ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2019 июль–сентябрь № 3 (44)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 537. 2 (075)

# ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН В ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

**В.К. Ткачев, А.В. Еремин, Т.Б. Тарабрина, И.В. Кудинов**
*Самарский государственный технический университет*

На основе определения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале при параболическом законе изменения вязкости от температуры. В качестве дополнительной принималась функция, характеризующая изменение температуры по продольной координате в центре канала. Ее использование основано на свойстве параболического уравнения, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты, согласно которому температура в центре канала изменяется сразу после приложения граничного условия на его поверхности. Применение дополнительной искомой функции позволяет сводить решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, с точностью, зависящей от числа используемых при получении решения дополнительных граничных условий. Исследования полученных результатов показали существенное различие профилей скорости при нагреве жидкости и при охлаждении. Так, при нагреве профиль скорости приближается к профилю стержневого течения, характеризующегося практически постоянной скоростью по сечению канала, а при охлаждении он оказывается вытянутым в продольном направлении. Выполненные исследования показали существенное различие в распределении температуры, полученной с учетом температурной зависимости вязкости и без ее учета.

*Ключевые слова*: теплообмен в движущейся жидкости, зависимость вязкости от температуры, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия, бесконечная скорость распространения теплоты, интегральный метод теплового баланса.

DOI: 10.17212/1727-2769-2019-3-70-86

## Введение

Классические математические постановки краевых задач теплообмена для движущихся жидкостей включают допущение о независимости профиля скорости течения от температуры. Формула для профиля скорости в данном случае определяется из решения уравнения Навье–Стокса, которое для гидродинамически стабилизированного течения приводится к уравнению Пуассона [1, 2]. Из решений этого уравнения следует, что профиль скорости для канала конкретной формы поперечного сечения определяется вязкостью жидкости и перепадом давления по его длине. Учитывая, что вязкость многих жидкостей существенно зависит от температуры, то неучет этой зависимости в математических постановках краевых задач может приводить к существенному отличию распределения скорости и температуры от результатов, наблюдающихся в реальных физических процессах теплообмена в движущихся жидкостях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00029 мол_а.

© 2019 В.К. Ткачев, А.В. Еремин, Т.Б. Тарабрина, И.В. Кудинов

Теоретические положения, связанные с учетом зависимости вязкости от температуры при расчетах распределения скоростей и температур в движущихся жидкостях, приводятся в работах [3–6]. В них принимается линейная или экспоненциальная зависимость вязкости от температуры $\mu(T) = \mu_0\left(1 - \beta(T - T_0)\right)$; $\mu(T) = \mu_0 e^{-\beta(T - T_0)}$, где $\mu_0$ – вязкость при температуре $T = T_0$; $\beta$ – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения вязкости от температуры; $T_0$ – начальная температура. Из формул (1) и (2) следует, что при нагреве $(T > T_0)$ вязкость уменьшается, а при охлаждении – возрастает. При использовании этих формул температура оказывается включенной в уравнение движения (Навье–Стокса). В связи с чем для определения профилей скорости и температурного состояния движущихся жидкостей необходимо совместное решение сильно нелинейных уравнений движения и энергии. Математическая постановка задачи в этом случае настолько усложняется, что получение ее не только аналитических, но и численных решений, крайне затруднительно. В работах [3–6] подобная система уравнений упрощается за счет отказа от учета нестационарности процесса и конвективного переноса теплоты по пространственным переменным. Однако подобное упрощение можно принять лишь в отдельных частных случаях (например, когда число Рейнольдса мало, $\mathrm{Re} < 1$), что существенно снижает число задач, к которым можно применить данный метод. К тому же при нагреве жидкости вязкость уменьшается и, следовательно, число Рейнольдса возрастает. Это возрастание может быть столь существенным, что неучет нестационарности процесса и конвективного переноса теплоты по продольной переменной могут привести к существенному отклонению математической модели от реального физического процесса.

В работе П.В. Цоя [2] рассматривается метод учета зависимости вязкости от температуры, в котором уравнения движения и энергии решаются раздельно. В данном случае формула для вязкости принимается в виде линейной, параболической или экспоненциальной зависимости от поперечной пространственной переменной, считая, что температура по этой переменной также изменяется по какой-либо из этих зависимостей. В данном случае формула для вязкости не содержит непосредственно температуру и, в связи с чем появляется возможность раздельного решения уравнений движения и энергии с учетом в уравнении энергии профиля скорости, полученного из решения уравнения движения. При этом уравнения энергии на нагрев и на охлаждение жидкости решаются раздельно. Разумеется, такой метод решения является приближенным, так как закон изменения вязкости от поперечной пространственной переменной задается в предположении, что температура качественно изменяется по аналогичному закону. Исходя из начальных и граничных условий теплообмена, подобную оценку приближенно всегда можно выполнить. Преимущества такого метода в том, что не требуется вводить все указанные выше допущения.

### 1. Постановка задачи

В настоящей работе при определении профиля скорости с учетом зависимости вязкости от температуры применена математическая теория, разработанная в [2]. Найденные профили используются затем при решении задач теплообмена методом, основанном на определении дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий.

**2. Описание метода решения и полученные результаты**

Уравнение, определяющее распределение скорости в цилиндрическом канале, имеет вид [1, 2]

$$\frac{1}{y}\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=-\frac{r_0^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \eta}, \tag{1}$$

где $y=\xi/r_0$ – безразмерная поперечная координата; $\eta$ – продольная координата, *м*; $W$ – скорость, м/с; $r_0$ – радиус трубы, м; $\mu$ – коэффициент динамической вязкости, кг/(м · с); $\xi$ – поперечная координата, м; $p$ – давление, Па.

