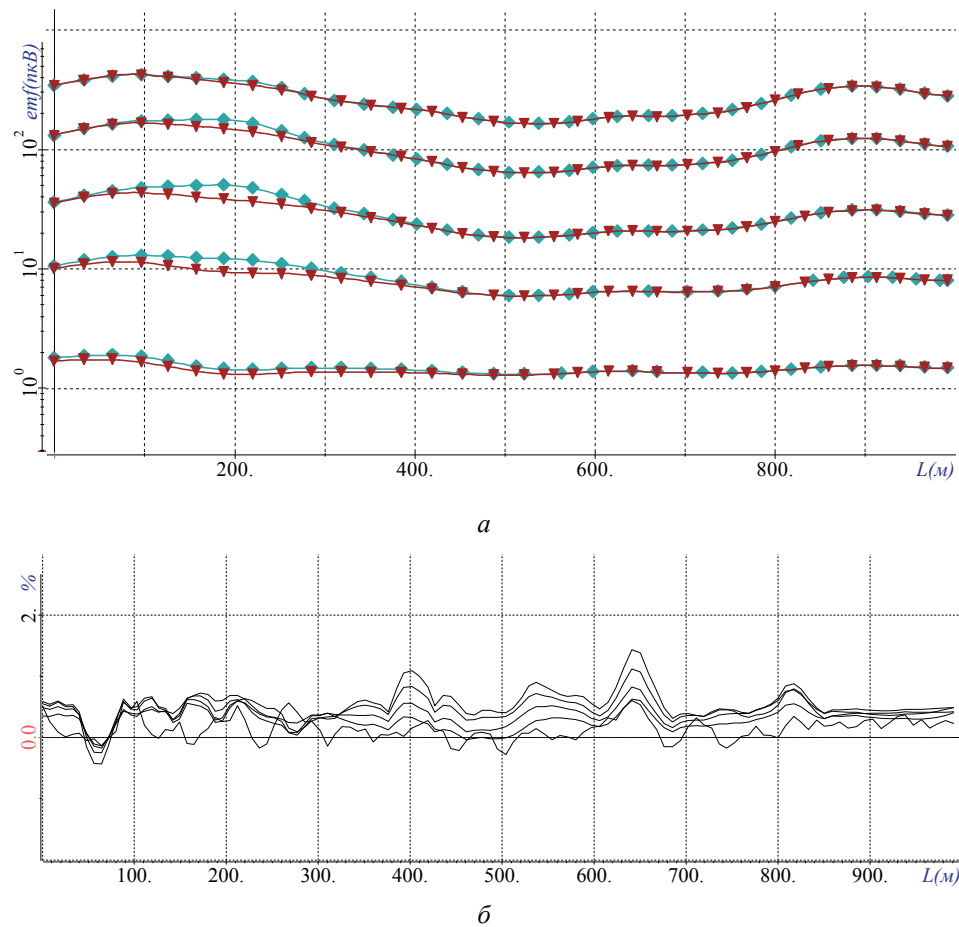


Рис. 2 – Графики сигналов аэросистемы вдоль профиля на различных временных каналах для геоэлектрической модели, содержащей целевой объект (светлые кривые с ромбиками), и не содержащей целевой объект (темные кривые с треугольничками) (а), и графики отклонений решений, полученных на неконформных и регулярных сетках (б)

Fig. 2. The plots of the aerosystem signals along the profile in different time channels for the geoelectrical model with a target object (light curves with rhombus) and without a target object (dark curves with triangles) (a) and the deviations of the results obtained on the non-conforming meshes from the those obtained on the regular ones (b)

Таким образом, можно заключить, что отклонения решений на регулярных и нерегулярных сетках являются несущественными для практики.

