

УДК 519.6:539.3

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ
ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ
МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ****А.Н. Гришанов***Новосибирский государственный технический университет*

Рассмотрен метод построения сходящихся последовательностей решений в численных задачах расчета упругого деформируемого тела при использовании многосеточных конечных элементов (МнКЭ). Достоинством метода является фиксированность размерности основной системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ) при построении приближенных решений. Метод является аналогом *hp*-версии МКЭ увеличения размерности конечно-элементного представления области задачи. Апостериорные оценки погрешностей решений проводятся на основе метода ZZ, предложенного О.С. Zienkiewicz и J.Z. Zhu, в норме L_2 . При построении «точных» решений в методе ZZ используются МнКЭ, которые учитывают неоднородную структуру материалов и образуют дискретные модели малой размерности.

В качестве примера представлен анализ сходимости последовательности решений и оценок погрешностей в численном расчете напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек при локальном нагружении. Показано, что применение МнКЭ при традиционном способе измельчения сетки дискретизации (*h*-версия МКЭ) и предлагаемом методе порождает сходящиеся последовательности приближенных решений в норме L_2 . На основе метода ZZ найдены апостериорные оценки погрешностей. Проведено сравнение оценок погрешностей и характера сходимости в двух вариантах конечно-элементной дискретизации при использовании трехсеточных конечных элементов. Применение МнКЭ в предлагаемом методе построения приближенных решений позволяет получать системы уравнений МКЭ с малой размерностью, что обеспечивает экономию ресурсов ЭВМ в сравнении с традиционным способом дискретизации.

Ключевые слова: апостериорные оценки погрешности, модели дискретизации, сходимость последовательности решений, малая погрешность, упругость, цилиндрические оболочки, многосеточные конечные элементы.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-3-47-57

Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) широко используется для численного решения задач механики деформируемого твердого тела. В теории и практике МКЭ для получения сходящихся последовательностей решений с малыми погрешностями рассматривают и реализуют три основные версии МКЭ, которые связаны с разными методами увеличения размерности конечно-элементного представления исследуемой области задачи [1]. В *h*-версии МКЭ последовательное снижение погрешностей решения задачи связано с измельчением сетки дискретизации при фиксированной степени аппроксимирующих полиномов. В *p*-версии – неизменна сетка дискретизации, а сходимость решений определяется увеличением степени аппроксимирующих полиномов. В *hp*-версии одновременно осуществляются измельчение сетки дискретизации и увеличение степени аппроксимирующих полиномов. Каждый из этих вариантов построения последовательности решений

сопровождается ростом степеней свободы дискретного объекта исследования. Реализация требования получения решений с малой погрешностью может привести к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) МКЭ высокой размерности (порядка $10^7 - 10^{10}$). Другая причина высокой размерности СЛАУ при реализации МКЭ связана с необходимостью расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) в современных композитных материалах со сложной микроструктурой.

С помощью МКЭ численно исследуется НДС различных объектов, в частности однородных и композитных оболочек, которые широко применяются в ракетно-космической и авиационной технике [2–4]. Для расчета цилиндрических оболочек различной толщины в работах [5–7] рассмотрено проектирование многосеточных конечных элементов (МнКЭ), которые описывают трехмерное напряженное состояние в оболочках, учитывают неоднородную структуру материала, образуют многосеточные дискретные модели оболочек, размерность которых в $10^3 - 10^6$ раз меньше размерностей базовых моделей.

В данной работе на примере расчета слоистой цилиндрической оболочки с помощью МнКЭ предложен метод построения сходящейся последовательности решений с малой погрешностью, основное отличие которого от h -, hp -версий МКЭ состоит в том, что размерность решаемых СЛАУ МКЭ при нахождении элементов последовательности остается постоянной. Такой подход позволяет существенно экономить ресурсы ЭВМ.