При постоянной от температуры вязкости величина $r_0^2/\mu$ правой части уравнения (1) для любого $y$ будет неизменной. В работе [2] зависимость величины $1/\mu$ от координаты $y$ представляется в виде

$$1/\mu=\varphi(y,\delta)/\mu_0, \tag{2}$$

где $\varphi(y,\delta)$ – функция, учитывающая зависимость величины $1/\mu$ от координаты $y$ и от некоторого параметра $\delta$, характеризующего степень (интенсивность) этой зависимости ($\delta>0$ – нагрев, $\delta<0$ – охлаждение жидкости); $\mu_0$ – коэффициент динамической вязкости жидкости на оси трубы. Величина $\varphi(y,\delta)$ принимается в таком виде, чтобы на оси трубы $\varphi(0,\delta)=1$. Таким образом, задавая различные зависимости функции $\varphi(y,\delta)$ (линейные, параболические, экспоненциальные) от координаты $y$, выполняется учет зависимости вязкости и от температуры ввиду того, что температура также зависит от координаты $y$.

Уравнение (1) с учетом (2) принимает вид

$$\frac{1}{y}\frac{dW}{dy}+\frac{d^2W}{dy^2}=-\frac{r_0^2\,\varphi(y,\delta)}{\mu_0}\frac{\Delta P}{l}, \tag{3}$$

где $\Delta P/l=\partial p/\partial\eta$; $l$ – длина трубы.

Полагая, что величина $\varphi(y,\delta)$ является линейной функцией координаты $y$, получаем $\varphi(y,\delta)=\mu_0(1+\delta y)$. Решение уравнения (3) при граничных условиях:

$$\partial W(0)/\partial y=0; \tag{4}$$

$$W(1)=0 \tag{5}$$

имеет вид [2]

$$W(y,\delta)=r_0^2\Delta P\left(9+4\delta-y^2(9+4\delta y)\right)\Big/(36\mu_0 l). \tag{6}$$

Средняя скорость жидкости находится по формуле $W_{\text{ср}}=G/S$, где $S=\pi r_0^2$ – площадь сечения трубопровода; $G$ – расход жидкости, определяемый по соотношению [1, 2]:

$$G=\pi r_0^2 W_{\text{ср}}=\int_0^{2\pi}d\rho\int_0^{r_0}W(y,\delta)y\,dy=\pi r_0^2(45+24\delta)\Delta P/(360\mu_0 l). \tag{7}$$

С учетом формулы для средней скорости соотношение (6) принимает вид

$$W(y,\ \delta) = W_{\text{ср}}\left(9 + 4\delta - y^2(9 + 4\delta y)\right)\Big/(4,5 + 2,4\delta)\ . \tag{8}$$

При параболическом распределении вязкости $(\varphi(y,\ \delta) = 1 + \delta y^2)$ уравнение (3) будет

$$\frac{1}{y}\frac{dW}{dy} + \frac{d^2W}{dy^2} = -\frac{r_0^2(1 + \delta y^2)}{\mu_0}\frac{\Delta P}{l}\ . \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (9) при граничных условиях (4), (5), находим

$$W(y,\delta) = 1,5W_{\text{ср}}(4(1 - y^2) + \delta(1 - y^4))/(3 + \delta)\ . \tag{10}$$

Средняя скорость при известном перепаде давления по длине трубы находится по формуле $W_{\text{ср}} = r_0^2(3 + \delta)\Delta P/(24\mu_0 l)$ .

При $\delta \to 0$ формула (10) приводится к известному классическому решению Пуазейля для уравнения (9) $W(y,0) = 2W_{\text{ср}}(1 - y^2)$ .

Профили безразмерной скорости $\omega(y,\delta) = W(y,\delta)/W_{\text{ср}}$ , найденные по формуле (10) при нагреве $(\delta = 10)$ , охлаждении $(\delta = -2)$ и изотермическом течении $(\delta = 0)$ , приведены на рис. 1.

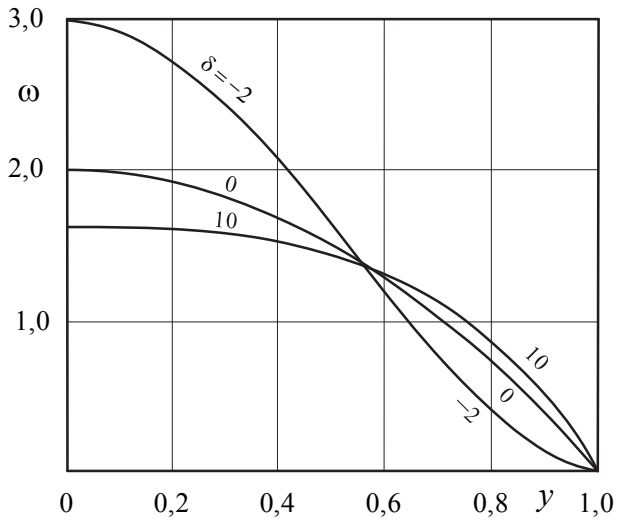


*Рис. 1* – Распределение скорости при нагреве $(\delta = 10)$ , охлаждении $(\delta = -2)$ и изотермическом течении $(\delta = 0)$ . Расчет по формуле (10)

*Fig. 1*– Velocity distribution when heated $(\delta = 10)$ , cooled $(\delta = -2)$ and in an isothermal flow $(\delta = 0)$ . Evaluation by formula (10)

Найдем решение краевой задачи теплообмена с учетом зависимости вязкости среды от температуры в следующей математической постановке (рис. 2)

$$W(y,\delta)\frac{\partial t(\xi,\eta)}{\partial \eta}=\frac{a}{\xi}\frac{\partial t(\xi,\eta)}{\partial \xi}+a\frac{\partial^2 t(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}; \tag{11}$$

$$(\eta>0;\ 0<\xi<r_0);$$

$$t(\xi,0)=t_0; \tag{12}$$

$$t(r_0,\eta)=t_c; \tag{13}$$

$$\partial t(0,\eta)/\partial \xi=0, \tag{14}$$

где $t$ – температура; $\eta$ – продольная координата; $\xi$ – поперечная координата; $a$ – коэффициент температуропроводности жидкости; $W(y,\delta)$ – профиль скорости; $t_0$ – температура жидкости на входе в канал $(\eta=0)$; $t_c$ – температура жидкости на стенке $(\xi=r_0)$.