Проанализируем теперь вычислительные затраты, которые требовались для получения численного решения на регулярных и нерегулярных сетках. Численные эксперименты проводились на четырехъядерном компьютере с процессором Intel Core i7-3770K CPU 3.5 ГГц и 16 Гб оперативной памяти. В табл. 1 и 2 приведены характеристики конечноэлементных сеток (число степеней свободы для нерегулярной сетки определяется количеством нетерминальных ребер в ней) для различных групп, которые отличаются местоположением и количеством одновременно рассчитываемых положений приемно-генераторных установок, и соответствующее время счета для группы в целом и в пересчете на одно положение. Заметим, что приведенные в таблицах значения времени, требуемые для расчета одного положения, получены делением общего времени счета



на количество положений в группе. При этом расчет для группы, фактически содержащей одно положение, требует существенно больше времени и в среднем составил для регулярных сеток 503 с, а для нерегулярных – 66.5 с. Этот факт свидетельствует о том, что при использовании прямого решателя оптимальное группирование по пространству позволяет снизить вычислительные затраты более чем на порядок.

Особо заметим, что при использовании эффективных итерационных решателей вычислительные затраты, требуемые на расчет даже одного положения приемно-генераторной установки, в 2–3 раза выше, чем при использовании прямого решателя с группированием по временам (причем при использовании итерационных решателей шаг сетки по времени увеличивали плавно, и поэтому в ней было примерно в 1.5–2 раза меньше временных слоев).

В табл. 1 и 2 представлены вычислительные затраты для трех групп положений приемно-генераторной установки с существенно различающимся числом положений в группе (43, 33, 19). Сравнительный анализ этих вычислительных затрат позволяет сделать вывод, что использование неконформных сеток дает возможность сократить вычислительные затраты в 8–9 раз по сравнению с использованием регулярных сеток.

Таблица 1 / Table 1

**Размеры регулярных сеток и вычислительные затраты для них**

**The sizes of regular meshes and the computational costs**

№ группы	Число узлов	Число степеней свободы	Количество положений в группе	Общее время расчета группы, с	Время расчета на одно положение, с
17	215 025	634 108	43	2046	47.6
23	202 616	597 202	33	1825	55.3
24	170 240	501 184	19	1103	58

Таблица 2 / Table 2

**Размеры неконформных сеток и вычислительные затраты для них**

**The sizes of non-conforming meshes and their computational costs**

№ группы	Число узлов	Число степеней свободы	Количество положений в группе	Общее время расчета группы, с	Время расчета на одно положение, с
17	34 610	84 092	43	235	5.5
23	34 080	82 129	33	201	6.1
24	32 266	78 607	19	141	7.4

**Заключение**

Вычислительные эксперименты, проведенные для геоэлектрической модели, типичной для условий применения технологий аэроэлектроразведки, показали, что применение неконформных сеток с ячейками гибкой (адаптирующейся под изогнутые границы изучаемой среды) формы совместно с пространственно-временным группированием подзадач и использованием прямых решателей СЛАУ позволяет сократить вычислительные затраты практически на два порядка: более чем на порядок за счет группирования подзадач и почти на порядок за счет использования нерегулярных (неконформных) сеток. При этом вычислительные затраты на расчет сигналов для одного положения приемно-генераторной установки с использованием рассмотренных в данной работе методов примерно

в 30 раз ниже по сравнению с приведенными в работе [18], где применялось только группирование по времени, а в качестве ячеек гибкой формы были использованы тетраэдры (для описания рельефа поверхности Земли).