Предлагаемый метод можно отнести к аналогу hp -версии МКЭ. Он включает измельчение сеток дискретизации при построении последовательности решений, что соответствует h -версии. В то же время, поскольку в соответствии с алгоритмом построения МнКЭ [5–7] порядок аппроксимирующих степенных полиномов или полиномов Лагранжа может меняться в процессе построения МнКЭ, что соответствует p -версии, то предлагаемый метод можно считать аналогом hp -версии МКЭ. Отметим, что именно структура МнКЭ позволяет измельчать исходную мелкую (базовую) сетку дискретизации и изменять степени аппроксимирующих полиномов, что позволяет учитывать сложные структуры (микроструктуры) материалов. Основное преимущество МнКЭ, которое используется в предлагаемом методе построения последовательности решений, состоит в том, что увеличение размерностей $(s - \alpha)$ -сеточных конечных элементов (КЭ) ($\alpha = 1, \dots, s - 1$), образующих структуру s -сеточного КЭ ($s \geq 2$), не меняет размерности СЛАУ МКЭ, построенной на основе s -сеточных КЭ.

Как правило, оценка эффективности КЭ осуществляется путем исследования сходимости решений и оценки погрешностей в характерных точках оболочек [2–4]. Однако в ряде случаев целесообразно рассматривать сходимости решений (полей перемещений и напряжений) и оценки погрешностей в интегральной форме (например, в норме L_2). Такой подход позволяет также оценить достоверность решений и корректность выбранных параметров численных процедур, что важно для инженерных расчетов.

Для оценки эффективности использования МнКЭ в предлагаемом методе используется теория апостериорного контроля точности приближенных решений, полученных с помощью МКЭ [8, 9]. Суть апостериорного контроля связана с оценкой отклонения результатов приближенного решения от неизвестного точного решения с опорой на исходные данные задачи и имеющееся приближенное решение. Использование известных методов оценки погрешностей необходимо для гарантии достоверности полученных результатов. Методы оценки погрешно-

стей, которые характеризуются относительной простотой реализации при небольшом объеме вычислений, рассмотрены в работе [9].

О.С. Zienkiewicz и J.Z. Zhu в работе [10] предложили также простой в реализации метод оценки погрешностей решений (метод ZZ), связанных с конечно-элементной дискретизацией. В работе [11] показано применение этого подхода к расчету однородных пластин и оболочек.

Существующие подходы к определению апостериорных оценок связаны с использованием «точного» решения \mathbf{u}^* , которое обычно определяется приближенно с помощью конечно-элементного решения \mathbf{u}_h данной краевой задачи. Однако существующие процедуры определения «точных» решений [9–11] трудно применять при расчете трехмерных композитных тел. В этом случае часто при определении \mathbf{u}^* необходимо учитывать микронеоднородную структуру материала, что приводит к построению сложных дискретных моделей [5–7].

В данной работе на основе использования трехсеточных КЭ (ТрКЭ) рассмотрены два варианта построения последовательности решений задачи при расчете НДС слоистой цилиндрической оболочки. На основе метода ZZ найдены апостериорные оценки погрешностей. Проведено сравнение оценок погрешностей и характера сходимости решений при двух вариантах использования ТрКЭ.

1. Построение приближенных решений и оценка их погрешностей

Рассмотрим основные положения предлагаемого метода на примере расчета НДС слоистой цилиндрической оболочки в случае применения ТрКЭ $V^{(3)}$ при аппроксимации перемещений полиномами Лагранжа (рис. 1). ТрКЭ $V^{(3)}$ состоит из M двухсеточных КЭ (ДвКЭ) $V_m^{(2)}$ ($m = 1, \dots, M$), каждый из которых состоит из N однородных односеточных КЭ (ОдКЭ) $V_n^{(1)}$ ($n = 1, \dots, N$). При построении ТрКЭ используются три вложенные сетки. Мелкая сетка (базовое разбиение области) связана с разбиением области ТрКЭ на мелкие ОдКЭ, которые учитывают неоднородную структуру материала оболочки. Крупные сетки применяются для понижения размерности базового разбиения.