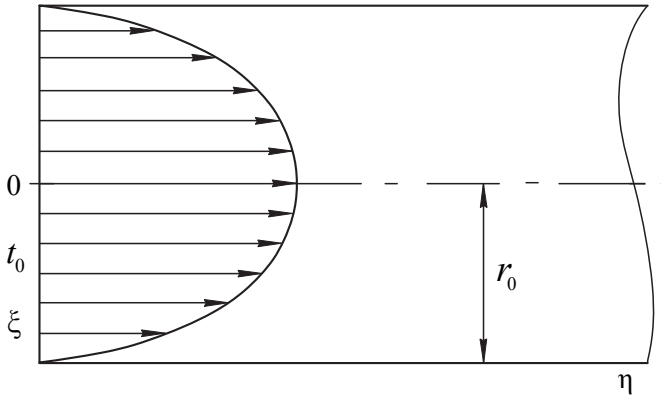


*Рис. 2* – Схема стабилизированного ламинарного течения жидкости в круглой трубе

*Fig. 2* – A diagram of a stabilized laminar liquid flow in a circular pipe

В математической постановке задачи (11)–(14) приняты следующие допущения: течение жидкости стабилизированное (профиль скорости по длине канала не изменен); жидкость несжимаема, ее физические свойства постоянны; внутренние источники теплоты отсутствуют; изменением температуры в результате трения (диссипацией энергии) пренебрегается [1, 2].

Квазистационарная нелинейная задача (11)–(14) известна как задача Гретца–Нуссельта. Впервые она была решена Гретцем и, независимо от него – Нуссельтом. Уточнение полученного ими решения дано в [1]. Приведенное в [1] решение представляет бесконечный функциональный ряд, плохо сходящийся при малых значениях продольной переменной. И к тому же в зависимости от величины поперечной координаты решение включает функции Бесселя различного (в том числе и дробного) порядка. Особую трудность представляет также нахождение собственных чисел, определяемых из степенных уравнений, решение которых при большом числе членов ряда решения возможно лишь численными методами.

В аналитической теории теплопроводности известны методы, основанные на определении фронта температурного возмущения – глубины прогретого (терми-

ческого) слоя [7–11]. При их использовании процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности тела к его центру, а вторая – изменением температуры в пределах всей области изменения пространственной переменной. Отметим, что применительно к задачам теплообмена для движущихся жидкостей процесс теплообмена разделяется на две стадии по продольной пространственной переменной. Общим недостатком интегральных методов является низкая точность получаемых решений. Для ее повышения в работах [7, 12] применены дополнительные граничные условия. На их основе показано, что с увеличением числа приближений $n$ происходит уменьшение времени перемещения фронта температурного возмущения от поверхности тела до его центра, т. е. происходит возрастание скорости его движения. И в пределе при $n \to \infty$ скорость перемещения фронта также устремляется к бесконечному значению, что подтверждает факт бесконечной скорости распространения теплоты. Отсюда следует, что с увеличением числа приближений диапазон времени (для движущихся жидкостей – диапазон продольной переменной), в котором определена первая стадия процесса, уменьшается, а второй стадии – увеличивается. В связи с чем решения, полученные для первой стадии, могут быть использованы лишь при малых и сверхмалых значениях времени (для жидкостей – продольной переменной). Учитывая этот факт, в настоящей работе рассматривается метод получения аналитического решения, позволяющий избежать рассмотрения первой стадии процесса.

Основная идея метода связана с использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Целью введения дополнительной функции является сведение решения исходного уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного уравнения в граничных точках. Отметим, что метод решения, связанный с выполнением уравнения в граничных точках, использовался в работах [13 – 15].

В качестве конкретного примера применения изложенного метода рассмотрим последовательность получения аналитического решения задачи (11)–(14) при $\delta = -2$ (задача на охлаждение, $t_0 > t_c$). Формула (10) в этом случае будет $W(y,\delta) = 3W_{cp}(1 - 2y^2 + y^4)$.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = \frac{t - t_c}{t_0 - t_c}; \quad y = \frac{\xi}{r_0}; \quad x = \frac{\eta a}{3W_{cp} r_0^2}. \tag{15}$$

С учетом принятых обозначений задача (11) – (14) будет

$$y(1 - 2y^2 + y^4)\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y} + y\frac{\partial^2\Theta(y,x)}{\partial y^2}; \tag{16}$$

$$(x > 0; \quad 0 < y < 1);$$

$$\Theta(y,0) = 1; \tag{17}$$

$$\Theta(1,x) = 0; \tag{18}$$

$$\partial\Theta(0,x)/\partial y = 0. \tag{19}$$

Введем дополнительную искомую функцию

$$q(x) = \Theta(0, x)\,, \tag{20}$$

характеризующую изменение температуры в центре канала в зависимости от величины продольной координаты. Отметим, что ввиду бесконечной скорости распространения теплоты температура в центре канала будет изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода (18) на его поверхности. Следовательно, диапазон изменения функции $q(x)$ будет включать весь диапазон изменения продольной пространственной переменной $x$.

Решение задачи (16)–(19) принимается в виде

$$\Theta(y, x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(y)\,, \tag{21}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = 1 - y^{2k}$ – координатные функции.