Полученные результаты делают возможным создание вычислительно эффективных процедур 3D-обработки данных аэроэлектроразведки, позволяющих выявлять в существенно неоднородных средах локальные поисковые объекты, дающие относительно небольшие отклики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kaminski V., Prikhodko A., Oldenburg D.** Using ERA low frequency E-field profiling and UBC 3D frequency-domain inversion to delineate and discover a mineralized zone in Porcupine district, Ontario, Canada // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2011. – Vol. 30 (1). – P. 1262–1266. – doi: 10.1190/1.3627433.
2. Parametric 3D inversion of airborne time domain electromagnetic / M.S. McMillan, D.W. Oldenburg, E. Haber, C. Schwarzbach // ASEG Extended Abstracts. – 2015. – Vol. 2015 (1). – P. 1–5. – doi: 10.1071/ASEG2015ab101.
3. Математический аппарат и программное обеспечение конечноэлементного 3D-моделирования для сопровождения электромагнитных методов инженерной геофизики / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, Д.В. Вагин, П.А. Домников, О.С. Трубачева // Инженерные изыскания. – 2015. – № 10–11. – С. 54–59.
4. **Тригубович Г.М., Персова М.Г., Саленко С.Д.** Аэрогеофизические вертолетные платформы серии «Импульс» для поисково-оценочных исследований // Приборы и системы разведочной геофизики. – 2006. – Т. 16, № 2. – С. 18–21.
5. Transient electromagnetic modelling of an isolated wire loop over a conductive medium / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, G.M. Trigubovich, D.V. Vagin, P.A. Domnikov // Geophysical Prospecting. – 2014. – Vol. 62 (5). – P. 1193–1201. – doi: 10.1111/1365-2478.12122.
6. **Yang D., Oldenburg D.W.** Three-dimensional inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to a porphyry deposit // Geophysics. – 2012. – Vol. 77, N 2. – P. B23–B34. – doi: 10.1190/geo2011-0194.1.
7. **Oldenburg D.W., Haber E., Shekhtman R.** Three dimensional inversion of multisource time domain electromagnetic data // Geophysics. – 2013. – Vol. 78 (1). – P. E47–E57. – doi: 10.1190/geo2012-0131.1.
8. **Liu Y., Yin C.** 3D inversion for multipulse airborne transient electromagnetic data // Geophysics. – 2015. – Vol. 81 (6). – P. E401–E408. – doi: 10.1190/geo2015-0481.1.
9. Geometrical nonlinear 3D inversion of airborne time domain EM data / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, Y.I. Koshkina, D.V. Vagin, O.S. Trubacheva // Near Surface Geoscience 2016 – First Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. Extended abstract. – Barcelona, 2016. – doi: 10.3997/2214-4609.201602114.
10. Methods and software to perform 3D-inversion of the airborne electrical prospecting data in time domain / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, E.I. Simon, Y.I. Koshkina, T.B. Epanchintseva // Geophysics 2015 – 11th EAGE International Scientific and Practical Conference and Exhibition on Engineering and Mining Geophysics, Gelendzhik, 20–24 April, 2015. – Gelendzhik, 2015. – P. 51DUMMY. – doi: 10.3997/2214-4609.201412271.
11. Математическое моделирование при разработке технологий для метода вызванной поляризации / В.С. Моисеев, М.Э. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.Г. Токарева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 135–146.
12. **Соловейчик Ю.Г., Персова М.Г., Тригубович Г.М.** Математическое моделирование процесса становления осесимметричного поля вертикальной электрической линии // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2003. – Т. 6, № 2. – С. 107–125.
13. Конечноэлементное моделирование электромагнитного поля для кругового электрического диполя в трехмерных средах / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.Э. Рояк, Г.М. Тригубович // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 114–129.