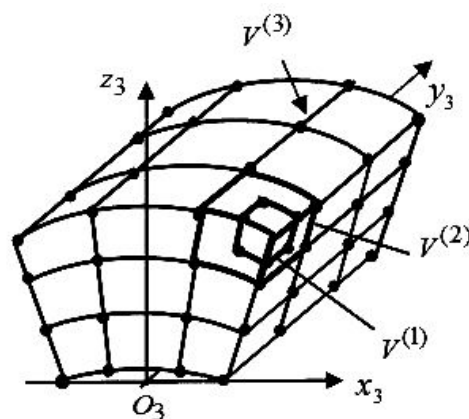


Рис. 1 – Трехсеточный КЭ

Fig. 1 – A three-grid FE

При построении ТрКЭ $V^{(3)}$ используются следующие соотношения:

$$\mathbf{K}^{(s)} \boldsymbol{\delta}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s)}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \int_V (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{(1)} dV, \quad \mathbf{P}^{(1)} = \int_V (\mathbf{N}^{(1)})^T \mathbf{F}^{(1)} dV - \int_S (\mathbf{N}^{(1)})^T \mathbf{q}^{(1)} dS, \\ \mathbf{K}^{(2)} &= \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n^{(2)})^T \mathbf{K}_n^{(1)} \mathbf{A}_n^{(2)}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n^{(2)})^T \mathbf{P}_n^{(1)}, \quad \boldsymbol{\delta}_n^{(1)} = \mathbf{A}_n^{(2)} \boldsymbol{\delta}_n^{(2)}, \\ \mathbf{K}^{(3)} &= \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}_m^{(3)})^T \mathbf{K}_m^{(2)} \mathbf{A}_m^{(3)}, \quad \mathbf{P}^{(3)} = \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}_m^{(3)})^T \mathbf{P}_m^{(2)}, \quad \boldsymbol{\delta}_m^{(2)} = \mathbf{A}_m^{(3)} \boldsymbol{\delta}_m^{(3)}, \\ \mathbf{K}_n^{(1)} &= (\mathbf{T}_n^{(2)})^T \mathbf{K}_n^{(1)} \mathbf{T}_n^{(2)}, \quad \mathbf{P}_n^{(1)} = (\mathbf{T}_n^{(2)})^T \mathbf{P}_n^{(1)}, \quad n = 1, \dots, N, \\ \mathbf{K}_m^{(2)} &= (\mathbf{T}_m^{(3)})^T \mathbf{K}_m^{(2)} \mathbf{T}_m^{(3)}, \quad \mathbf{P}_m^{(2)} = (\mathbf{T}_m^{(3)})^T \mathbf{P}_m^{(2)}, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$, \mathbf{D} – матрицы функций формы, деформаций, модулей упругости; $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(1)}$ – векторы объемных и поверхностных сил; V , S – область и поверхность КЭ $V^{(1)}$; $\mathbf{T}_n^{(2)}$, $\mathbf{T}_m^{(3)}$ – матрицы вращения, $\mathbf{K}^{(s)}$, $\mathbf{P}^{(s)}$, $\boldsymbol{\delta}^{(s)}$ – матрицы жесткости и векторы узловых сил и перемещений в локальных системах координат $O_s x_s y_s z_s$ для КЭ $V^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$. Матрицы $\mathbf{A}_n^{(2)}$, $\mathbf{A}_m^{(3)}$ понижают размерность векторов перемещений в ДвКЭ и ТрКЭ с помощью аппроксимирующих функций перемещений, построенных на крупных сетках ДвКЭ и ТрКЭ [5–7].

Отметим следующие особенности построения последовательности решений при использовании МнКЭ в случае, когда размерность СЛАУ МКЭ остается постоянной.

1. Как показывают численные эксперименты, погрешность решения $\mathbf{u}^{(s)}$ ($s \geq 2$) при использовании s -сеточных КЭ снижается при измельчении базовой сетки дискретизации.