Очевидно, что ввиду принятой системы координатных функций соотношение (21) удовлетворяет граничным условиям (18), (19). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ будем находить из соотношения (20) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение соотношением (21) было эквивалентно выполнению уравнения (16) в граничных точках $y = 0$ и $y = 1$. Уравнение (16) в точке $y = 1$ приводится к соотношению, представляющему первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial\Theta(1, x)}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta(1, x)}{\partial y^2} = 0\,. \tag{22}$$

Уравнение (16) в точке $y = 0$ принимает вид соотношения $\partial\Theta(0, x)/\partial y = 0$, совпадающего с граничным условием (19), которое решением (21) выполняется в любом приближении.

Применительно к точке $y = 0$ необходимо также сформулировать дополнительное граничное условие, получаемое на основе соотношения (20). Для этого продифференцируем соотношение (20) по переменной $x$:

$$\frac{dq(x)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(0, x)}{\partial x}\,. \tag{23}$$

Уравнение (16) с учетом (23) принимает вид

$$\frac{dq(x)}{\partial x} = \frac{1}{y(1 - 2y^2 + y^4)}\frac{\partial\Theta(0, x)}{\partial y} + \frac{1}{(1 - 2y^2 + y^4)}\frac{\partial^2\Theta(0, x)}{\partial y^2}\,. \tag{24}$$

Раскрывая неопределенность в первом слагаемом правой части соотношения (24) по правилу Лопиталя, находим дополнительное граничное условие вида

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2\Theta(0, x)}{\partial y^2}\,. \tag{25}$$

Для получения решения задачи (16)–(19) в первом приближении подставим (21), ограничиваясь одним членом ряда, в соотношение (20). Относительно неизвестного коэффициента $b_1(q)$ получаем алгебраическое уравнение, из решения кото-

рого находим $b_1(q) = q(x)$. С учетом найденного значения $b_1(q)$ соотношение (21) принимает вид

$$\Theta(y,x) = q(x)(1-y^2)\,. \tag{26}$$

Потребуем, чтобы соотношение (26) удовлетворяло не уравнению (16), а некоторому осредненному в интервале $0 < y < 1$ уравнению, т. е. интегралу теплового баланса

$$\int_0^1 \left[ y(1-2y^2+y^4)\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial x} - \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y} - y\frac{\partial^2\Theta(y,x)}{\partial y^2} \right] dy = 0\,. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$0,25dq(x)/dx + q(x) = 0\,. \tag{28}$$

Интегрируя уравнение (28), находим

$$q(x) = C\exp\left(-64(\delta+3)x/(5\delta+16)\right), \tag{29}$$

где $C$ – постоянная интегрирования.

Подставляя (29) в (26), получаем

$$\Theta(y,x) = C\exp\left(-64(\delta+3)x/(5\delta+16)\right)(1-y^2)\,. \tag{30}$$

Для определения постоянной интегрирования составим невязку граничного условия (17) и потребуем выполнения ее ортогональности к координатной функции $\varphi_1(y) = 1-y^2$:

$$\int_0^1 (\Theta(y,0)-1)(1-y^2)\,dy = 0\,. \tag{31}$$

Подставляя (30) в (31), после определения интеграла относительно постоянной интегрирования будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим $C = 1,25$.

Соотношение (30) с учетом найденного значения постоянной интегрирования представляет решение задачи (16)–(19) в первом приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (30) в сравнении с решением задачи (16)–(19) численным методом (метод конечных разностей) позволяет заключить, что в диапазоне $0,1 \le x \le 0,4$ их расхождение не превышает 12 %.

Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (21). Для получения решения во втором приближении подставим (21) (ограничиваясь двумя членами ряда) в условие (20) и дополнительное граничное условие (25). Относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q)$, $(k = 1, 2)$ будем иметь систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (21) после определения $b_k(q)$ принимает вид

$$\Theta(y,x) = -0,25q'(1-y^2) + (0,25q'+q)(1-y^4)\,, \tag{32}$$

где $q' = dq(x)/dx$.

Подставляя (32) в (27), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$4q'' + 5q' + q = 0\,, \tag{33}$$

где $q'' = d^2q(x)/dx^2$.

Интегрируя уравнение (33), находим

$$q(x) = C_1 \exp(4(-13+\sqrt{129})x) + C_2 \exp(-4(13+\sqrt{129})x)\,, \tag{34}$$

где $C_1$, $C_2$ – постоянные интегрирования.

Подставляя (34) в (32), получаем

$$\Theta(y,\,x) = C_1 e^{\nu_1 x}\left(-\frac{1}{4}\nu_1(1-y^2\right) + \left(\frac{1}{4}\nu_1 + 1\right)(1-y^4)\Big) +$$

$$+\, C_2 e^{\nu_2 x}\left(-\frac{1}{4}\nu_2(1-y^2\right) + \left(\frac{1}{4}\nu_2 + 1\right)(1-y^4)\Big)\,, \tag{35}$$

где $\nu_{1,2} = \pm 4(\mp 13 + \sqrt{129})$.

Составляя невязку граничного условия (17) и требуя выполнения ортогональности невязки к координатным функциям $\phi_j(y)$ $(j = k = 1,\,2)$, находим

$$\int_0^1 (\Theta(y,0) - 1)\phi_j(y)dy = 0 \qquad (j = k = 1,\,2)\,. \tag{36}$$

Подставляя (35) в (36) после определения интегралов относительно постоянных интегрирования $C_k$ $(k = 1,\,2)$ получаем систему двух алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &C_1(0,2\sqrt{129} - 1) - C_2(0,2\sqrt{129} + 1) = 7/4;\\ &C_1\left(\frac{1}{3}\sqrt{129} - 2\right) - C_2\left(\frac{1}{3}\sqrt{129} + 2\right) = 21/8,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

из решения которой находим

$$C_{1,2} = \frac{7}{16} \pm \frac{35}{688}\sqrt{129}\,. \tag{38}$$

С учетом полученных значений постоянных интегрирования решение задачи (16)–(19) во втором приближении находится из (35). Сравнение результатов расчетов по формуле (35) с численным решением задачи (16)–(19) позволяет заключить, что в диапазоне $0,1 \le x \le 0,4$ их расхождение не превышает 8 % (рис. 3).