14. **Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Абрамов М.В.** Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 106–119.
15. О подходе к выполнению 3D-инверсий данных зондирования нестационарным электромагнитным полем на основе конечноэлементного моделирования / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, М.Г. Токарева, А.В. Чернышев // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 2. – С. 97–106.
16. Методы и алгоритмы восстановления трехмерной структуры проводимости и поляризуемости среды по данным электромагнитных зондирования на основе конечноэлементного 3D-моделирования / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович, М.Г. Токарева // Физика Земли. – 2013. – Т. 3. – С. 30–45.
17. Finite element solution to multidimensional multisource electromagnetic problems in the frequency domain using non-conforming meshes / Y.G. Soloveichik, M.G. Persova, P.A. Domnikov, Y.I. Koshkina, D.V. Vagin // Geophysical Journal International. – 2018. – Vol. 212 (3). – P. 2159–2193. – doi: 10.1093/gji/ggx530.
18. 3D time-domain airborne EM forward modeling with topography / C. Yin, Y. Qi, Y. Liu, J. Cai // Journal of Applied Geophysics. – 2016. – Vol. 134. – P. 11–22.
19. **Haber E., Schwarzbach C.** Parallel inversion of large-scale airborne time-domain electromagnetic data with multiple OcTree meshes // Inverse Problems. – 2014. – Vol. 30, N 5. – P. 055011. – doi: 0266-5611/14/055011.
20. **Grayver A.V.** Parallel three-dimensional magnetotelluric inversion using adaptive finite-element method. Part I: theory and synthetic study // Geophysical Journal International. – 2015. – Vol. 202, N 1. – P. 584–603. – doi: 10.1093/gji/ggv165.
21. **Соловейчик Ю.Г., Токарева М.Г., Персова М.Г.** Решение трехмерных стационарных задач электроразведки на нерегулярных параллелепипеидальных сетках // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2004. – № 1 (17). – С. 22–33.
22. **Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.** Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
23. **Mukherjee S., Everett M.E.** 3D controlled-source electromagnetic edge-based finite element modeling of conductive and permeable heterogeneities // Geophysics. – 2011. – Vol. 76 (4). – P. F215–F226. – doi: 10.1190/1.3571045.
24. A finite element multifrontal method for 3D CSEM modeling in the frequency domain / N.V. Da Silva, J.V. Morgan, L. MacGregor, M. Warner // Geophysics. – 2012. – Vol. 77. – P. E101–E115. – doi: 10.1190/geo2010-0398.1.
25. **Grayver A.V., Streich R., Ritter O.** Three-dimensional parallel distributed inversion of CSEM data using a direct forward solver // Geophysical Journal International. – 2013. – Vol. 193. – P. 1432–1446. – doi: 10.1093/gji/ggt055.
26. Методы и алгоритмы конечноэлементного моделирования геоэлектромагнитных полей от произвольно ориентированных катушек / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, П.А. Домников, Ю.И. Кошкина // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2014. – № 1 (22). – С. 123–134.
27. Application of the marine circular electric dipole method in high latitude Arctic regions using drifting ice floes / V. Mogilatov, M. Goldman, M. Persova, Y. Soloveichik, Y. Koshkina, O. Trubacheva, A. Zlobinskiy // Journal of Applied Geophysics. – 2016. – Vol. 135. – P. 17–31. – doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.007.
28. Comparison of approaches and the software for 3D finite element modeling of harmonic electromagnetic fields / D.S. Kiselev, M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, Y.I. Koshkina, D.V. Vagin, E.I. Simon // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering proceedings (APEIE-2016), Novosibirsk, 03–06 October 2016. – Novosibirsk, 2016. – Vol. 2. – P. 255–258.
29. **Кошкина Ю.И.** Моделирование процесса распространения упругих волн в осесимметричной среде // Актуальные проблемы электронного приборостроения: материалы XI международной конференции: АПЭП-2012, Новосибирск, 02–04 октября 2012 г.: в 7 т. – Новосибирск, 2012. – Т. 6. – С. 89–93. – doi: 10.1109/APEIE.2012.6629059.

# APPLICATION OF NON-CONFORMING MESHES WITH HEXAHEDRAL CELLS FOR 3D MODELLING OF AIRBORNE ELECTROMAGNETIC TECHNOLOGIES

**Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Kiselev D.S.,  
Kondratyev N.V., Koshkina Y.I., Trubacheva O.S.**  
*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The paper is devoted to the development of methods of numerical 3D modeling of airborne electromagnetic technologies, which make it possible to increase the computational effectiveness of solving the corresponding direct problems in complex geological media with incurved surfaces of layers and local inhomogeneities when the number of transmitter-receiver positions is very big, about several thousands. The methods are based on the use of non-conforming hexahedral non-rectangular cells which allow a highly accurate description of incurved surfaces of the medium studied, space-time grouping of the problems, and direct solvers of linear algebraic equation systems. We present a comparative analysis of the numerical solutions obtained on regular and corresponding (with the same step-size in the subdomains of local refinements) non-conforming meshes, as well as a comparative analysis of computational effectiveness for the 3D multilayered geoelectrical model containing a target object which has a tube-like shape and is covered by a lateral inhomogeneous layer under significant changes in height of the surface relief. Numerical experiments are performed for the geoelectrical model, which is typical of the application of airborne electromagnetic technologies. The results of these experiments show that the methods proposed make it possible to lower computational costs approximately by two orders – more than an order due to grouping the problems and approximately by an order due to the use of non-regular non-conforming meshes.