2. Порядок полиномов Лагранжа в $(s - \alpha)$ -сеточных КЭ ($\alpha = 1, \dots, s - 1$) остается неизменным при измельчении базовой сетки области. На каждом шаге построения последовательности решений количество $(s - \alpha)$ -сеточных КЭ, входящих в состав s -сеточного КЭ, растет, а общее количество s -сеточных КЭ в дискретной модели оболочки остается постоянным.

3. Процедура построения s -сеточного КЭ сводится к нахождению значения матрицы жесткости $\mathbf{K}^{(s)}$ и вектора узловых сил $\mathbf{P}^{(s)}$ s -сеточного КЭ и определяется значениями уже найденных на предыдущем этапе расчета матриц $\mathbf{K}^{(s-\alpha)}$ и векторов $\mathbf{P}^{(s-\alpha)}$ $(s - \alpha)$ -сеточных КЭ, $\alpha = 1, \dots, s - 1$, которые включают базовое разбиение s -сеточного КЭ [5–7].

4. Более подробно процедура нахождения матриц жесткости $\mathbf{K}^{(s)}$ и вектора узловых сил $\mathbf{P}^{(s)}$ изложена в работах [5, 6] где показано, что МнКЭ способны учитывать неоднородную (микрон неоднородную) структуру и сложную форму

трехмерных тел с помощью базовых разбиений. Процедура построения МнКЭ позволяет найти вектор перемещений в узлах базовой (мелкой) сетки, связанной с ОдКЭ ($s=1$), решая только СЛАУ малой размерности, которая соответствует узлам крупной сетки МнКЭ. Например, при $s=3$ перемещения в ТрКЭ позволяют восстановить узловые перемещения в каждом ДвКЭ ($s=2$), входящем в состав ТрКЭ, и далее, в каждом ОдКЭ ($s=1$), входящем в структуру ДвКЭ.

Приведем основные соотношения, которые необходимы для проведения апостериорного контроля точности приближенных решений, полученных с применением МКЭ [10, 11]. Эти соотношения будут использованы для оценки погрешностей решений, полученных с помощью МнКЭ.

Для оценки суммарной погрешности результатов (метод ZZ) вводятся безразмерные параметры [10]

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|} \cdot 100\%, \quad \eta_\sigma = \frac{\|\mathbf{e}_\sigma\|}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \cdot 100\%. \quad (3)$$

При численных расчетах значения η , η_σ в формулах (3) определяются соотношениями [11]

$$\eta \approx \frac{\|\mathbf{e}\|}{\left(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2\right)^{1/2}} \cdot 100\%, \quad \eta_\sigma \approx \frac{\|\mathbf{e}_\sigma\|}{\left(\|\boldsymbol{\sigma}_h\|^2 + \|\mathbf{e}_\sigma\|^2\right)^{1/2}} \cdot 100\%. \quad (4)$$

Здесь использованы обозначения: $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{u} – тензор напряжений и вектор перемещений, которые являются точным решением исходной задачи; $\boldsymbol{\sigma}_h$, \mathbf{u}_h – соответствующие конечно-элементные решения; $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, $\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h$ – погрешности перемещений и напряжений в расчетной области тела V .

Для интегральных оценок погрешности характеристик НДС используем норму L_2 [1]

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{L_2} &= \left(\int_V \mathbf{e}^T \mathbf{e} dV \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2} = \left(\int_V (\mathbf{e}_\sigma)^T \mathbf{e}_\sigma dV \right)^{1/2}, \\ \|\mathbf{u}\|_{L_2} &= \left(\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{u} dV \right)^{1/2}, \quad \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L_2} = \left(\int_V (\boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{\sigma} dV \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее в тексте индекс L_2 в обозначении нормы опускаем. Значение нормы погрешности для всей области V , состоящей из N КЭ, складывается из суммы норм погрешностей $\|\mathbf{e}\|_n$, $\|\mathbf{e}_\sigma\|_n$, определенных для n -го КЭ, $n=1, \dots, N$, т. е.