Для нахождения решения задачи (16)–(19) в третьем приближении подставим (21) (ограничиваясь тремя членами ряда) в соотношение (20) и дополнительные граничные условия (22), (25). Относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k = 1,\,2,\,3)$ будем иметь систему трех алгебраических уравнений. После их определения соотношение (21) принимает вид

$$\Theta(y,x) = \frac{1}{4}q'(1-y^2) + \frac{1}{5}(2q' + 9q)(1-y^4) - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}q' + 4q\right)(1-y^6)\,. \tag{39}$$

Подставляя (39) в интеграл теплового баланса (27), относительно неизвестной функции $q(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$q'' + 106q'/3 + 480q = 0\,. \tag{40}$$

Интегрируя уравнение (40), находим

$$q(x) = C_1 e^{\nu_1 x} + C_2 e^{\nu_2 x}\,, \tag{41}$$

где $C_1$, $C_2$ – постоянные интегрирования; $\nu_{1,2} = \pm\frac{1}{3}(\mp 103 + \sqrt{6289})$.

Подставляя (39) с учетом (41) в (36), относительно постоянных интегрирования получаем систему двух алгебраических уравнений, из решения которой находим

$$C_{1,2} = \frac{51}{128} \pm \frac{7737}{804992}\sqrt{6289}\,. \tag{42}$$

После определения постоянных интегрирования решение задачи (16)–(19) в третьем приближении находится из (35). Результаты расчетов по формуле (35) в сравнении с решением численным методом приведены на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне $0{,}1 \le x \le 0{,}4$ расхождение результатов не превышает 6 %.

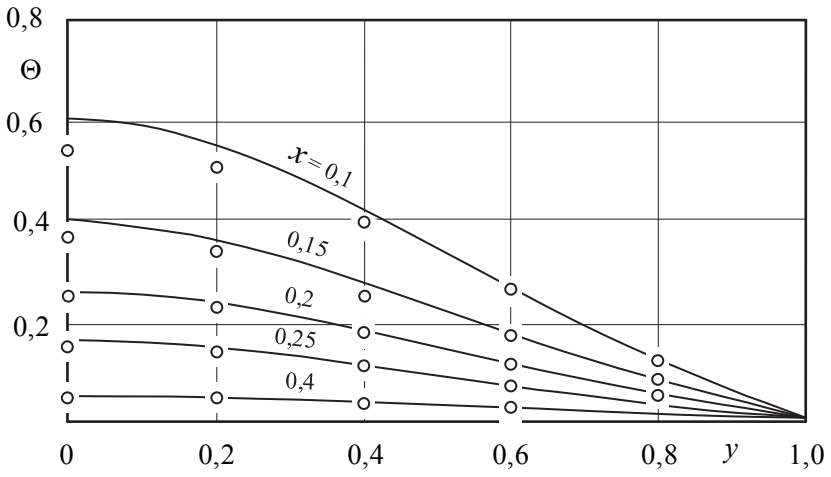


*Рис. 3* – Распределение температуры:

○ – по формуле (39) при $\delta = -2$ ; ———— – численное решение

*Fig. 3* – Temperature distribution:

○ is by formula (39) with $\delta = -2$ ; ————is a numerical solution

Найдем решение задачи при нагреве жидкости. Безразмерная температура в этом случае будет приниматься в виде $\Theta = (t - t_0)/(t_c - t_0)$. Граничное условие (19) не изменяется, а соотношения (17), (18) принимают вид

$$\Theta(y,\, 0) = 0\,; \tag{43}$$

$$\Theta(1,\, x) = 1\,. \tag{44}$$

Решение задачи (16), (19), (43), (44) принимается в виде

$$\Theta(y,x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} b_k(q)(1 - y^{2k}) . \tag{45}$$

Очевидно, что соотношение (45) удовлетворяет граничным условиям (19), (44). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ будем находить из соотношения (20) и приведенных выше дополнительных граничных условиях. Решение задачи (16), (19), (43), (44) при $\delta = 10$ во втором приближении имеет вид

$$\Theta(y,x) = \left(2,527e^{-1,934x} + 9,526e^{-22,067x}\right)\frac{(1-y^2)}{4} + \Big[1,307e^{-1,934x} +$$

$$+ 0,432e^{-22,067x} - \frac{1}{4}(1,307e^{-1,934x} + 9,526\,e^{-22,067x})\Big](1-y^4) + 1 . \tag{46}$$

Результаты расчетов по формуле (46) приведены на рис. 4, из которого следует, что при $x \approx 3$ жидкость прогревается до температуры $\Theta = 1,0$, заданной граничным условием (44), т. е. практически наступает режим стационарного теплообмена.