**Keywords:** Airborne electromagnetic survey, finite element method, 3D modeling, non-conforming meshes, electromagnetic field.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-1-64-79

## REFERENCES

1. Kaminski V., Prikhodko A., Oldenburg D. Using ERA low frequency E-field profiling and UBC 3D frequency-domain inversion to delineate and discover a mineralized zone in Porcupine district, Ontario, Canada. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2011, vol. 30 (1), pp. 1262–1266. doi: 10.1190/1.3627433.
2. McMillan M.S., Oldenburg D.W., Haber E., Schwarzbach C. Parametric 3D inversion of airborne time domain electromagnetics. *ASEG Extended Abstracts*, 2015, vol. 2015 (1), pp. 1–5. doi: 10.1071/ASEG2015ab101.
3. Soloveichik Yu.G., Persova M.G., Vagin D.V., Domnikov P.A., Trubacheva O.S. Matematicheskii apparat i programnoe obespechenie konechnoelementnogo 3D-modelirovaniya dlya soprovozhdeniya elektromagnitnykh metodov inzhenernoi geofiziki [Mathematical apparatus and software of 3D finite element modeling for supporting electromagnetic methods of engineering geophysics]. *Inzhenernye izyskaniya – Engineering Surveys*, 2015, no. 10–11, pp. 54–59.
4. Trigubovich G.M., Persova M.G., Salenko S.D. Aerogeofizicheskie vertoletnye platformy serii "Impul's" dlya poiskovo-otsenochnykh issledovaniy [Aerogeophysical helicopter platforms of the Impulse series for search and evaluation studies]. *Pribory i sistemy razvedochnoi geofiziki – Devices and Systems of Exploration Geophysics*, 2006, vol. 16, no. 2, pp. 18–21.
5. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Trigubovich G.M., Vagin D.V., Domnikov P.A. Transient electromagnetic modelling of an isolated wire loop over a conductive medium. *Geophysical Prospecting*, 2014, vol. 62 (5), pp. 1193–1201. doi: 10.1111/1365-2478.12122.
6. Yang D., Oldenburg D.W. Three-dimensional inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to a porphyry deposit. *Geophysics*, 2012, vol. 77, no. 2, pp. B23–B34. doi: 10.1190/geo2011-0194.1.
7. Oldenburg D.W., Haber E., Shekhtman R. Three dimensional inversion of multisource time domain electromagnetic data. *Geophysics*, 2013, vol. 78 (1), pp. E47–E57. doi: 10.1190/geo2012-0131.1.