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{e}\|_n^2, \quad \|\mathbf{e}_\sigma\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{e}_\sigma\|_n^2. \quad (6)$$

В работе [10] приведена формула для определения среднеквадратичного значения погрешности (удельного квадрата погрешности) напряжений в виде

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\|\mathbf{e}_\sigma\|}{V} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Этот параметр погрешности (7) можно использовать как для всей области конструкции, так и для каждого КЭ дискретной модели. Также можно ввести параметр ξ_n по формуле [10]:

$$\xi_n = \frac{\Delta \sigma_n}{\Delta \hat{\sigma}} \leq 1, \quad n = 1, \dots, N, \quad (8)$$

где $\Delta \hat{\sigma}$ – допустимая величина среднеквадратичной погрешности при определении напряжения $\Delta \sigma_n$ в каждом КЭ. Сетка дискретизации является приемлемой для расчета с выбранным допустимым напряжением, если для всех элементов выполняется неравенство (8). Это позволяет корректировать выбранный закон дискретизации для получения допустимой погрешности в каждом КЭ.

Отметим, что точное решение исходной задачи для композитных тел сложной формы обычно неизвестно. В связи с этим в методе ZZ в приведенных выше формулах вместо точного решения σ, u используется приближенное, так называемое «точное» решение u^*, σ^* . В этом случае соотношения для погрешностей e, e_σ имеют вид

$$e \approx u^* - u_h, \quad e_\sigma \approx \sigma^* - \sigma_h. \quad (9)$$

Как правило, значения u^*, σ^* определяются путем минимизации взвешенных невязок с применением значений σ_h, u_h или путем усреднения значений σ_h, u_h [1, 9]. При использовании в расчетах НДС МнКЭ для определения апостериорных оценок погрешностей, для приближенного решения $u^{(s)}$, построенного с помощью МнКЭ $V^{(s)}$, в качестве «точного» решения u^* можно использовать приближенные решения $u^{(s-\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, s-1$), построенные с использованием КЭ $V^{(s-\alpha)}$. Например, при использовании ТрКЭ можно принять $u^* = u^{(2)}$ или $u^* = u^{(1)}$, где $u^{(1)}, u^{(2)}$ – решения, полученные для оболочки с помощью ОдКЭ $V_n^{(1)}$ или ДвКЭ $V_m^{(2)}$.

Рассмотрим на примере расчета композитной оболочки с помощью ТрКЭ применение классического метода построения последовательности решений с использованием последовательного измельчения сетки дискретизации (h -версия), когда размерность СЛАУ растет, и предлагаемого метода при сохранении размерности СЛАУ.

2. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу расчета НДС трехслойной цилиндрической оболочки в системе координат $Oxyz$. При $y = 0$; $2L$ торцы оболочки защемлены. Длина оболочки $2L = 72$, радиус срединной поверхности $R = 48$, толщина $H = 9,6$ при $R/H = 5$ и $H = 3,2$ при $R/H = 15$, толщина слоев – $H/3$. Модули Юнга слоев (начиная с нижнего) равны 1, 5, 10, коэффициент Пуассона – 0,3. На внешней поверхности оболочки длиной $L/2$ и углом раствора $\alpha = \pi/2$, симметричной относительно плоскостей Oyz , $y = L$ действует давление $q = -0,5$ (рис. 2). В расчетах используется 1/4 часть оболочки.