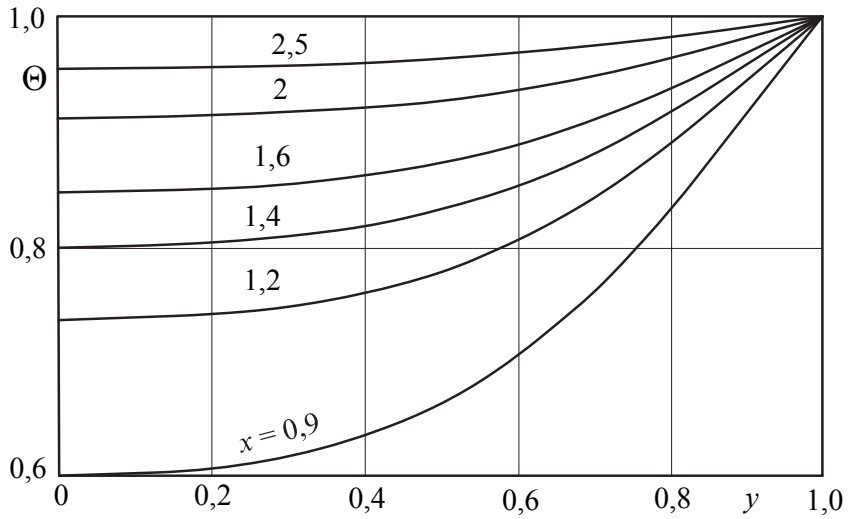


*Рис. 4* – Распределение температуры. Расчет по формуле (46). $\delta = 10$

*Fig. 4* – Temperature distribution. Evaluation by formula (46). $\delta = 10$

На рис. 5 приведены результаты расчетов в случае, когда $\delta = 0$, т. е. когда формула профиля скорости имеет вид $W(y,0) = 2W_{\text{ср}}(1 - y^2)$. Уравнение (16) в данном случае приводится к виду

$$y(1-y^2)\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y} + y\frac{\partial^2\Theta(y,x)}{\partial y^2} , \tag{47}$$

где $x = \eta a / (2W_{\text{ср}} r_0^2)$.

Решение задачи (47), (17) – (19) принималось в виде (21). Анализ результатов расчетов по формуле (21) в третьем приближении в сравнении с решением данной задачи по методу Л.В. Канторовича в шестом приближении [16], а также с точным аналитическим решением [1] позволяет заключить, что в диапазоне $0,05 \le x \le \infty$ их расхождение не превышает 2,5 %. Отметим, что решение по методу Л.В. Канторовича и точное аналитическое решение в указанном диапазоне переменной $x$ практически совпадают.

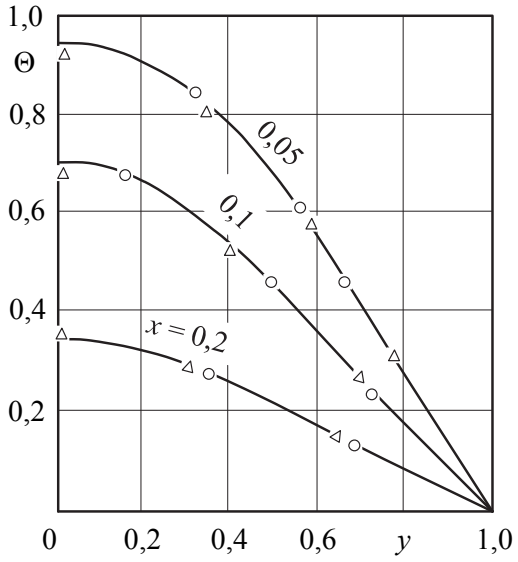


*Рис. 5* – Распределение температуры:
○ – метод Л.В. Канторовича (шестое приближение [16]);
△ – по формуле (21) при $n = 3$; ——— – точное решение [1]

*Fig. 5* – Temperature distribution:
○ is L.V. Kantorovich's method (the sixth approximation [16]);
△ by formula (21) with $n = 3$; ——— is an exact solution [1]

Краевая задача (15)–(19) представлена полностью в безразмерном виде. В связи с чем полученные решения вида (30), (35), (39), соответственно в первом, втором и третьем приближениях, могут быть использованы при любых значениях размерных величин параметров, входящих в формулы (15), т. е. может быть найдено решение любой конкретной задачи теплообмена, в которой будет реализована параболическая зависимость вязкости жидкости от температуры.

В неизотермических течениях от температуры зависит не только вязкость, но и теплофизические свойства жидкости. И, в частности, при линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $a(t) = a_0(1+\gamma t)$ уравнение (11) принимает вид $W(y,\delta)\dfrac{\partial t}{\partial \eta} = \dfrac{a_0}{\xi}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\gamma t)\xi\dfrac{\partial t}{\partial \xi}\right]$, где $a_0$ – температуропроводность жидкости при $t = t_0$; $\gamma$ – коэффициент.

Изложенный выше метод позволяет находить решение задачи и для такого вида уравнений, что будет предметом следующей статьи.

Отметим, что применительно к нестационарным задачам теплопроводности для бесконечной пластины с переменными начальными и граничными условиями, с неоднородными граничными условиями, а также с источниками теплоты в работах [17 – 20], используя рассмотренный выше метод, получены точные аналитические решения в форме бесконечных рядов.

### 3. Обсуждение результатов

Используя дополнительную искомую функцию и дополнительные граничные условия в интегральном методе теплового баланса, получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена для движущейся жидкости, при переменной от температуры вязкости. Применение дополнительной искомой функции основано на свойстве параболического уравнения теплообмена, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты. Ее использование позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Ввиду отсутствия необходимости интегрирования уравнения в частных производных по радиальной пространственной переменной, ограничиваясь интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции, данный метод может быть применен для решения краевых задач со сложными дифференциальными операторами в уравнениях, не допускающими разделения переменных (нелинейных, с переменными физическими свойствами среды, с учетом диссипации энергии и др.). Следует однако отметить, что с увеличением числа приближений трудности получения решения возрастают. И, в частности, возрастает порядок обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции. Однако эти трудности не являются принципиальными – они приводят лишь к возрастанию объема вычислительной работы, выполняемой на компьютерах. При этом получаемое решение сохраняется в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петухов Б.С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
2. **Цой П.В.** Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 568 с.
3. **Reddy M.G., Makinde O.D.** Magnetohydrodynamic peristaltic transport of Jeffrey nanofluid in an asymmetric channel // Journal of Molecular Liquids. – 2016. – Vol. 223. – P. 1242–1248.
4. Peristalsis of nonconstant viscosity Jeffrey fluid with nanoparticles / N. Alvi, T. Latif, Q. Hussain, S. Asghar // Results in Physics. – 2016. – Vol. 6. – P. 1109–1125.
5. MHD Couette-Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect / O.D. Makinde, T. Iskander, F. Mabood, W.A. Khan, M.S. Tshehla // Journal of Molecular Liquids. – 2016. – Vol. 221. – P. 778–787.
6. **Hasona W.M., El-Shekhipi A.A., Ybrahim M.G.** Combined effects of magnetohydrodymanic and temperature dependent viscosity on peristaltic flow of Jeffrey nanofluid through a porous medium: applications to oil refinement // International Journal of Heat Mass Transfer. – 2018. – Vol. 126. – P. 700–714.
7. **Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.** Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2008. – № 5. – С. 141–157.
8. **Лыков А.В.** Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1970. – № 5. – С. 109–150.

9. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: сборник научных трудов. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 41–96.
10. **Глазунов Ю.Т.** Вариационные методы. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотичная динамика: Ин-т компьютер. исслед., 2006. – 470 с.
11. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
12. **Кудинов В.А., Кудинов И.В., Котова Е.В.** Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55, № 4. – С. 556–563.
13. **Канторович Л.В.** Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 2, № 9. – С. 532–534.
14. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
15. **Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л.** Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Машиностроение, 1979. – 232 с.
16. **Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В.** Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2018. – 435 с.
17. **Кудинов И.В.** Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2016. – № 4 (52). – С. 108–117.
18. Об одном методе получения точных аналитических решений задач теплопроводности с источником теплоты / И.В. Кудинов, Е.В. Стефанюк, М.П. Скворцова, Г.Н. Максименко // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2017. – Т. 60, № 11. – С. 877–882.
19. Об одном методе решения нестационарных краевых задач / И.В. Кудинов, В.А. Кудинов, Е.В. Котова, А.В. Еремин // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 6. – С. 1387–1397.
20. **Кудинов В.И., Кудинов В.А., Котова Е.В.** Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55, № 4. – С. 556–563.

## HYDRODYNAMICS AND HEAT EXCHANGE IN FLUIDS WITH VISCOSITY DEPENDENCE ON TEMPERATURE

**Tkachev V.K., Eremin A.V., Tarabrina T.B., Kudinov I.V.**
*Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*

By introducing an additional sought-for function (ASF) and additional boundary conditions (ABC) using the integral heat balance method, an analytical solution to the problem of heat transfer in a fluid moving in a cylindrical pipe under the parabolic law of viscosity dependence on temperature was found. A function characterizing a change in temperature along the longitudinal coordinate in the center of the pipe was taken as an additional one. Its use is based on the infinite velocity of heat distribution described by a parabolic equation solution. According to it, the temperature of the liquid in the center of the pipe changes immediately after the ASF of the boundary condition is applied to its surface. The application of the ASF makes it possible to reduce a partial differential equation to an ordinary equation. ABCs are defined so that their fulfillment is equal to solving an equation at boundary points. It is shown that solving the equation at the boundary also leads to its solving inside the area with the accuracy depending on the number of additional boundary conditions used in obtaining the solution. The study of the results obtained showed a significant difference in the velocity profiles caused by fluid heating and cooling. So, when heated, the velocity profile approaches the profile of a core flow which is characterized by an almost constant velocity across the channel, and when cooled, it is elongated longitudinally. The studies performed showed a significant difference in the temperature distribution obtained with and without taking into account the viscosity dependence on temperature.

*Keywords:* heat exchange in a moving fluid, viscosity dependence on temperature, additional sought-for function, additional boundary conditions, infinite velocity of heat propagation, integral method.

DOI: 10.17212/1727-2769-2019-3-70-86

REFERENCES

1. Petukhov B.S. *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance during laminar fluid flow in pipes]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 412 p.
2. Tsoi P.V. *Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa* [Systemic methods for calculating boundary-value problems of heat and mass transfer]. Moscow, MEI Publ., 2005. 568 p.
3. Reddy M.G., Makinde O.D. Magnetohydrodynamic peristaltic transport of Jeffrey nanofluid in an asymmetric channel. *Journal of Molecular Liquids*, 2016, vol. 223, pp. 1242–1248.
4. Alvi N., Latif T., Hussain Q., Asghar S. Peristalsis of nonconstant viscosity Jeffrey fluid with nanoparticles. *Results in Physics*, 2016, vol. 6, pp. 1109–1125.
5. Makinde O.D., Iskander T., Mabood F., Khan W.A., Tshehla M.S. MHD Couette – Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect. *Journal of Molecular Liquids*, 2016, vol. 221, pp. 778–787.
6. Hasona W.M., El-Shekhipi A.A., Ybrahim M.G. Combined effects of magnetohydrodymanic and temperature dependent viscosity on peristaltic flow of Jeffrey nanofluid through a porous medium: applications to oil refinement. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2018, vol. 126, pp. 700–714.
7. Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Zadachi teploprovodnosti na osnove opredeleniya fronta temperaturnogo vozmushcheniya [Heat exchange problems based on temperature perturbation front determination]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2008, no. 5, pp. 141–157.
8. Lykov A.V. Metody resheniya nelineinykh uravnenii nestatsionarnoi teploprovodnosti [Methods for solving nonlinear equations of nonstationary heat conduction]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR – Proceedings of Academy of Sciences. Power Engeneering and Transport*, 1970, no. 5, pp. 109–150.
9. Goodman T. Primeneniye integralnyh metodov v nelineinyh zadachah nestatsionarnogo teploobmena [Application of integral methods in nonlinear problems of unsteady heat transfer]. *Problemy teploobmena* [Advances in heat transfer]. Moscow, Atomizdat Publ., 1967, pp. 41–96. (In Russian).
10. Glazunov Yu.T. *Variatsionnye metody* [Variational methods]. Moscow, Izhevsk, Regulyarnaya i khaotichnaya dinamika Publ., Institut komp'yuternykh issledovanii Publ., 2006. 470 p.
11. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody nestatsionarnoi teploprovodnosti* [Methods of nonstationary thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1978. 328 p.
12. Kudinov V.A., Kudinov I.V., Kotova E.V. Dopolnitel'nye granichnye usloviya v nestatsionarnykh zadachakh teploprovodnosti [Additional boundary conditions in unsteady-state heat conduction problems]. *Teplofizika vysokikh temperature – High Temperature*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 556–563. (In Russian).
13. Kantorovich L.V. Ob odnom metode priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh [On one method of approximate solution to partial differential equations]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1934, vol. 2, no. 9, pp. 532–534. (In Russian).
14. Fedorov F.M. *Granichnyi metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki* [Boundary method for solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000. 220 p.
15. Kudryashov L.I., Men'shikh N.L. *Priblizhennye resheniya nelineinykh zadach teploprovodnosti* [Approximate solutions of nonlinear heat problems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 232 p.