8. Liu Y., Yin C. 3D inversion for multipulse airborne transient electromagnetic data. *Geophysics*, 2015, vol. 81 (6), pp. E401–E408. doi: 10.1190/geo2015-0481.1.
9. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Koshkina Y.I., Vagin D.V., Trubacheva O.S. Geometrical nonlinear 3D inversion of airborne time domain EM data. *Near Surface Geoscience 2016 – First Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. Extended abstract*, Barcelona, Spain, 2016. doi: 10.3997/2214-4609.201602114.
10. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Simon E.I., Koshkina Y.I., Epanchintseva T.B. Methods and software to perform 3D-inversion of the airborne electrical prospecting data in time domain. *Geophysics 2015 – 11th EAGE International Scientific and Practical Conference and Exhibition on Engineering and Mining Geophysics*, Gelendzhik, 20–24 April 2015, p. 51DUMMY. doi: 10.3997/2214-4609.201412271.
11. Moiseev V.S., Royak M.E., Soloveichik Y.G., Persova M.G., Tokareva M.G. Matematicheskoe modelirovanie pri razrabotke tekhnologii dlya metoda vyzvannoi polarizatsii [Mathematical modeling in the development of technologies for the method of induced polarization]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 1999, vol. 2, no. 2, pp. 135–146. (In Russian).
12. Soloveichik Y.G., Persova M.G., Trigubovich G.M. Matematicheskoe modelirovanie protsessov stanovleniya osesimmetrichnogo polya vertikal'noi elektricheskoi linii [Mathematical modeling of the processes of axisymmetric field by the vertical electric line]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 107–125. (In Russian).
13. Soloveichik Y.G., Persova M.G., Royak M.E., Trigubovich G.M. Konechnoelementnoe modelirovanie elektromagnitnogo polya dlya krugovogo elektricheskogo dipolya v trekhmernykh sredakh [Finite element modeling of the electromagnetic field for a circular electric dipole in three-dimensional media]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 114–129. (In Russian).
14. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Abramov M.V. Konechnoelementnoe modelirovanie geoelektromagnitnykh polei, vzbuzhdaemykh gorizonta'noi elektricheskoi liniiei [Finite elements modeling of geomagnetic electric fields excited by a horizontal charged rod]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 106–119. (In Russian).
15. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Tokareva M.G., Chernyshev A.V. O podkhode k vypolneniyu 3D-inversii dannykh zondirovaniya nestatsionarnym elektromagnitnym polem na osnove konechnoelementnogo modelirovaniya [On the approach to execution of 3D-inversions of data obtained by non-stationary electromagnetic fields sounding based on finite element modeling]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2, pp. 97–106.
16. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Trigubovich G.M., Tokareva M.G. Methods and algorithms for reconstructing three-dimensional distributions of electric conductivity and polarization in the medium by finite-element 3D modeling using the data of electromagnetic sounding. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2013, vol. 49 (3), pp. 329–343. doi: 10.1134/S1069351313030117. Translated from *Fizika Zemli*, 2013, vol. 3, pp. 30–45.
17. Soloveichik Y.G., Persova M.G., Domnikov P.A., Koshkina Y.I., Vagin D.V. Finite element solution to multidimensional multisource electromagnetic problems in the frequency domain using non-conforming meshes. *Geophysical Journal International*, 2018, vol. 212 (3), pp. 2159–2193. doi: 10.1093/gji/ggx530.
18. Yin C., Qi Y., Liu Y., Cai J. 3D time-domain airborne EM forward modeling with topography. *Journal of Applied Geophysics*, 2016, vol. 134, pp. 11–22.
19. Haber E., Schwarzbach C. Parallel inversion of large-scale airborne time-domain electromagnetic data with multiple OcTree meshes. *Inverse Problems*, 2014, vol. 30, no. 5, p. 055011. doi: 10.1088/0266-5611/30/5/055011.
20. Grayver A.V. Parallel three-dimensional magnetotelluric inversion using adaptive finite-element method. Part I: theory and synthetic study. *Geophysical Journal International*, 2015, vol. 202, no. 1, pp. 584–603. doi: 10.1093/gji/ggv165.
21. Soloveichik Y.G., Tokareva M.G., Persova M.G. Reshenie trekhmernykh statsionarnykh zadach elektrorazvedki na neregulyarnykh parallelepipedal'nykh setkakh [The solution of

- three-dimensional stationary problems EM survey on irregular parallelepipedal grids]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Irkutsk State Technical University*, 2004, no. 1 (17), pp. 22–33.
22. Soloveichik Y.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for the solution of scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 896 p.
  23. Mukherjee S., Everett M.E. 3D controlled-source electromagnetic edge-based finite element modeling of conductive and permeable heterogeneities. *Geophysics*, 2011, vol. 76 (4), pp. F215–F226. doi: 10.1190/1.3571045.
  24. Silva N.V. da, Morgan J.V., MacGregor L., Warner M. A finite element multifrontal method for 3D CSEM modeling in the frequency domain. *Geophysics*, 2012, vol. 77, pp. E101–E115. doi: 10.1190/geo2010-0398.1.
  25. Grayver A.V., Streich R., Ritter O. Three-dimensional parallel distributed inversion of CSEM data using a direct forward solver. *Geophysical Journal International*, 2013, vol. 193, pp. 1432–1446. doi: 10.1093/gji/ggt055.
  26. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Domnikov P.A., Koshkina Y.I. Metody i algoritmy konechnoelementnogo modelirovaniya geoelektromagnitnykh polei ot proizvol'no orientirovannykh katushek [Methods and algorithms of finite element modeling of geomagnetic electric fields excited by arbitrarily oriented coils]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 1 (22), pp. 123–134.
  27. Mogilatov V., Goldman M., Persova M., Soloveichik Y., Koshkina Y., Trubacheva O., Zlobinskiy A. Application of the marine circular electric dipole method in high latitude Arctic regions using drifting ice floes. *Journal of Applied Geophysics*, 2016, vol. 135, pp. 17–31. doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.007.
  28. Kiselev D.S., Persova M.G., Soloveichik Y.G., Koshkina Y.I., Vagin D.V., Simon E.I. Comparison of approaches and the software for 3D finite element modeling of harmonic electromagnetic fields. *13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering proceedings (APEIE-2016)*, IEEE, Novosibirsk, 03–06 October 2016, vol. 2, pp. 255–258.
  29. Koshkina Y.I. [The modeling of elastic waves propagation in an axisymmetric medium]. *Aktual'nye problemy elektronnoy priborostroeniya: materialy XI mezhdunarodnoi konferentsii: APEP-2012* [11th International conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2012): proceedings], Novosibirsk, 2–4 October 2012, pp. 89–93. doi: 10.1109/APEIE.2012.6629059.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Персова Марина Геннадьевна** – родилась в 1978 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики и электромеханики. Опубликовано более 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: persova@ami.nstu.ru).