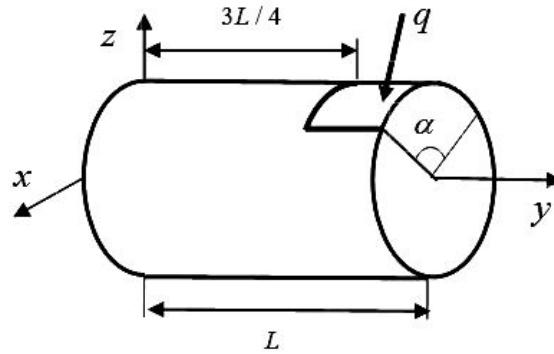


Рис. 2 – Левая симметричная часть оболочки

Fig. 2 – A left symmetrical part of the shell

Размерность базовых дискретных моделей R_k определяется по формулам:

$$m_{1,k} = 432k + 1, \quad m_{2,k} = 108k + 1, \quad m_{3,k} = 18k + 1, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (10)$$

где $m_{1,k}$, $m_{2,k}$, $m_{3,k}$ – размерности сетки в тангенциальном, осевом и радиальном направлении оболочки. На базовых моделях R_k строятся многосеточные дискретные модели из ДвКЭ и ТрКЭ. Рассмотрим два варианта построения МнКЭ. В первом случае ДвКЭ и ТрКЭ имеют характерные размеры $9h_{x,k}^{(1)} \times 9h_{y,k}^{(1)} \times H$ и $27h_{x,k}^{(1)} \times 27h_{y,k}^{(1)} \times H$, где $h_{x,k}^{(1)}$, $h_{y,k}^{(1)}$ – размеры ОдКЭ по двум координатам при $k = 1, \dots, 4$. Этот случай соответствует классическому варианту измельчения сетки (h -версия). Во втором случае ТрКЭ имеют характерные размеры $27kh_{x,k}^{(1)} \times 27kh_{y,k}^{(1)} \times H$, $k = 1, \dots, 4$. В этом случае крупная сетка сохраняет свой постоянный размер и, как следствие, СЛАУ имеет постоянную размерность (аналог hp -версии).

В ТрКЭ используются полиномы Лагранжа третьего порядка по всем координатам, причем узлы крупных сеток ДвКЭ и ТрКЭ расположены на общих границах разномодульных слоев, что улучшает сходимость последовательности конечно-элементных решений [7]. При вычислении для каждого R_k максимального значения $\xi_{\max,k} = \max_{n=1,\dots,N} \xi_{n,k}$ по формуле (8) величина допустимого значения $\Delta \hat{\sigma}$ определяется соотношением

$$\Delta \hat{\sigma} = a \|\sigma\| / V^{1/2}, \quad (11)$$

где a определяет величину доли среднеквадратичного значения напряжения во всем объеме V .

В табл. 1 представлены результаты расчетов оценки погрешности в норме L_2 полей перемещений и напряжений для толстых ($R/H = 5$) и тонких ($R/H = 15$) трехслойных оболочек для четырех моделей дискретизации R_k ($k = 1, \dots, 4$) и двух случаев характерных размеров ТрКЭ при $a = 0,01$. В данном примере значения \mathbf{u}^* , σ^* , которые мы считаем «точными» решениями, отвечают решению, построенному с применением ДвКЭ $V^{(2)}$. В табл. 1 использованы

обозначения $\eta_k, \eta_{\sigma,k}, \xi_{\max,k}$ для первого случая (h -версия) и $\eta_k^*, \eta_{\sigma,k}^*, \xi_{\max,k}^*$ — для второго (аналог hp -версии). Последовательности значений $\eta_k, \eta_{\sigma,k}, \xi_{\max,k}$ и $\eta_k^*, \eta_{\sigma,k}^*, \xi_{\max,k}^*$ в таблице демонстрируют хорошую асимптотическую сходимость перемещений и напряжений в обоих анализируемых случаях. Для толстой оболочки использование МНКЭ дает меньшую погрешность определения НДС оболочки, чем для тонкой оболочки. Отметим, что уже модель дискретизации R_1 демонстрирует эффективность построенной сетки ($\xi_k^* < 1$ для всех КЭ), т. е. достаточно точное определение напряжений в каждом элементе.