16. Kartashov E.M., Kudinov V.A., Kalashnikov V.V. *Teoriya teplomassoperenosa: reshenie zadach dlya mnogosloinykh konstruktsii* [Theory of heat and mass transfer: solving problems for multilayer structures]. 2nd ed. Moscow, Yurait Publ., 2018. 435 p.
17. Kudinov I.V. Poluchenie tochnykh analiticheskikh reshenii zadach teploprovodnosti s peremennymi vo vremeni granichnymi usloviyami [Obtaining exact analytical decisions of tasks heat conductions with variables in time boundary conditions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki – Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 2016, no. 4 (52), pp. 108–117.
18. Kudinov I.V., Stefanyuk E.V., Skvortsova M.P., Maksimenko G.N. Ob odnom metode polucheniya tochnykh analiticheskikh reshenii zadach teploprovodnosti s istochnikom teploty [Method of obtaining exact analytical solutions of tasks of heat conductivity with warmth sources]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Chernaya metallurgiya – Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2017, vol. 60, no. 11, pp. 877–882.
19. Kudinov I.V., Kudinov V.A., Kotova E.V., Eremin A.V. Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh kraevykh zadach [On one method of solving nonstationary boundary-value problems]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2017, vol. 90, no. 6, pp. 1387–1397. (In Russian).
20. Kudinov V.I., Kudinov V.A., Kotova E.V. Dopolnitel'nye granichnye usloviya v nestatsionarnykh zadachakh teploprovodnosti [Additional boundary conditions in unsteady-state heat conduction problems]. *Teplofizika vysokikh temperature – High Temperature*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 556–563. (In Russian).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Ткачев Василий Константинович** – родился в 1993 году, ассистент, кафедра промышленной теплоэнергетики, ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет. Область научных интересов: математическое моделирование, теплообмен, гидравлика. Опубликовано 40 научных работ. (Адрес: 443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244. E-mail: tvk93@yandex.ru).

**Tkachev Vasily Konstantinovich** (b. 1993) – an assistant lecturer at the Department of Industrial Heat & Power Engineering, Samara State Technical University. His research interests are currently focused on mathematical modeling, heat exchange, and hydraulics. He is the author of 40 scientific papers. (Address: 244, Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russia. E-mail: tvk93@yandex.ru).

**Еремин Антон Владимирович** – родился в 1988 году, канд. техн. наук, доцент, и.о. заведующего кафедрой, доцент, кафедра промышленной теплоэнергетики, ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет. Область научных интересов: математическое моделирование, теплообмен, гидравлика. Опубликовано 70 научных работ. (Адрес: 443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244. E-mail: a.v.eremin@list.ru).

**Eremin Anton Vladimirovich** (b. 1988) – PhD (Eng.), an associate professor at the Department of Industrial Heat & Power Engineering, Samara State Technical University. His research interests are currently focused on mathematical modeling, heat exchange, and hydraulics. He is the author of 70 scientific papers. (Address: 244, Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russia. E-mail: a.v.eremin@list.ru).

**Тарабрина Тамара Борисовна** – родилась в 1962 году, канд. пед. наук, доцент, кафедра теоретических основ теплотехники и гидромеханики, ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет. Область научных интересов: математическое моделирование, теплообмен, гидравлика. Опубликовано 25 научных работ. (Адрес: 443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244. E-mail: ttb2007@yandex.ru).

**Tarabrina Tamara** (b. 1962) – Candidate of Sciences (Ed.), Associate Professor, Department of Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Hydromechanics, Samara State Technical University. Her research interests are currently focused on Mathematical modeling, heat exchange, hydraulics. She is author of 25 scientific papers. (Address: 244, Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russia. E-mail: ttb2007@yandex.ru).

**Кудинов Игорь Васильевич** – родился в 1987 году, д-р техн. наук, доцент, профессор, кафедра теоретических основ теплотехники и гидромеханики, ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет. Область научных интересов: математическое моделирование, теплообмен, гидравлика. Опубликовано 80 научных работ. (Адрес: 443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244. E-mail: igor-kudinov@bk.ru).

**Kudinov Igor Vasil'evich** (b. 1987) – D.Sc.(Eng.), an associate professor, professor at the Department of Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Hydromechanics, Samara State Technical University. His research interests are currently focused on mathematical modeling, heat exchange, and hydraulics. He is the author of 80 scientific papers. (Address: 244, Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russia. E-mail: igor-kudinov@bk.ru).

*Статья поступила 22 апреля 2019 г.*
*Received April 22, 2019*

To Reference:

Tkachev V.K., Eremin A.V., Tarabrina T.B., Kudinov I.V. Gidrodinamika i teploobmen v zhidkosti pri zavisimosti vyazkosti ot temperatury [Hydrodynamics and heat exchange in fluids with viscosity dependence on temperature]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2019, no. 3 (44), pp. 70–86. DOI: 10.17212/1727-2769-2019-3-70-86.