**Persova Marina Gennad'evna** (b. 1978) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, professor at the applied Mathematics department, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on the finite element simulation of electromagnetic fields in geoelectric and electromechanical problems. She is the author of more than 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: persova@ami.nstu.ru).



**Соловейчик Юрий Григорьевич** – родился в 1957 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент САН ВШ, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных и тепловых полей. Опубликовано более 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru).

**Soloveichik Yuri Grigorievich** (b. 1957) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, head of the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling of electromagnetic and heat fields. He is the author of more than 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru).



**Вагин Денис Владимирович** – родился в 1985 году, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечно-элементное моделирование электромагнитных полей. Опубликовано более 70 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: vdv\_wk@mail.ru).

**Vagin Denis Vladimirovich** (b. 1985) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling of electromagnetic fields. He is the author of more than 70 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: vdv\_wk@mail.ru).



**Киселев Дмитрий Сергеевич** – родился в 1990 году, ассистент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: harlequin\_00@mail.ru).

**Kiselev Dmitry Sergeevich** (b. 1990) – an assistant lecturer at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling. He is the author of 20 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: harlequin\_00@mail.ru).



**Кондратьев Николай Владимирович** – родился в 1991 году, аспирант кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: разработка и оптимизация параллельных программ решения СЛАУ, полученных в результате конечноэлементной аппроксимации в задачах электромагнетизма в системах с общей и разделяемой памятью. Опубликовано 7 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: kondratyev@ami.nstu.ru).

**Kondratyev Nikolay Vladimirovich** (b. 1991) – a postgraduate student at the department of applied mathematics (his research advisor is Yuri G. Soloveichik), Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the development and optimizations of parallel programs, acceleration of numerical modeling on CPU and GPU devices, development and implementation of distributed calculation systems for numerical modeling. He is the author of 7 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: kondratyev@ami.nstu.ru).



**Кошкина Юлия Игоревна** – родилась в 1990 году, канд. техн. наук, ассистент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: разработка и реализация алгоритмов интерпретации данных электромагнитных зондирований. Опубликовано 30 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: koshkina\_yui@mail.ru).

**Koshkina Yulia Igorevna** (b. 1990) – Candidate of Sciences (Eng.), an assistant lecturer at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on the development and implementation of algorithms for data interpretation of electromagnetic sounding. She is the author of 30 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: koshkina\_yui@mail.ru).



**Трубачева Ольга Сергеевна** – родилась в 1986 году, ассистент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: решение обратных задач вызванной поляризации. Опубликовано 12 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: olga\_\_popova@mail.ru).

**Trubacheva Olga Sergeevna** (b. 1986) – an assistant lecturer at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on inverse problems of induced polarization. She is the author of 12 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: olga\_\_popova@mail.ru).

*Статья поступила 16 февраля 2018 г.*

*Received February 16, 2018*

---

To Reference:

Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Kiselev D.S., Kondratyev N.V., Koshkina Y.I., Trubacheva O.S. Primenenie nekonformnykh setok s shestigrannymi yacheikami dlya 3D-modelirovaniya tekhnologii aroelektrozvedki [Application of non-conforming meshes with hexahedral cells for 3D modelling of airborne electromagnetic technologies]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 1 (38), pp. 64–79. doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-64-79.