Результаты расчетов оболочек для моделей R_k

Results of calculation of shells for models R_k

| R/H | 5 | | | | 15 | | | |
|---|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\frac{\eta}{\eta_k^*}$ | <u>0,79181</u> 0,79181 | <u>0,37319</u> 0,78601 | <u>0,03020</u> 0,13612 | <u>0,01612</u> 0,12621 | <u>1,29337</u> 1,29337 | <u>0,42523</u> 0,55454 | <u>0,16110</u> 0,32011 | <u>0,09064</u> 0,26480 |
| $\frac{\eta_{\sigma,k}}{\eta_{\sigma,k}^*}$ | <u>6,15401</u> 6,15401 | <u>4,53876</u> 5,23332 | <u>1,59181</u> 3,03222 | <u>1,16883</u> 2,84898 | <u>9,79531</u> 9,79531 | <u>5,24467</u> 6,06657 | <u>3,42884</u> 4,65014 | <u>2,57221</u> 4,08360 |
| $\frac{\xi_{\max,k}}{\xi_{\max,k}^*}$ | <u>0,22522</u> 0,22522 | <u>0,12589</u> 0,18561 | <u>0,01620</u> 0,10575 | <u>0,00913</u> 0,09826 | <u>0,58592</u> 0,58592 | <u>0,12460</u> 0,37744 | <u>0,05153</u> 0,30989 | <u>0,02892</u> 0,27385 |

Сравнение двух случаев ТрКЭ показывает, что в случае уменьшения размеров ТрКЭ (h -версия) сходимость последовательности решений более быстрая, а относительная погрешность для перемещений и напряжений меньше, чем в случае, когда размер ТрКЭ и соответствующая крупная сетка дискретизации не меняются при построении последовательности решений. Тем не менее характер сходимости и значения погрешности в случае сохранения размерности СЛАУ имеют приемлемый уровень при инженерных расчетах НДС оболочек.

Сравним эффективность применения МНКЭ с точки зрения экономии вычислительных ресурсов в двух вариантах расчетов для модели R_4 . Размерность трехсеточной модели для первого варианта равна 110012, ширина ленты СЛАУ – 1764. Соответствующая трехсеточная модель при постоянном размере ТрКЭ имеет 6764 узловых неизвестных, ширина ленты СЛАУ – 468. Реализация второго варианта снижает размерность СЛАУ приблизительно в 16 раз и требует в 61 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем в первом случае. Количество используемых КЭ уменьшается в 16 раз.

Заключение

Представленные в работе теоретические материалы и результаты численных экспериментов показывают, что предлагаемый метод построения последовательности приближенных решений при использовании МНКЭ и постоянной размерности СЛАУ МКЭ:

- порождает сходящиеся последовательности решений;

- позволяет измельчать сетку дискретизации для учета неоднородной (микро-неоднородной) структуры композитного материала для определения НДС без изменения размерности конечно-элементной задачи;
- позволяет строить решения с малой (заданной) погрешностью;
- обеспечивает экономию ресурсов ЭВМ и требует небольших временных затрат.

Предлагаемый подход особенно эффективен на стадии эскизного проектирования цилиндрических композитных оболочечных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The finite element method: its basis and fundamentals. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. – 715 p.
2. **Reddy J.N.** Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. – New York: CRC Press, 2004. – 831 p.
3. **Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф.** Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
4. **Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г.** Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 341 с.
5. **Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.** Расчет композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных элементов // Вестник СибГАУ. – 2016. – № 3. – С. 587–594.
6. **Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.** Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочечного типа // Известия АлтГУ. – 2017. – № 4. – С. 120–125.
7. **Matveev A.D., Grishanov A.N.** Multigrid finite elements in the calculations of multilayer cylindrical shells // Siberian Journal of Science and Technology. – 2018. – Vol. 19, N 1. – P. 27–36.
8. **Gratsch T.A., Bathe K.-J.** A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // Computers and Structures. – 2005. – Vol. 83. – P. 235–265.
9. **Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T.** Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 336 p.
10. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1987. – Vol. 24. – P. 337–357.
11. **Yunus S.M., Pawlak T.P., Wheeler M.J.** Application of the Zienkiewicz-Zhu error estimator for plate and shell analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1990. – Vol. 29. – P. 1281–1298.

AN EFFICIENT METHOD OF BUILDING APPROXIMATE SOLUTIONS USING MULTIGRID FINITE ELEMENTS

Grishanov A.N.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

A method of building converging sequences of solutions in numerical tasks for calculating an elastic deformable body using multigrid finite elements (MFE) is considered. An advantage of the method is fixed dimensions of the main finite elements method (MFE) of a linear algebraic equations system in building approximate solutions. The method is analogous to the hp-version of the MFE-expansion of the dimension of the finite element presentation of the task pane. A posteriori error estimates are obtained of the basis of the ZZ method suggested by O.C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, in the norm L_2 . When building precise solutions the ZZ method uses MFEs that take into account a heterogeneous material structure and form discrete models of small dimension.

To give an example, an analysis of solution sequence convergence as well as of error estimates in the numerical calculation of the stress-strain state of three-layered cylindrical shells under local loading is presented. It is demonstrated that using MFE generates converging sequences of approximate solutions in the norm L_2 both in the traditional method of discretization grid segmentation (MFE h-version) and in the suggested method. Based on the ZZ method a posteriori error estimates are made. Comparison of error estimates and the nature of convergence in two versions of finite-elemental discretization is made using three-grid finite elements. The use of MFE in the suggested method of building approximate solutions allows one to get small dimension MFE equations systems, which ensures computer resource saving in comparison with the traditional discretization method.

Keywords: a posteriori error estimates, discretization models, convergence of solution sequence, small error, elasticity, cylindrical shell, multigrid finite elements.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-3-47-57

REFERENCES

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Oxford, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 715 p.
2. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. New York, CRC Press, 2004. 831 p.
3. Golovanov A.I., Tyuleneva O.I., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-wall constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 392 p.
4. Kuz'min M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Raschety na prochnost' elementov mnogosloinykh kompozitnykh konstruksii* [Strength calculations of elements of multilayer composite structures]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012. 341 p.
5. Matveev A.D., Grishanov A.N. Raschet kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek s primeneniem mnogosetochnykh elementov [Calculation of composite cylindrical shells using multigrid elements]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M.F. Reshetneva – Vestnik SibGAU*, 2017, no. 3, pp. 587–594.
6. Matveev A.D., Grishanov A.N. Trekhmernye kompozitnye mnogosetochnye konechnye elementy obolochecnogo tipa [Three-dimensional composite multi-grid finite elements of shell-type]. *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta – The News of Altai State University*, 2016, no. 4, pp. 120–125.
7. Matveev A.D., Grishanov A.N. Multigrid finite elements in the calculations of multilayer cylindrical shells. *Siberian Journal of Science and Technology*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 27–36.
8. Gratsch T., Bathe K.-J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures*, 2005, vol. 83, pp. 235–265.
9. Babuska I., Whiteman J.R., Strouboulis T. *Finite elements: an introduction to the method and error estimation*. Oxford, Oxford University Press, 2011. 336 p.
10. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, vol. 24, pp. 337–357.
11. Yunus S.M., Pawlak S.M., Wheeler M.J. Application of the Zienkiewicz-Zhu error estimator for plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, vol. 29, pp. 1281–1298.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ



Гришанов Александр Николаевич – родился в 1953 году, соискатель кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: методы конечных элементов. Опубликовано 13 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса 20. E-mail: a_grishanov@ngs.ru).

Grishanov Alexander Nicolaevich (b. 1953) – a degree seeking applicant at the department of aircraft strength, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element methods. He is the author of 13 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: a_grishanov@ngs.ru).

Статья поступила 03 мая 2018 г.

Received May 03, 2018

To Reference:

Grishanov A.N. Effektivnyi metod postroeniya priblizhennykh reshenii s primeneniem mnogoseichnykh konechnykh elementov [An efficient method of building approximate solutions using multigrid finite elements]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 3 (40), pp. 47–57. doi: 10.17212/1727-2769-2018-3-47-57.